

MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous, suivi de « VRAI » si l'affirmation est vraie ou de « FAUX » si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La limite en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est égale à 0.
2	Pour tout nombre réel x , $(\cos x + i \sin x)^7 = \cos^7(x) + i \sin^7(x)$
3	Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = v_n + 3$ et $v_0 = 2$. La somme $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{19}$ est égale à 610.
4	Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $f'' = 0$ sont les fonctions : $f_{(A,B)} : x \mapsto Ax + B$ ($A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$)

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées mais une seule permet d'avoir l'affirmation juste. Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne la réponse juste qui le complète. Aucune justification n'est demandée.

Enoncés		Réponses proposées	
1	Une primitive sur $] -\infty ; 2[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2-x}$ est :	A	$F(x) = 1 - \ln(2 - x)$
		B	$F(x) = 3 \ln(2 - x)$
		C	$F(x) = \frac{1}{3} \ln(2 - x)$
		D	$F(x) = 1 - 3 \ln(2 - x)$
2	La transformation du plan dont l'écriture complexe $Z' = (a^2 + 2)z + 1 + i$ est une translation si et seulement si a est égale à :	A	1 ou -1
		B	1 ou i
		C	i ou $-i$
		D	-1 ou $-i$
3	les droites de régression de y en x et de x en y d'un série statistique double sont respectivement $y = 1,68x - 31,4$ et $x = 0,53y + 23,3$. On note r la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire. La valeur de r est égale à :	A	1,51
		B	-0,94
		C	0,53
		D	0,94
4	La linéarisation de $\sin^3(x)$ est	A	$-\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$
		B	$-\frac{1}{8} \sin(3x) + \frac{3}{8} \sin(x)$
		C	$\frac{1}{4} \sin(3x) - \frac{3}{4} \sin(x)$
		D	$\frac{1}{8} \sin(3x) - \frac{3}{8} \sin(x)$

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x_i)$	$\frac{b}{2}$	$2b$	b	$4b$	$\frac{5b}{2}$

Où $x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4$ et x_5 sont les valeurs prises par X et b un nombre réel.

- 1) Détermine b .
- 2) On prend $b = \frac{1}{10}$ et $x_4 = 7$. Détermine $x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4$ et x_5 sachant que ces réels forment dans cet ordre une progression arithmétique de raison r et que l'espérance mathématique de X est de 5,8.
- 3) Calcule la variance et l'écart-type de X .
- 4) Détermine la fonction de répartition F de X puis construis sa courbe représentative.

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On prendra 1 cm pour unité graphique.

Partie A :

Soit A_0 le point d'affixe $Z_0 = 10$. On considère la similitude directe S de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

- 1) Justifie que l'écriture complexe de S est : $Z' = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)Z$.
- 2) Calcule l'affixe Z_1 du point A_1 image par S du point A_0 . On note $A_1 = S(A_0)$.
- 3) Justifie que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 et en déduis que l'aire de ce triangle est

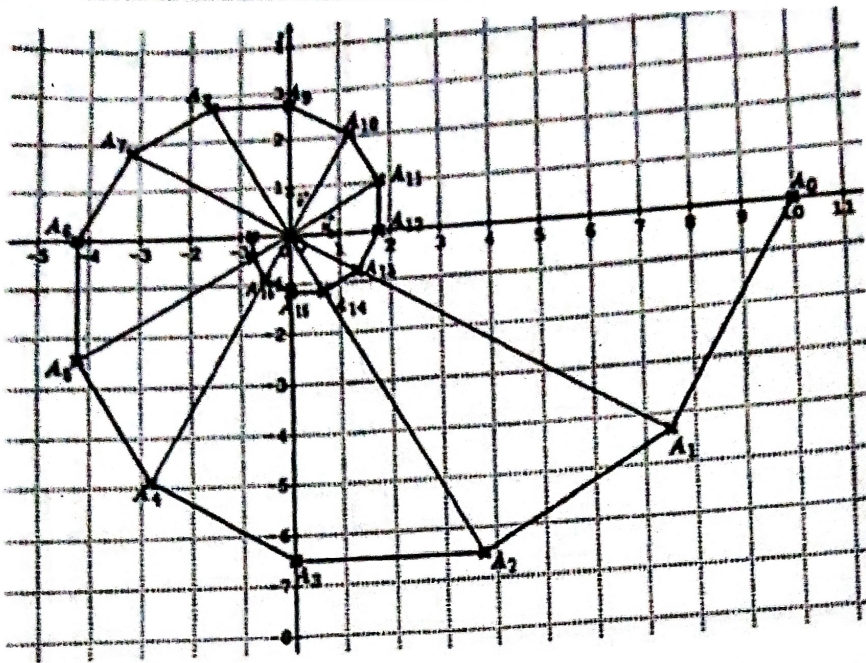
$$\mathcal{A}_{OA_0A_1} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Partie B :

Les points A_{n+1} d'affixes Z_{n+1} sont les images par S des points A_n d'affixes Z_n (voir figure)

On note $A_{n+1} = S(A_n)$

- 1) Détermine la nature puis l'aire $\mathcal{A}_{OA_1A_2}$ du triangle OA_1A_2 .
- 2) Pour tout entier n , on pose $u_n = OA_n$.
 - a- Justifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dont on précisera le premier terme u_0 .
 - b- Exprime u_n en fonction de .
 - c- En déduis les affixes, sous leur forme algébrique, des points A_3 et A_6 , et l'affixe du point A_4 sous la forme exponentielle.
 - d- Calcule, en fonction de n , la somme $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ puis montre que T_n converge vers un nombre que tu détermineras.



EXERCICE 5

Soit f la fonction dérivable sur \mathbb{R} et définie par : $f(x) = xe^{1-x^2}$. (C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité 2cm.

- 1) Etudie la parité de f . Donne une interprétation graphique de ce résultat.
- 2) Calcule la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.
- 3) a- Démontre que : $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$.
b- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation sur $[0; +\infty[$
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $E = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.
a- Démontre que h est une bijection de E sur un intervalle K que l'on précisera.
b- On note h^{-1} la bijection réciproque de h . h^{-1} est-elle dérivable en $\sqrt{\frac{e}{2}}$?
c- Calcule $h(1)$ et déduis $(h^{-1})'(1)$
- 6) Trace (T) et construis (C) .
- 7) Soit m un nombre réel tel que $m > 0$. on désigne par (D_m) la partie du plan délimitée par (C) , (OI) , (OJ) et la droite d'équation $x = m$.
a- Calcule A_m l'aire de (D_m) .
b- Calcule la limite de A_m quand m tend vers $+\infty$.
c- En utilisant la parité de f , déduis l'aire A de la partie du plan délimitée par (C) et (OI) .

EXERCICE 6 (SITUATION COMPLEXE 1)

Afin de suivre l'évolution de ses poussins, Monsieur BARRE, un fermier de KOUN-FAO décide de mettre des signes sur tous les poussins. Le premier mois, 600 poussins présents dans la ferme sont marqués.
Au début de chaque mois, Il constate que 10 % des poussins présents dans la ferme le mois précédent sont morts et il ajoute 100 autres poussins.

Le nombre U_n de poussins présents dans la ferme le $n^{\text{ième}}$ mois est tel que la suite : $(V_n)_{n \geq 1}$ définie par $V_n = U_n - 1000$ soit une suite géométrique.

Monsieur BARRE de niveau scolaire primaire, te sollicite pour savoir le mois à partir duquel, le nombre de poussins présents dans la ferme dépassera 900 afin de prévoir un agrandissement de son enclos.

Par une démarche argumentée, détermine le rang de ce mois.

EXERCICE 7 (SITUATION COMPLEXE 2)

En vue d'une couverture parfaite de la coupe d'Afrique des Nations en côte d'Ivoire une chaîne de télévision privée désire améliorer la sûreté de fonctionnement de son serveur informatique. L'informaticien M. Touré de la structure propose au Directeur M. KONE SIAKA d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. Il peut réaliser les opérations suivantes :

- Utiliser trois alimentations de 300 watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 watts.
- Placer les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.

M. Touré informe que tous les composants sont indépendants en outre, une alimentation et un disque dur ont la même probabilité p de tomber en panne avec $p \in]0 ; 1[$. Les contraintes budgétaires imposent au Directeur KONE SIAKA d'effectuer une seule opération. Il décide donc de choisir la plus sûre. Il présente la situation à sa fille que tu es et qui souhaite obtenir un poste dans son entreprise après l'obtention du Bac.

En t'appuyant sur tes connaissances mathématiques de terminale D, donne-lui une réponse argumentée.

EXERCICE 8 (SITUATION COMPLEXE 3) (BONUS)

M TOURE se rend chez un ferronnier pour construire une porte métallique pour le portail principal de sa cour. Son portail est composé de deux battants identiques comme l'indique la figure ci-contre.

Le fils de M TOURE, après ses études du plan du portail affirme ceci :

Les bordures de la partie droite est modélisée par la représentation

graphique de la fonction f définie sur $[0; 75]$ par $f(x) = 300 - 4xe^{\frac{x-75}{20}}$.

La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en Cm

Le ferronnier l'informe que le m^2 de la feuille de tôle qu'il utilisera coûte 25000 F CFA et sa main d'œuvre pour

la fabrication est de 40000 F CFA. M TOURE ne dispose que de 120 000 F CFA.

Inquiet ; il se demande s'il serait à mesure de réaliser son portail.

Il te sollicite. A l'aide de tes connaissances mathématiques, aide M TOURE à répondre à sa préoccupation.

