Se préparer au BAC

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Bac

Sujets et corrigés

Maths

Série C

Le Guide

- Sujets de 1994 à 2023
- Corrigés détaillés

Bengaly Kalifa

Lycée Moderne 3 Divo
+225 0707346649
Bengalykalifa2@gmail.com

Édition 2024

SOMMAIRE

SESSION NORMALE 2023 Série C

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de Vrai si la proposition est vraie ou de Faux si la proposition est fausse.

N^0	Propositions
1.	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, si (P) est le plan d'équation cartésienne : $2x+3y+4z-8=0$, alors un vecteur normal à (P) est : $\vec{n}\left(1;\frac{3}{2};2\right)$.
2.	Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, de demi distance focale $\sqrt{7}$ a pour foyers F et F' tels que : $F(\sqrt{7};0)$ et $F'(-\sqrt{7};0)$.
3.	Une corrélation linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique double est forte lorsque le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $r<0{,}87$.
4.	Soient A et B deux points distincts du plan. La composée $r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} o t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés		Informations
1.	La suite $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_n=\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ a pour limite..	A	$+\infty$
		B	$-\infty$.
		C	0.
		D	$-\frac{2}{3}$.
2.	PQRS est un carré de centre O tel que le triplet (P, Q, R) soit de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des segments [QR] et [RS]. La composée $r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)} OS_{(QR)}$ est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur...	A	$\overrightarrow{QS}$
		B	$\overrightarrow{OQ}$
		C	$\overrightarrow{SQ}$
		D	$\overrightarrow{QO}$.

3	On admet que : $\forall x\in[0;1], \frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^2}\leq 1$ La fonction F définie sur $[0;1]$ par : $F(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est telle que..	A	$x-1\leq F(x)\leq\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$
		B	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\leq F(x)\leq x-1$
		C	$1-x\leq F(x)\leq\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$
		D	$\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\leq F(x)\leq 1-x$.
4	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$

	(O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2; 2+2i$ et $2i$. La similitude directe de centre A qui transforme B en C a pour angle et pour rapport...	B	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		D	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 3 (3 points)

Des scientifiques participent à un séminaire sur le thème : «Le réchauffement climatique et ses conséquences sur les économies des pays».

Une enquête organisée par un organisme international a révélé que 75% des scientifiques croient au réchauffement climatique et parmi ceux-ci, il y a des écologistes.

Selon cette enquête :

- la probabilité qu'un scientifique qui croit au réchauffement climatique soit un écologiste est 0,6;
- la probabilité qu'un scientifique qui ne croit pas au réchauffement climatique ne soit pas un écologiste est 0,08 .

On choisit un scientifique au hasard ayant participé au séminaire.

On désigne par :

R l'évènement : « Le scientifique interrogé croit au réchauffement climatique»;

E l'évènement : «Le scientifique interrogé est un écologiste».

1. a) Traduis cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Donne les probabilités suivantes : $P(R); P_{\bar{R}}(\bar{E}); P_R(E)$.

2. a) Calcule: $P_R(\bar{E})$.

b) Justifie que : $P(\bar{R} \cap E) = 0{,}23$.

3. a) Justifie que la probabilité qu'un scientifique interrogé soit un écologiste est 0,68 .

b) Un scientifique interrogé est un écologiste. Calcule la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique. (Tu donneras l'arrondi d'ordre 2 du résultat).

EXERCICE 4 (4 points)

Soit m un nombre réel et f_m la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par: $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$. On note D_m l'ensemble de définition de f_m et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan

On désigne par (D) la droite d'équation : $y = x$.

1. Justifie que :
   a) $\text{Si}\, m \leq 0$, alors $\mathrm{D}_m = \mathbb{R}$.
   b) $\text{Si}\, m > 0$, alors $\mathrm{D}_m =]\ln(m); +\infty[$.
2. On suppose que f_m est dérivable sur D_m pour tout nombre réel m.

a) Justifie que pour tout x de $\mathrm{D}_m, f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$

b) Justifie que pour $m \leq 0, f_m$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Justifie que pour $m > 0, f_m$ est strictement croissante $\text{sur}]\ln(m); +\infty[$.

3. a) Démontre que pour tout nombre réel m, f_m est une bijection sur D_m.

$f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$.

c) Déduis de la question précédente, une méthode de construction de (C_{-m}) dans le même

4. On suppose que m et $\dot{p}$ sont des nombres réels strictement positifs.

a) Justifie que (C_p) est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p; \ln p)$.

b) Détermine la translation T' qui transforme (C_p) en (C_m).

EXERCICE 5 (4 points)

On considère l'équation $(E): 4x - y = 2$ où les inconnues x et y appartiennent à $\mathbb{Z}$.

1. a) Démontre que si le couple (x_0, y_0) est une solution de (E), alors y_0 est pair.

b) Détermine les valeurs possibles de $\mathrm{PGCD}(x_0, y_0)$.

2. a) Vérifie que le couple $(1; 2)$ est une solution de (E).

b) Résous l'équation (E).

3. Détermine l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E) tels que x et y sont premiers entre eux.
4. $\overline{ac2}^3$ et $\overline{baa}^4$ sont deux écritures du même entier naturel p respectivement en base 3 et en base 4 .

a) Justifie que $3c + 2$ est multiple de 4 .

b) Déduis-en que c est égal à 2 .

c) Détermine les valeurs de a et de b. (Tu pourras utiliser 2.b).

d) Ecris p dans le système décimal.

EXERCICE 6 (5 points)

Une étudiante en histoire ancienne veut rédiger son mémoire de Master 2. Au cours de ses recherches, elle décide de déterminer l'âge d'un fragment d'os découvert par des archéologues. L'information dont elle dispose est que le fragment découvert à une teneur en carbone 14 égale à 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse pris comme témoin.

Au cours de sa formation, elle a appris que :

- Si t est l'âge en années de l'os découvert, alors la quantité restante de carbone 14 dans le fragment d'os est $P(t)$ où P est une fonction de t.
- La dérivée P' de la fonction P est égale au produit de P par l'opposé de la constante radioactive de carbone 14, notée $\lambda (\lambda = 1{,}2444 \times 10^{-4})$.
- La quantité P_0 de carbone 14 d'un organisme vivant commence à diminuer à partir de la mort de cet organisme à l'instant t égal à zéro.

N'ayant pas suffisamment de connaissance pour exploiter ces données, elle te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de l'étudiante.

SESSION NORMALE 2022 Série C

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de Vrai si la proposition est vraie ou de Faux si la proposition est fausse.

$N°$	Propositions
1.	Toute isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
2.	Soient f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe un nombre réel M tel que, $\forall x \in [a; b], \|f'(x)\| \leq M$, alors $-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
3.	Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathrm{E}): y'' = 3y$ est la fonction : $x \mapsto 2e^{3x} + 4e^{-3x}$.
4.	La dépendance linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique à deux variables est forte si et seulement si le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $\|r\| \leq 0{,}4$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés		Affirmations
1.	Si E, F et G sont trois points distincts du plan, alors pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ est égal à ...	A	$4\overrightarrow{MF}$
		B	$-\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$
		C	$5\overrightarrow{ME}$
		D	$2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$
2.	Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, la directrice de la parabole d'équation réduite $x^2 = 8y$ est la droite d'équation ...	A	$y = -1$
		B	$y = 2$
		C	$y = -2$
		D	$y = 1$.
3.	$\mathrm{Arg}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5\right]$ est égal à ...	A	$\frac{7\pi}{12}$.
		B	$\frac{-5\pi}{12}$.
		C	$\frac{-7\pi}{12}$.
		D	$\frac{5\pi}{12}$.
4.	Soit OPN un triangle rectangle isocèle en O, de sens direct et	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

	I le milieu du segment $[NP]$. Si une similitude directe S de centre O applique I sur P, alors l'angle et le rapport de S sont respectivement ...	B	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		D	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$

EXERCICE 3 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les points $A(0;4;1), B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2), E(7;-1;4)$ et le vecteur $\vec{u}(2;-1;3)$.

1. Démontre que les points A, B et C déterminent un plan.
2. a) Démontre que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Justifie qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Vérifie que le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3. Soit $(\triangle)$ la droite passant par le point E et orthogonale au plan (ABC).

On pose : $\{K\} = (\Delta) \cap (ABC)$.

a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Justifie que le point K a pour coordonnées $(3;1;-2)$.

c) Calcule la distance EK.

EXERCICE 4 (4 points)

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure à l'arrêt, il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de ville.

On suppose que l'employé n'est pas en retard le premier jour. A partir du deuxième jour :

- si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{5}$.
- s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : on appelle R_n, l'évènement : «l'employé est en retard le jour n».

On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$, l'évènement contraire de R_n.

On suppose que : $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{5}$. On a : $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $n \geq 2$.

1. a) Justifie que : $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20}p_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5}q_n$.

b) Détermine p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

c) Déduis-en que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2. On pose : $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Détermine son premier terme v_2.

3. a) Calcule la limite de la suite (v_n).

b) Déduis-en la limite de la suite (p_n).

EXERCICE 5 (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 3 cm.

1. a) Justifie que : $\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$;

b) Justifie que : $\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = 0$.

c) Donne une interprétation graphique des résultats des questions 1.a) et 1.b).

2. a) On admet que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Justifie que $\forall x \in]0;+\infty\left[, f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}\right.$.
b) Détermine les variations de f_n sur $]0;+\infty[$.
c) Vérifie que : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$.
d) Dresse le tableau de variation de f_n.
3. a) Justifie que: $\forall x \in]0;+\infty\left[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}\right.$.
b) Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).
4. Soit I l'intégrale telle que : $\mathrm{I} = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.
a) A l'aide d' une intégration par parties, justifie que : $\mathrm{I} = 1 - \frac{2}{e}$.
b) Déduis-en l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbe $(C_n), (C_{n+1})$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

EXERCICE 6 (5 points)
La salle du foyer des jeunes d'une commune est dans un état de dégradation avancée.
Le Maire, soucieux du bien-être de sa jeunesse, décide de la réhabiliter en commençant en priorité par le revêtement du sol qui est un rectangle de longueur $14{,}40$ m et de largeur $8{,}70$ m.
Pour ce faire, il instruit le chef du service technique de la Mairie qui prend attache avec un fournisseur en vue d'acheter des carreaux.
Ce dernier dispose de trois types de carreaux carrés, de côtés respectifs 18 cm; 25 cm et 30 cm.
Chaque type de carreaux est livré en paquets de 12 et de 20 carreaux.
Pour éviter le gaspillage et la surfacturation, le Maire exige :

- qu'il n'y ait pas de découpe de carreaux lors du carrelage ;
- qu'on lui communique le nombre exact de paquets de 12 et de paquets de 20 qu'il faut acheter.
  Le chef du service technique pense que les carreaux de côté 30 cm conviennent si l'on veut éviter des découpes de carreaux. N'étant pas qualifié pour faire ces types de calculs, il te sollicite.

1. Vérifie si le chef du service technique a raison ou pas.
2. En supposant qu'il a raison, détermine le nombre de paquets de 20 et le nombre de paquets de 12 que le chef du service technique doit commander, sachant que le nombre de paquets de 20 est supérieur à 66.

SESSION NORMALE 2021 Série C

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si l'affirmation est fausse.

$N°$	Affirmation
1.	Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que f soit croissante et majorée sur l'intervalle $]2;5[$, alors f admet pour limite $+\infty$ à gauche en 5.
2.	Le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique à deux variables a le même signe que la covariance de cette série statistique.
3.	Une primitive sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \times e^{\tan x}$ est la fonction : $x \mapsto e^{\tan x}$.
4.	Toute similitude directe du plan admet un point invariant.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés à trou du tableau ci-dessous, quatre réponses $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncé à trou		Réponses
1.	Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-2}{3^n}$. La suite (u_n) ...	A	Diverge vers $-\infty$.
		B	converge vers 0 .
		C	diverge vers $+\infty$
		D	converge vers -2 .
2.	On pose : $z = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$ L'argument principal de z est ...	A	$-\frac{\pi}{6}$.
		B	$\frac{5\pi}{6}$.
		C	$\frac{-5\pi}{6}$.
		D	$\frac{\pi}{6}$.

3.	O est un point du plan. L'homothétie h de centre O et de rapport -5 ...	A	n'est pas une similitude directe
		B	est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle nul.
		C	est une isométrie.
		D	est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle π.
4.	ABC est un triangle et G l'isobarycentre des points A, B et C. L 'ensemble des points M du	A	la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC).

	plan vérifiant : $\parallel \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \parallel = \mathrm{AC}$ est ...	B	le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}\mathrm{AC}$.
		C	l'ensemble vide.
		D	le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}\mathrm{AC}$.

EXERCICE 3 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points : $\mathrm{A}(0; 0; 2)$; $\mathrm{B}(0; 4; 0)$ et $\mathrm{C}(2; 0; 0)$.

1. a) Justifie que les points A, B et C déterminent un plan.

b) Démontre qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + y + 2z - 4 = 0.\psi$

2. Soit (D) le droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).

b) Justifie que la droite (D) est incluse dans le plan (ABC).

c) Justifie que la droite (D) est la hauteur du triangle ABC issue du point A. <)

3. Soit $(\mathfrak{P})$ le plan dont une équation cartésienne est : $y = \frac{x}{2}$.

a) Justifie que les plans $(\mathfrak{P})$ et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Démontre que : $\{(\mathrm{D})\} = (\mathrm{ABC}) \cap (\mathcal{P})$.

EXERCICE 4 (3 points)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux nombres entiers X et Y tels que : $\mathrm{X} = k^2 - 2k + 2$ et $\mathrm{Y} = k^2 + 2k + 2$.

On pose : $\mathrm{PGCD}(\mathrm{X}; \mathrm{Y}) = m$.

1. Démontre que tout diviseur de X qui divise k, divise 2 .
2. Démontre que tout diviseur commun de X et de Y divise $4k$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que k est impair.

3. a) Justifie que les nombres entiers X et Y sont aussi impairs.

b) Déduis-en que m est impair.

4. a) Justifie que m divise 2 .

b) Déduis des questions précédentes que: $\mathrm{PGCD}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 1$.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$par: $g(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Détermine $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Détermine $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

2. a) On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Justifie que la fonction g est strictement croissante sur $]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}[$.

b) Vérifie que : $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln(2\sqrt{2})$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

c) Justifie que la courbe (C) est au dessous de la droite (D).

4. On admet que la droite (D') d'équation $y = -x + \ln 2$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.
   Trace dans le plan muni du repère (O, I, J), la courbe (C), les droites (D) et (D').

5. Soit J l'intégrale telle que : $J = \int_0^1 (g(x) - x)dx$.

a) Donne une interprétation géométrique de J.

b) En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln(1 + x) \leq x$, justifie que : $0 < J < 0,87$.

(On ne te demande pas de déterminer la valeur exacte de J.)

EXERCICE 6 (5 points)

Le Directeur d'une société internationale veut acquérir un avion privé afin d'éviter les désagréments que lui causent les vols commerciaux.

Il a le choix entre deux types d'avions : un biréacteur et un quadriréacteur. Au moment de l'achat, le constructeur lui décrit les deux types d'appareils de la façon suivante :

«Le biréacteur possède deux réacteurs R_1 et R_2 de telle sorte que l'état du réacteur R_2 dépend de celui du réacteur R_1. Cet appareil ne peut pas voler à la seule condition que les réacteurs R_1 et R_2 tombent simultanément en panne. En outre, une enquête a révélé que durant les dix premières années qui suivent leur première mise en service, 30% des réacteurs R_1 tombent en panne et que dans un même avion, lorsque le réacteur R_1 tombe en panne, le réacteur R_2 a 40% de chance de tomber aussi en panne».

«Quant au quadriréacteur, il possède quatre réacteurs qui fonctionnent de façon indépendante. Cet appareil peut voler si au moins deux des quatre réacteurs continuent de fonctionner. En outre, 25% des réacteurs de ce type d'appareil tombent en panne durant les dix premières années qui suivent leur mise en service ».

Le Directeur veut acheter parmi les deux types d'avion, celui qui offrira le plus de chance de voler durant les dix prochaines années.

A la recherche de personnes ressources pour guider son choix, il s'adresse à toi.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du Directeur.

SESSION NORMALE 2020 Série C

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique est $2\ \text{cm}$.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :
$a = 2 - 2i, b = 2 + 2i$ et $c = -2 + 2i$.

1. a) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a, b et c.

2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2 .

a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r.
b) Déduis de ce qui précède $r(\mathrm{B})$.
c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r.
d) Construis (Γ) et (Γ ') sur la même figure.

3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2e^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r. On note z ' l'affixe de M'.

- a) Démontre que M est un point de (Γ).

b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}'}$.
Exprime u et v en fonction de α.

4. a) Démontre que :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2ix} + 1 = 2e^{ix}\cos x$ et $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix}\sin x$.
b) Démontre que : $\frac{u}{v} = \tan\frac{\alpha}{2}$.
c) Déduis de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.

5. On donne : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
b) Construis les points M et $r(\mathrm{M})$.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.
On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.

a) Détermine les valeurs prises par X.
b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.

3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions.

On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$.

b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0,99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

Partie A: Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. a) Calcule : $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

b) Dresse le tableau de variations de f_1.

c) Trace dans le repère (O, I, J), la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B: Étude de la fonction f_n .

1. a) Détermine, suivant la parité de n, la limite de f_n en $+\infty$.

b) Détermine, suivant la parité de n, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ (On pourraposer: $X = I - x$).

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2}(-x - 2n + 1)(1-x)^{n-1}e^{\frac{x}{2}}$.

b) Étudie, suivant la parité de n, le signe de $f_n{}'(x)$.

c) Dresse, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

4. a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.

b) Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.

c) Étudie, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

d) Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J).

<u>Partie C</u> : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0; 1]$.
2. Démontre que : $\forall x \in [0; 1], f_n(x) \in [0; 1]$.
3. Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$.
4. Détermine $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

SESSION NORMALE 2019 Série C

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $\mathrm{AB} = 3$.

On note E le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$ et G le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 4)$, (B, -1) et (D, -1).

1. a) Démontre que A est le milieu du segment [KG].

b) Justifie que: $\mathrm{GB}^2 = \frac{45}{2}$.

c) Justifie que : GB = GD.

d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$4\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 - \mathrm{MD}^2 = 9$.

2. a) Justifie que : $\mathrm{AE} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

b) Démontre que pour tout point M du plan :

$3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MD}^2 = -27 + 4\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MD}^2 = 63$.

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.

(On rappelle que : $m = 10^2 a + 10b + c$)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1; b = 2$ et $c = 1$.
2. On suppose que : $m \equiv 0[27]$.

i) Démontre que : $10^3 a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$.

ii) Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0\ [27]$.

iii) Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B

Dans cette partie on suppose que : $a > c$.

On pose : $p = \overline{cba}; u = a - c$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$.
2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.
3. On suppose que : $b = a + c$.

i) Justifie que : $m = 11(10a + c)$.

ii) Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.

4. On suppose que: $a = b + c$.

i) Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.

ii) Justifie que : $m = 110b + 101c$.

iii) Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0, b + c$ n'est pas divisible par $3; b$ et c sont premiers entre eux.

iv) Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathfrak{J})$. L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\mathrm{F}_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1. Démontre que f est une fonction impaire.
2. a) Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Détermine le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 .
5. On note g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = -x + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b) Détermine les positions relatives de $(\mathcal{E})$ et (Δ). (On pourra calculer (0)).

6. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
7. On note A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

1. a) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Démontre que F_n est une fonction impaire.

c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0; +\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$\mathrm{I}_0 = \ln(1+\sqrt{2}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n \geqslant 0$.

b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontre que la suite (I_n) est convergente.

(On ne demande pas de calculer la limite de (I_n).

d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n.$$

On remarquera que pour tout nombre réel $t, \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

On admettra que : $\mathrm{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_0$.

f) Calcule I_1 et I_2.

3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{I}_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

b) Démontre que :

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}^2} \times \frac{1}{n}(x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

c) Déduis-en la limite de $\mathrm{F}_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul $n, (\mathcal{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.

e) Construis la courbe $(\mathcal{C}_2)$ dans le plan muni du repère$(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

SESSION NORMALE 2018 Série C

EXERCICE 1

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$\mathrm{OA} = 7 \text{ et } \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}$$

E est le point du segment [OB] tel que : $\mathrm{OE} = \mathrm{OA}$.

F est le point de la demi-droite [OC) tel que : $\mathrm{CF} = \mathrm{EB}$ et $\mathrm{C} \in [\mathrm{OF}]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [OA], [AB], [BC] et [OC].

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [OA] et par (Δ') celle de [BC].

1. Fais une figure.
2. a) Justifie que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles.

b) Justifie que le triangle OAC est équilatéral.

c) Justifie que : $\mathrm{OB} = \mathrm{OF}$.

3. Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

On pose : $f = \mathrm{R}_1 \mathrm{O} \mathrm{R}_2$.

a) Détermine $f(\mathrm{O})$ et (A).

b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Déduis de ce qui précède que : $(\mathrm{EF}) \perp (\mathrm{OA})$ et $\mathrm{EF} = \mathrm{OA}$.

d) Construis le centre Ω de f.

4. a) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : $g(\mathrm{O}) = \mathrm{A}, g(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $g(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$.

b) Justifie que g est un antidéplacement.

c) Démontre que g est une symétrie glissée.

5. Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.

Soit R la rotation de centre A et d'angle -$\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

a) Démontre que : $g = $ RoS.

b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que : $R = S_{(AB)}$ o S_1.

c) Déduis de ce qui précède que : $g = \mathrm{S}_{(\mathrm{AB})}$ o $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on caractérisera.

d) En utilisant la relation $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{CJ}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}}$, détermine les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 .

1. Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose : $\mathrm{A} = n + 3$, $\mathrm{B} = 2n + 1$ et $d = \mathrm{PGCD}(\mathrm{A}; \mathrm{B})$.

a) Calcule $2\,\mathrm{A} - \mathrm{B}$ et déduis-en les valeurs possibles de d.

b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5 .

c) Soient $\mathrm{S} = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $\mathrm{P} = 2n^2 - n - 1$.

Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.

3. On pose: $\boldsymbol{\delta} = \mathrm{PGCD}(n(n + 3); 2n + 1)$.

a) Démontre que d divise δ.

b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.

c) Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d.

d) Détermine le $\mathrm{PGCD}(S; P)$ en fonction de n.

4. Détermine $\mathrm{PGCD}(\mathrm{S}; \mathrm{P})$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

PROBLÉME

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln t\right)^n$.

On note (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques : $\mathrm{OI} = 2$ cm et $\mathrm{OJ} = 0{,}5$ cm.

Partie A

1. a) Calcule la limite de g_1 en 0 .

b) Interprète graphiquement ce résultat.

2. a) Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.

b) Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

3. On suppose que g_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a) Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On admet que l'équation $t \in]0;+\infty[, g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$.

b) Justifie que l'équation $t \in]0;+\infty[, g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4{,}3 < \beta < 4{,}4$.

4. Soit t un nombre réel strictement positif.

Démontre que :

a) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$

b) $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2 .

1. a) Calcule $\lim_{t\to+\infty} g_n(t)$.

   b) Démontre que : $\lim_{t\to+\infty} \frac{g_{n(t)}}{t} = 0$ (On pourra poser : $= t^{\frac{1}{n}}$).

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. On suppose que n est pair.

a) Calcule $\lim_{t\to 0} g_n(t)$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

3. On suppose que n est impair.

a) Calcule $\lim_{t\to 0} g_n(t)$.

b) Soit t un nombre réel strictement positif.

Justifie que :

i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$;

ii) $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

(On pourra utiliser la question 4 de la partie).

4. On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou à $2, g_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on désigne par g_n sa fonction dérivée.

a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif $t, g_n'(t) = ng_1'(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

b) Étudie suivant la parité de n, le signe de g_n sur $]0;+\infty[$.

c) Dresse suivant la parité de n, le tableau de variation de g_n.

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et t un nombre réel strictement positif.

1. a) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$.

b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair.

2. Justifie que :
   a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0;\beta[$;
   b) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta;+\infty[$. (On pourra utiliser la question 3 de la partie A).
3. Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O, I, J).

On prendra : $\alpha = 2{,}35$ et $\beta = 4{,}35$.

4. Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par $(\mathrm{C}_n), (\mathrm{C}_{n+1})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul, $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)\mathrm{d}t$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_1^2 (1 - g_1(t))\mathrm{d}t$.

c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.

d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$.

SESSION NORMALE 2017 Série C

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique $\mathrm{E(Y)}$ de Y est égale à 1.

1- a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système $(S)\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système ($\mathbf{S}$).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ et $c = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2- Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3- On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; 1 et 2 .

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, 4)$.

On note $(\Gamma)l'$ ensemble des points M de la droite (D) tels que: $\mathrm{MA}^2 + 2\mathrm{MB}^2 + 4\mathrm{MC}^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(\mathrm{MA}^2 + 2\mathrm{MB}^2 + 4\mathrm{MC}^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (I).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que: $\mathrm{OI} = \mathrm{OJ}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : $\mathrm{F} = \mathrm{rot}$ et $\mathrm{G} =$ tor.

1- Fais une figure. (On prendra: $OI = 8$ cm).

2m a) Détermine $\mathrm{F(C)}$ et $\mathrm{G(B)}$.

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3- On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1}.

b) Détermine $(\mathrm{GoF}^{-1})(\mathrm{O})$, puis caractérise la transformation GoF^{-1}.

c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GoF.

4- On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2 . On pose : $S =$ hor.

a) Écris l'affixe de chacun des points A, B et C.

b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.

c) Soit g l'application complexe associée à S.

Démontre que: $\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{g}(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLEME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + \ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Partie II: Etude de la convergence de la suite (t_n).

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n; +\infty\left[\text{par:}\ \psi(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}\right.$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n; +\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1- a) Justifie que: $\forall t \in]-n;+\infty[$, $\psi'(t) = \frac{-t}{n^2\left(1+\frac{t}{n}\right)}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall t \in]-n;+\infty\left[, \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}\right.$.

2- a) En utilisant la question 1-d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x - 1$.

b) Démontre que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) \mathrm{d}x = 0$

c) Déduis des questions 2-a) et 2-b) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) \mathrm{d}x \leq 0$.

d) Justifie alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!)$$

3- a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0;1[$ par: $f(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On admet que: $\forall x \in]0;1[, f(x) \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

Partie II: Calcul de la limite de la suite (t_n).

On définit la suite (w_n) par :

1- a) Calcule w_1.

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive. On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que: $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

(On remarquera que : $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$).

d) En utilisant les questions 1-b) et 1-c) de la partie II, justifie que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$.

e) Déduis de ce qui précède $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.

2- On pose: $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim_{n\to+\infty} nw_n^2$ (On remarquera que : $w_n{}^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_n+1}$).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3- On admet dans toute la suite du problème que si une suite (a_n) converge vers ℓ alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers R.

a) Déduis de la question 2-c) de la partie II la limite de la suite (nw_{2n}^2).

(On remarquera que : $w_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2nw_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question 1-c) de la partie II, démontre par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

c) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{i_n} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{e}^{t_{2\mathrm{n}}-2t_{\mathrm{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n\mathrm{w}_{2\mathrm{n}}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n).

SESSION NORMALE 2016 Série C

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n) - n\ln(n)}{n}.$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2- a) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq \mathrm{k} \leq n-1$,

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de $\ln(x)$ sur l'intervalle $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$.)

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$.

3- Sachant que $\int_1^2 \ln(x)dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.L'unité graphique est 2 cm.

1- On note ($\mathcal{E}$) l'ensemble des points M du plan d'affixe $\mathrm{z}(\mathrm{z} = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2)$ tels que :
$14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$.
Démontrer que M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si :
$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- a) Justifier que $(\mathcal{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.

b) Préciser les coordonnées de Ω.

c) Déterminer une équation de l'axe focal de $(\mathcal{C})$.

d) On note A, A', F et F ' les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i, \frac{2\sqrt{3}}{3} + i, -\frac{\sqrt{3}}{3} + i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que A et A' sont les sommets de ($\mathcal{C}'$) situés sur son axe focal.
Justifier que F et F ' sont les foyers de $(\mathcal{C})$.

3- Construire l'ellipse $(\mathcal{C})$.

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F '.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :
$3x^2 - y^2 = 1$

b) Tracer les asymptotes de (H).

c) Construire (H).

PROBLÈME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.
On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|$$

1- a) Calculer la limite de f en 0 .

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}; 0\right[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, f(x) < 0;$
$\forall x \in]\alpha; +\infty[,\ f(x) > 0.$

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \dfrac{31}{16}x^2 - \dfrac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- a) Démontrer que h est dérivable en 0 .

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Démontrer en utilisant $A-3)$ que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0;$$
$$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[,\ h'(x) < 0.$$

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Tracer la tangente (Γ) en son point d'abscisse 0 .

b) Construire la courbe (Γ). (On prendra $\alpha = 3{,}6$.)

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda$$

b) On note $f(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(0, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right) \mathrm{cm}^2$$

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle $[3; 4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3; 4]$.

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0; +\infty[, \mathrm{g}(x) = x$.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n, (u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de $[3; 4]$ on a: $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

SESSION NORMALE 2015 Série C

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5000 F.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la Mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des deux tickets tirés est gagnant alors le client stationne à 1000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.
2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$.
3. Calculer la probabilité de payer au moins 1000 F pour le stationnement.

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. a) Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois.

b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0{,}99$.

2. Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ?

Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i; \sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$.

1. a) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_{A} et z_{B} sont les affixes respectives des points A et B.

b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

2. On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

On pose : $f =$ tor.

a) Déterminer l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f.

Partie II

1. Soit M un point du plan d'affixe z. On pose : $z = x + iy$, où x et y des nombres réels.

On note H le point d'affixe $x + 3i$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2|z| = |y - 3|$.

a) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée.

c) Démontrer que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.

a) Démontrer que (Γ ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLÉME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(e^{-x^2} - 1\right)\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{E})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie A

On considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0; +\infty[$par :

$h(x) = \ln x + e^x + 1$ et $g(x) = x\ln x + e^x - 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que: $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = h(x)$.
3. a) Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

4. a) Démontrer que l'équation : $x \in]0; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique β.

b) Justifier que : $\beta \in]0{,}3; 0{,}4[$.

c) Démontrer que :

$\forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0; \forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0 .
2. Justifier que f est dérivable en 0 .
3. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions) et b).

4. On admet que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty\left[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x}\right. g(x^2)$.

b) Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (8) au point d'abscisse 1 .

b) Tracer (8) et (T) dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. On prendra $\beta = 0{,}31$.

Partie C

1. Sachant que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x} \geq 1 + x$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, -1 \leq -\mathrm{e}^{-x} \leq -1 + x$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty\Big[, 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

On pose :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I_n}(t)$.

b) Démontrer que :

$\forall t \in]0; 1], -\mathrm{I}_2(t) + \frac{1}{2}\mathrm{I}_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -\mathrm{I}_2(t)$.

3. On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de S.

b) On admet que : $\lim_{t \to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$.

Déterminer un encadrement de S.

SESSION NORMALE 2014 Série C

EXERCICE 1

I.

1- Démontrer qu'il existe un couple $(a;b)$ d'entiers relatifs tel que : $45a - 16b = 1$.

2- Soit l'équation (E) : $45x - 16y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier que le couple $(10;28)$ est une solution particulière de (E).

II.

b) Résoudre (E).

Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.

Le navire A accoste un jour J_0 au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour.

On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1- Soient u et v le nombre d'entrées au port effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

Démontrer que le couple $(u;v)$ est une solution de (E).

2- Déterminer le couple $(u;v)$.

3- Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{2}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{6}$.

I.

1- On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.

a) Faire une figure en prenant $\mathrm{AC} = 7$. (On completera la figure au fur et à mesure.)

b) Justifier que S n'est pas une translation.

c) Justifier que l'angle de la similitude directe S est $-\frac{\pi}{2}$.

d) Déterminer le rapport de S.

2- On note Ω le centre de S.

a) Démontrer que Ω appartient aux cercles $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}\quad)$ de diamètres respectifs [AB] et [AC].

b) Justifier que Ω est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

3- Soit (Δ) une droite passant par A et ne passant pas par Ω.

(D) est la perpendiculaire à (Δ) passant par C. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (Δ).

a) Déterminer les images respectives de (D) et (Δ) par S.

b) En déduire l'image du point C ' par S.

c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par un point fixe lorsque la droite (Δ) varie. Préciser ce point fixe.

II.

1- Placer le point I de la demi-droite $[\mathrm{AC})$ tel que : $\mathrm{AB} = \mathrm{AI}$.

2- Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$.

a) Démontrer que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$.

b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S.

Justifier que : $z' = -i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i$.

c) Déterminer l'affixe du centre Ω de S.

3- a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.

b) Tracer (Γ).

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est égale à 2 cm.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = x^2(1-2\ln x)$, si $x > 0$

$f(0) = 0$

On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1- Démontrer que f est continue en 0 .

2- Justifier que la courbe ($\mathcal{C}$) admet en son point d'abscisse 0 , une tangente horizontale.

3- a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats de la question 3-a).

4- a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $]0;+\infty[, f'(x) = -4x\ln x$.

b) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

c) Calculer $(\sqrt{e}\ )$ et justifier que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, \sqrt{e}], 0 \leq f(x) \leq 1 \\ \forall x \in]\sqrt{e}, +\infty[, f(x) < 0 \end{cases}$$

5- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{\odot})$ en son point d'abscisse $\sqrt{e}$.

b) Tracer (T) et ($\mathcal{C}$).

Partie B

a est un élément de $]0;\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e};+\infty[$ et x est un nombre réel strictement positif.

On pose : $\mathrm{S} = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

1- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $S = \frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2\ln x\right) - \frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2\ln a\right)$.

2. On note $A^{\circ}(a)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par ($\odot_C$) et les droites d'équations : $y = 0, x = a$ et $x = \sqrt{e}$.

a) Démontrer que : $A(a) = \left(4\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{cm}^2$.

(On distinguera les cas $a < \sqrt{e}$ et $> \sqrt{e}$)

b) On suppose dans cette question que $a < \sqrt{\mathrm{e}}$.

Calculer la limite de $\mathcal{A}^{(a)}$ lorsque a tend vers 0 . (On admettra que cette limite est l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe ($^{\varrho}$) et les droites d'équations $x = 0, x = \sqrt{e}$ et $y = 0$.)

c) On suppose dans cette question que $a > \sqrt{e}$.

Déterminer la valeur de a pour laquelle $t(a) = \left(\frac{8}{9}e\sqrt{e}\right)\mathrm{cm}^2$.

3- Déduire de ce qui précède que l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à : $\frac{16}{9}e\sqrt{e}$.

Partie C

n est un entier naturel.

Soit f_n la fonction dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(n-2\ln x)e^{\frac{1-n}{2}} \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$ si $x > 0$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1- Démontrer que $(\mathcal{C}_n)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$ On remarquera que : $(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}^2)$.

2- a) Construire la courbe ($\mathcal{C}_2$) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et e.

b) Déterminer en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_2)$, les droites (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = e$.

3- Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C}_2)$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{4}{3}}$.

EXERCICE 1 (5 points)

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1 . On considère la fonction f dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$.

On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1- On suppose que : $0 < a < 1$.

a) Démontrer par récurrence que :

i) pour tout n élément de $\mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$;

ii) la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

2- On suppose que : $a > 1$.

Soit la suite (v_n) définie par :

$v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = d^n.$$

c) On pose : $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots .. + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier que : $S_n = \frac{1-d^n}{1-a}$

d) En déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{S_n}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1; 0)$ et $I(4; 0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1- a) Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

2. a) Démonter qu'une équation de (E) dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b) Construire (E).

3- On considère l'équation :

$(E_\alpha): z \in \mathbb{C}, z^2 - 2(4 + 5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0$ avec $\alpha \in [0; \pi]$.

a) Justifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = (6i\sin\alpha)^2$.

b) Résoudre l'équation (E_α).

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0; \pi]$.

PROBLEME (10 points)

Partie A.

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unités : $OI = 2$ cm et $J = 4$ cm.
I- Soit la fonction u dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
1- Calculer $\lim_{x\to 0} u(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} u(x)$.
2- a) Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
b) Démontrer que l'équation :
(E) : $x \in]0; +\infty[$, $u(x) = 0$ admet une solution unique α.
c) Démontrer que : $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$.
II-
d) Justifier que : $\begin{cases} \text{si } x \in]0, \alpha[\text{ alors } u(x) > 0 \\ \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\text{ alors } u(x) \leq 0 \end{cases}$.
1- Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
2- a) Démontrer que pour tout x élément de $]0; +\infty\Big[, f'(-x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$.
b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$
c) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.
3- a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ( ) et $(OI$.
b) Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$.
4- Tracer (C) dans le plan muni du repère $(O; I, J)$.
Partie B.
On note F la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.
1- a) Déterminer le signe de F sur $]0; +\infty[$.
b) Calculer $F'(x)$ pour tout nombre réel x elément de $]0; +\infty[$.
2- On note φ la bijection réciproque de la fonction tangente sur $\Big[0; \frac{\pi}{2}[$.
a) Démontrer que pour tout x élément de $\Big[0; +\infty\Big[, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
b) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty], h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$. Démontrer que h est continue en 0 .
3- a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$\forall x \in]0; +\infty\Big[, \ F(x) = \varphi(x)\ln x - \int_I^x h(t)dt.$$
b) En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que : $\lim_{x\to 0} \varphi(x) \ln x = 0$.
4- On admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que : $\forall x \in]0; +\infty\Big[, \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)$. Soit G le prolongement par continuité de F en 0 . On pose $\mathrm{G}(0) = \ell (\ell \in \mathbb{R})$.
G est définie par : $\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, G(x) = F(x) \\ G(0) = \ell \end{cases}$.
On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O; I, J)$.
a) Démontrer que : $\lim_{x\to +\infty} G(x) = \ell$.
b) Étudier les variations de G sur $[0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
5- On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{\mathrm{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$
On admet que : $|\ell - v_n| < \frac{1}{(2n+3)^2}$
a) Justifier que : $v_2 = \frac{209}{225}$
b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(2n+3)^2} < 25.10^{-3}$.
c) En déduire une valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près.
d) Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O, I, J).

SESSION NORMALE 2012 Série C

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 F CFA pour les hommes et de 700 F CFA pour les femmes.
Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 20000 F CFA.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

1. On considère l'équation (E): $(x; y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.

a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Démontrer que $2x \equiv 1[7]$.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 1[7]$.
c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Résoudre l'équation (E ') : $(x; y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.
3. En déduire le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 2$ cm.
K est le point de coordonnées $(-1; 0)$.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ vérifiant:
$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

1. Justifier que (Γ) est une ellipse.
2. On note :

- F' et F les foyers de (Γ);
- A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

L'abscisse de A' est négative. B ' et B sont les autres sommets de l'ellipse.
a) Justifier que les coordonnées respectives de F et F' dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont $(0;$ 0) et $(-2; 0)$.
b) Déterminer les coordonnées de A', A, B et B' dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

3. Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N.
b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe S de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.
c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points P lorsque M décrit (Γ).
4. z est l'affixe d'un point quelconque du plan et z ' l'affixe du point M' l'image de M par S.
a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = (1 - i)z - i$;
b) On note G' et G les images respectives par S des foyers F' et F de (Γ).
Déterminer les coordonnées des points G ' et G dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
c) Démontrer qu'une équation de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :
$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$.

PROBLEME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel r_1 non nul, par : $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PARTIE A

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$.

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
Unité graphique : 2 cm

1. a) Démontrer que la droite (OJ) est un asymptote à la courbe (c).

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ces résultats.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Construire (c) dans le repère (O, I, J).

PARTIE B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(t) dt$.
2. On pose $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t) dt$.

a) Interpréter graphiquement A_n.
b) Vérifier que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$
c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} A_n$.
3.a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$.
Démontrer que: $\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a: $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
b) En déduire que:

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

4. On pose: $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

a) Démontrer que: $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.
b) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

PARTIE C

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul $n, \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$
b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}$.
c) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$
3.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

SESSION NORMALE 2011 Série C

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.
A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.
1- Calculer les coordonnées $(x';y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ du point $\mathbf{M}$.
2- a) Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.
b) Préciser dans le repère ($O;\vec{e_1},\vec{e_2}$), les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).
c) Construire (H).
3- Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2}-2i$.
Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $O'M'P$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 20 heures précises.
La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un jour à l'autre.
Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
- S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.
1- a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{10;10{,}5;11;11{,}5;12\}$.
b) Justifier que $P(X=11)=\frac{5}{16}$.
c) Déterminer la loi de probabilité de X.
2- Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.
3- Le livreur part à 19 h49 min de la boulangerie.
a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.
b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.
4- Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.
a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.
b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.
Soit k un nombre réel non nul.
On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f_k(x) = (2x+4k)e^{-\frac{x}{2k}} - x$$

On note ($\mathcal{E}_k$) la courbe représentative de la fonction f_k.
Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k, de construire la courbe ($\mathcal{Z}_1$) et de donner un programme de construction de la courbe ($\mathcal{B}_k$) pour k différent de 1 .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$.
1- Etudier le sens de variations de h.
2- Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
3- a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0{,}71 < \alpha < -0{,}70$
b) En déduire que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, h(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0$.

Partie B : Étude de la fonction f_I.

Pour tout nombre réel x: $f_1(x) = (2x + 4)e^{-\frac{x}{2}} - x$.
1- a) Démontrer que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.
b) En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1 .
2- a) Pour tout réel x, calculer $f_1'(x)$ et démontrer que $f_1'(x) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.
b) En déduire les variations de f_1.
3- a) Calculer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$, puis la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$.
Interpréter graphiquement ces résultats.
b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.
c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à ($\mathcal{E}_1$) en $+\infty$.
4 a) Dresser le tableau de variation de f_1.
b) Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_1)$ dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
5- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :

$$I(x) = \int_0^x (2t + 4)e^{\frac{-t}{2}} dt$$

b) En déduire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie du plan limitée par :

- la courbe $(\mathcal{Z}_1)$;
- la droite (D) ;
- la droite (OI) et la droite d'équation $x = 2$.

Partie C : Étude de la fonction f_k.

1- a) Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f_k'(x) = -h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$$

b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k.
c) Vérifier que $f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)$.
d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k.
(On ne demande pas de calculer les limites de f_k)
2- a) Démontrer que ($\mathcal{E}_k$) est l'image de $(\mathcal{E}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.
b) En déduire la construction de $\left(\mathcal{E}_{-\frac{1}{2}}\right)$ dans le même repère que $(\mathcal{Z}_1)$.
3- On note $\mathcal{A}_k$ l'aire de la partie du plan limitée par :

- la courbe $(\mathcal{E}_k)$
- la droite (D) ;
- la droite (OI) et la droite d'équation $x = 2k$.

Déterminer en $\mathrm{cm}^2 \mathcal{A}_k$ en fonction de k.

SESSION NORMALE 2010 Série C

EXERCICE 1 :

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel non nul $n, \mathrm{U}_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) U_n$.

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t \qquad (1)$$

Soit f la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \ln\left(1 + e^{-\lambda}\right)$.

1- En utilisant l'inégalité (1), justifier que :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

2- Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3- Démontrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4- On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a) À l'aide des questions 1) et 3), démontrer que :

$$a_n - \frac{1}{2} b_n < \ln(\mathrm{U}_n) < a_n.$$

b) Justifier que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$.

c) Démontrer que la suite (U_n) est majorée.

En déduire que la suite (U_n) est convergente.

d) On note ℓ la limite de la suite (U_n).

Démontrer que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln \ell \leq \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approchée de ℓ à 0,1 près.

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1- Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.

2- Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale' à 6.

3- Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$.

4- Le droit de participation au jeu est de 3000 francs.

- si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
- s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs;
- s’il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable?

PROBLÉME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) \text{ et } g(x) = \frac{1}{3}\left(-5x - 4\sqrt{x^2+15}\right)$$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g.

1- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Justifier que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ).
Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') d'équation $\mathrm{y} = -3\mathrm{x}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ').
2- a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.
3- Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (OI) et (OJ).
4- a) Construire $(\Delta), (\Delta')$ et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(O, 1, J$.
b) Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O.
c) Construire la courbe (C') dans le même repère que (C).

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F ', de sommets A et A' par une similitude directe s, est une hyperbole (H') de foyer $\mathrm{s}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{s}(\mathrm{F}')$, de sommets $\mathrm{s}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{s}(\mathrm{A}')$.
On note (H) la courbe d'équation : $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$.
1- Démontrer que $(\mathrm{H}) = (\mathrm{C}) \cup (\mathrm{C}')$.
2- Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Soit x, x', y et y' des nombres réels. Pour tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on note M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $M' = s(\mathrm{M})$.
a) Déterminer l'écriture complexe de s.
b) Justifier que $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-x + y)$.
c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x^2 - y^2 = 20$.
3- a) Justifier que (Γ) est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.
b) Déterminer l'excentricité de (Γ).
c) Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H). (On utilisera deux couleurs differentes pour (H) et (Γ)).
4- Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

SESSION NORMALE 2009 Série C

EXERCICE 1

On pose: $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Partie A

1. Exprimer a^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2. En déduire une solution de l'équation $(\mathrm{E}): z \in \mathbb{C}, z^6 = -8\mathrm{i}$.
3. Soit $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que $j^3 = 1$

b) Démontrer que jb et $\mathrm{j}^2\ \mathrm{b}$ sont aussi des solutions de (E).

c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$$

2. Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel
- b^n est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

OAB est un triangle rectangle isocèle en O tel que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$, par (C) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

Le point D est l'intersection du cercle (C) et de la demi-droite [IO).

On note J le point d'intersection de la demi-droite [DB) et du cercle (Γ).

1. a. Faire une figure.

b. Justifier que $\mathrm{Mes}(\overline{\overline{DA}, \overline{DB}}) = \frac{\pi}{4}$.

c. Démontrer que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct. Démontrer que la droite (OJ) est la médiatrice du segment [AD].

2. Soit S la similitude directe de centre A telle que $S(I) = 0$.

a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

b. Soit H le milieu du segment [JA] et K le point d'intersection de la droite (OJ) avec la droite (AD). Démontrer que $S(H) = K$

c. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overline{\overline{KI}, \overline{KJ}}$

3. Déterminer l'image du cercle (Γ) par S.

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$

(C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0; +\propto[$ et définie par : $u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$

1. Etudier les variations de $\mathcal{U}$.
2. Justifier que: $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) > 0$

Partie B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\propto$.

3. a. Vérifier que: $\forall x \in]0; +\infty\Big[, f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α tel que $1 < \alpha < e$.

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

5. a. Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

b. Donner les coordonnées du point A.

a. Etudier la position relative de (D) par rapport à (C).

b. Construire (T), (D) et (C).

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par: $a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$

1. a. Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1

b. Interpréter graphiquement le nombre a_n.

c. Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite (a_n).

2. Justifier que: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2$.

SESSION NORMALE 2008 Série C

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A;1),(B;1)$ et $(C;$ -1$)$. Pour la figure prendre comme unité de longueur le centimètre et $AB=6$. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrer que le quadrilatère $ACBG$ est un losange.
2. a) On appelle O le centre du losange$ACBG$. E est le symétrique de O par rapport à B. Le point F est limage de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Construire les points E et F.
   b) Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
3. On note : $t=t_{\overrightarrow{BE}}\circ t_{\overrightarrow{CB}}$
   a) Déterminer les images des points A et C part.
   b) K est l'image de B par t. Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.
   c) Déterminer l'image du triangle ABC par t.
4. On note: $f=t\circ s_{(\mathrm{OC})}$, où $s_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).
   a) Déterminer l'image du triangle ABC par f.
   b) Démontrer que f est une symétrie glissée.
   c) Soit $s_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF). Démontrer que: $s_{(\mathrm{OC})}=t_{\overrightarrow{EO}}\circ s_{(BF)}$
   d) En déduire les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) définie par : $(x,y)\in\mathbb{Z}^2, 35x-27y=2$.

1. a) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de 35 et 27.
   b) En déduire une solution de l'équation $(E'):(x,y)\in\mathbb{Z}^2, 35x-27y=1$.
2. a) Vérifier que $(-20,-26)$ est une solution de (E).
   b) Démontrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) d'entiers relatifs vérifiant:
   $x=27k-20$ et $y=35k-26$ ou k est un entier relatif.

Les habitants d'un village adorent deux génies protecteurs N'Gouan et Moayé. Le génie N'Gouan est adoré tous les 140 jours et le génie Moayé tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme des jours de grâce appelés "jour des génies"

Un matin, le village a adoré le génie Moayé.

Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain a jour des génies " sachant qu'ils avaient adoré le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

PROBLEME

On considère la fonction f, dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=-1+x\ln x$ si $x\neq 0$ et et $f(0)=-1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,1,J)$. L'unité graphique est $5\ \mathrm{cm}$.

Partie A

1. a) Justifier que f est continue 0 .
   b) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}$. Interpréter graphiquement le resuitat.
2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8 . Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de s.
   b) Justifier que :

$$\forall x\in[0;s[, f(x)<0;$$
$$\forall x\in]s;+\infty\{, f(x)>0.$$

4. a) Justifier que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.
   b) Tracer (C).
   c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de s l'intégrale $I = \int_1^s f(x)dx$.
   d) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} prés de l'aire a 4 s) en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = s$.

Partie *B*

On considère la fonction g, dérivabie sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{1+x}{1+\ln x}$.

1. a) Démontrer que: $\forall x \in]\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[, g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.
   b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x$ et leur valeur.
2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty\left[, g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}\right.$.
   b) Justifier que g est strictement croissante sur l'intervalle $[s, 2]$.
3. Démontrer que : $g([s, 2]) \subset [s, 2]$.
4. a) Démontrer que : $\forall x \in \left[1, +\infty\right[\frac{1}{(1+\ln x)^2} \leqslant 1$
   b) Démontrer que pour tout réel x élément de $[5{,}2], \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{2}{3}f(2)$
   En déduire que: $\forall x \in [s, 2], |g'(x)| \leqslant 0{,}3$.

On considère la suite $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définie par : $U_s = 2$ et, pour entier naturel $n, U_{n+1} = g\{U_n\}$.

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n, U_n \in [s, 2]$.
6. a) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - s| < 0{,}3 \times |U_n - s|$.
   b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - s| < \frac{(0{,}3)^n}{2}$.
7. a) Justifier que U_n converge vers s.
   b) A partir de quelle valeur de n, U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près ?

SESSION NORMALE 2007 Série C

EXERCICE 1

Dans une ville de Côte d'Ivoire, un sondage a permis de constater que 30% de la population sont gauchers et que 70% sont droitiers.

(Les résultats seront des arrondis d'ordre 4).

1. Justifier que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025 .
2. Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 3 personnes choisies au hasard dans cette ville contienne:

a. exactement 2 gauchers;

b. au moins un gaucher.

3. Un atelier de couture de cette ville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitiers et de 2 paires de ciseaux pour gauchers. Cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Justifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est égale à 0,0007 .

c. Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 6 .

EXERCICE 2

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que $\mathrm{AB}=5\ \mathrm{cm}$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}$

Soit E le milieu du segment [AC].

1. a. Construire le triangle ABC.

b. Démontrer qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

c. Déterminer l'angle de la rotation r.

d. Construire son centre O.

2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.

Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Démontrer que $S(A)=J$.

3. Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'}=k\overrightarrow{EC}$

a. Construire les points M et M' pour $k=\frac{3}{2}$

b. Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs ($k-1$) et (-k).

c. Démontrer que $r(M)=M'$ et en déduire que le triangle OMM ' est équilatéral.

d. Démontrer que les points O, A, M et M ' sont cocycliques.

4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a. Démontrer que $S(M)=N$.

b. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

PROBLEME

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathrm{I};\mathrm{J})$. Unité graphique $2\ \mathrm{cm}$.

Partie A

1. Calculer les limites de f en -1 et en 1 .

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Démontrer que : $\forall x\in]-1;1\left[, f'(x)=\frac{1}{1-x^2}\right.$

b. En déduire le tableau de variation de f.
c. Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $g(x) = f(x) - x$

a. Déterminer le sens de variation de g.
b. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
c. Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

4. Construire, dans le même repère, (C) et (T).
5. a. Démontrer que f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$.

b. On désigne par f^{-1}, la bijection réciproque de f et par (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, 1, J)$. Construire (C').
c. Démontrer que: $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

Partie B

1. Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à déterminer $\phi(x)$),

a. Démontrer que $\phi \circ f$. est une primitive de la fonction $x \mapsto xf'(x)$ sur $]-1;1[$.
b. Démontrer que pour tous éléments a et b de $]-1;1[$, $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi \circ f(b) - \phi \circ f(a)$
c. En déduire que : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_{a}^{b} tf'(t)dt$
d. Démontrer que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[: \int_{0}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_{0}^{x} tf'(t)dt$ (On pourra utiliser B1. c)

2. a. Démontrer que pour tout élément x de $\left]-1;1\right[: \int_{0}^{x} tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ (On pourra utiliser A2. a)

b. En déduire que, pour tout élément y de $\mathbb{R}, \int_{0}^{y} f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par: la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. Calculer A en unité d'aire.
4. a. Hachurer sur le graphique, l'ensemble D des points dont les cordonnées (x, y) vérifient

: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ et $f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$
b. Calculer l'aire de D en Cm^2.

SESSION NORMALE 2006 Série C

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On pose:

$$A = n^2 - 2n + 2; B = n^2 + 2n + 2 \text{ et } d = \text{pgcd}(A, B)$$

1. a. Démontrer que tout diviseur commun à A et n divise 2 .

b. Démontrer que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.

2. On suppose que n est impair.

a. Démontrer que A et B sont impairs.
En déduire que d est impair.
b. Démontrer que d divise n.
En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

3. On suppose que n est pair.

a. Démontrer que 4 ne divise pas A.
b. Démontrer que d est égal à $2p$ où p est un nombre entier impair.
c. Démontrer que p divise n. En déduire que d est égal à 2 .

4. Déduire de ce qui précède que 197 et 257 sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

On considère quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques sont non alignés.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$.
2. On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme.

Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que
$MA - MB + MC\vec{C} \| = BD$.

3. On suppose que $ABCD$ est un rectangle.

a. Démontrer que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$
b. Déterminer puis construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que:

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$$

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{e^{U_n}}{e^{U_n} + (\ln|U_n|)^2}, \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

converge vers 1 .

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}_{\text{par :}}$ $g(x) = \ln|x| - \frac{x}{2}$

1. a. Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$

b. En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.
(On ne calculera pas les limites).

2. a. Démontrer que l'équation $x \in$
appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

b. Démontrer que: $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; \alpha[, & g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}_{\text{par:}}$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\text{O}, \text{I}, \text{J})$.
(L'unité graphique est 4 cm)

1. a. Étudier la continuité de f en 0 .

b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2. a. Étudier la dérivabilité de f en 0 .

En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.

b. Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que.

$$f'(x)=\frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2} \text{ avec } \varphi(x)=e^x\ln|x|$$

c. Démontrer que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 \leq f(\alpha) \leq 1$. d. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tabiedu de variation de f.

3. Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.
4. Tracer la droite d'équation $y=x$ et la courbe (C).

PARTIE C

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

1. Vérifier que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}=f(U_n)$
2. A l'aide de la courbe (C), représenter U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sur l'axe des abscisses.
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n, U_n \in [0;1]$
4. a. Démontrer par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b. Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c. Démontrer que la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1 .

(On pourra utiliser les variations de f sur $[0;1]$).

SESSION NORMALE 2005 Série C

EXERCICE 1

L'unité graphique est le centimètre.

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$.

G_1 est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$.

G_2 est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3)$.

1. a. Construire les points G_1 et G_2.

b. Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

c. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;

D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D.

a. Construire les points C et D.

b. Calculer le rapport de S.

c. Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.

3. On note Ω le centre de S.

a. Démontrer que Ω appartient à (Γ) et (E). Placer Ω.

b. Démontrer que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

c. En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle (C). Construire(C').

EXERCICE 2

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7

Les tirs sont supposés indépendants.

Tous les résultats demandés seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Le tireur effectue cinq tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible:

a. cinq fois?

b. exactement deux fois ?

c. au moins une fois?

2. II tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est égale à $1 - 0,3^n$
3. Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,995 ?

PROBLEME

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \frac{x}{1+xe^x}$.

On désigne par ('C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Partie I: Etude de f

1. Soit ψ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\psi(x) = 1 + xe^x$.

Etudier les variations de ψ puis dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites).

b. Démontrer que pour tout nombre réel $x, \psi(x) > 0$.

c. En déduire l'ensemble de définition de f.

2. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $\varphi(x) = 1 - x^2e^x$

a. Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71 .

d. En déduire : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, \ \varphi(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, \ \varphi(x) < 0 \end{cases}$

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+xe^{x})^2}$.

b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Soit (D) la droite d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$.

a. Démontrer que (D) est asymptote à (C') en $-\infty$.

b. Etudier la position de ((C) par rapport à (D). (On pourra utiliser la question I.1.b).

c. Démontrer que la droite (D) est tangente à (( ) au point d'abscisse 0 .

d. Tracer (D) et (Y') dans la fenêtre définie par :

$X_{\text{min}} = -4{,}5 \quad ; \quad X_{\text{max}} = 4$

$Y_{\text{min}} = -5 \quad ; \quad Y_{\text{max}} = 0{,}4.$

On prendra: $\mathrm{OI} = 2 \text{ cm}; \mathrm{OJ} = 5 \text{ cm}$ et $\alpha = 0{,}7$.

Partie IX: Etude d'une suite

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^t \frac{t^{\mathrm{n}}}{1+\mathrm{te}^{\mathrm{t}}} \mathrm{dt}$.

1. a. Sans calculer I_1, en donner une interprétation graphique.

b. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. a. Démontrer que : $\forall t \in [0; 1], \frac{1}{1+\mathrm{c}} \leq \frac{1}{1+\mathrm{te}^{\mathrm{t}}} \leq 1$.

(On pourra utiliser les variations de ψ sur $[0; 1]$).

b. En déduire que pour tout entier naturel $n, \frac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.

c. Déterminer la limite de $(I_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$.

SESSION NORMALE 2004 Série C

EXERCICE 1

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J) on considère les points A, B et C d'affixes respectives $-i, 8+5i$ et $8-5i$

1. Placer les points A, B et C.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.
3. Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, -1)$, (B, 1} et ($C, -1$).
4. Démontrer que : $\mathrm{GA} = \mathrm{GC}$
5. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20$.

a. Démontrer que A et C appartiennent à Γ.
b. Démontrer que Γ est le cercle de centre G et de rayon GA
c. On appelle Γ' le symétrique de Γ par rapport à (AC). Construire Γ''
(Choisir une unité appropriée).

EXERCICE 2

Lors d'une kermesse on organise un jeu d'adresse dénommé « jeu du triangle » qui a pour support trois petits T_1, T_2, T_3 creusès dans le sol et formant un triangle équilatéral.
Pour engager une partie, le joueur achète trois billes à l'organisateur.
Il prend position au trou T_1 et lance une bille en vue de la loger dans le trou T_2
I| fait ensuite un deuxième lancer à partir du trou T_2 en visant le trou T_3 puis un troisième et dernier lancer à partir du trou T_3 en visant T_1
A chacun de ces trois lancers, si le joueur réussit à loger la bile dans le trou visé, il la reprend et il reçoit une bile supplémentaire; s'il ne réussit pas à loger la bille dans le trou visé, il la perd.
Konaté est un inconditionnel du jeu triangle.
La probabilité pour qu'il réussisse un lancer donné est égale à $\frac{2}{3}$.
On suppose que les trois lancers sont indépendants.

1. Démontrer que la probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$.
2. Calculer la probabilité pour que Konaté réussisse deux sur les trois.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billes que Konaté à la fin de la partie Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
4. Calculer la loi de probabilité X.
5. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 4 .

PROBLEME

On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = e^{-nx^2}$
On désigne par $(\mathcal{Y}_n)$ la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repèr orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 5 cm).
Dans tout le problème, les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble définition.
Partie A

1. Calculer $f_n(0)$ et la limite de f_n en $+\infty$
2. Calculer $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n.
3. Encadrer $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs.
4. Démontrer que la dérivée seconde f_n " de f_n s'annule pour une unique vale positive a_n égale à $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Soit A_n le point de (') d'abscisse a_n.

a. Démontrer qu'une équation de la tangente T_n à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point d'absciss a_n est :
$y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$.
b. Démontrer que toutes les droites T_n passent par un point fixe dont on donnera coordonnées.

6. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{c}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

a. Calculer ha_n
b. Utiliser la dérivée seconde de h pour trouver le signe de $h'(x)$ et dresser le tableau de variation de h.
c. En déduire la position de (ζ_n) par rapport à T_n.

7. Construire (Υ_1) et (Ψ_3).

partie B

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Etudier le sens de variation de la suite U_n.
2. Démontrer que la suite U_n est convergente.

Dans la suite de l'énoncé, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. Démontrer que : $\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2}dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$.
4. Démontrer que: $\forall x \in \left[\frac{1}{\ln(n)}; 1\right]$, $0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.
5. Démontrer que : $0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^1 e^{-nx^2}dx \leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.
6. Calculer la limite de la suite U_n.

SESSION NORMALE 2003 Série C

EXERCICE 1

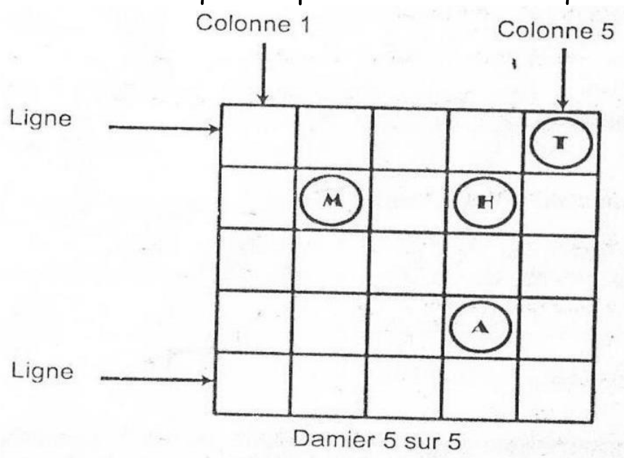
On dispose d'un damier de 5 cases sur 5 placé dans une position fixe.
On place au hasard sur ce damier 4 jetons portant les lettres du mot AMH (voir figure ci-dessous).
Les jetons sont posés sur des cases différentes.
(Les résultats des calculs seront donnés sous forme de fractions irréductibles).

1. Justifier que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303600 .
2. a. Calculer la probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.

b. Calculer la probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne. (On convient que la lecture se fait de gauche à droite sur une ligne, do bas en haut sur une colonne et que deux lettres consécutives du mot MATH peuvent être séparés par un espace).

3. Démontrer que la probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne est égale à $\frac{125}{506}$.
4. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne.

a. Etablir la loi de probabilité de X.
b. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8 .



EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle isocèle ABC tel que: $AB = AC$ el
$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$.
Soit I le point du plan tel que le triangle CAI est isocèle rectangle en C et
$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}}) = -\frac{\pi}{2}$

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra $= 5\ \mathrm{cm}$.
2. On appelle r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_C la notation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images respectives des points A et B par f.
b. Démontrer que f est une rotation et préciser son angle.

3. Démontrer que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{2}$.
4. On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

a. Démontrer que le quadrilatère $ABOC$ est un losange.
b. Démontrer que O appartient à la médiatrice du segment [AI].

5. Démontrer que O est le centre de la rotation$f$.
6.

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur et définir par $f(x) = (1-x)e^{-2x+4}$.
Soit la courbe représentative dans le repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

L'unité graphique est 2 cm.

Le but du problème est la recherche d'une valeur approché d'une solution de l'équation $f(x) = -1$.

I. Etude de la fonction f

1. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]1; \frac{5}{4}\right[$

c. Démontrer que : $\alpha = 1 + e^{2\alpha-4}$

3. Soient, at B les points de Γ d'abscisses respectives 1 et 2 .

a. Donner une équation de la tangente (D) à Γ en B.

b. Tracer (D) et Γ sur l'intervalle $[0{,}5; +\infty[$.

4. Soit F la fonction définie sur par $\mathrm{F}(x) = \int_1^x \mathrm{f(t)dt}$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $F(x) = \frac{2x-1}{4} e^{-2x+4} - \frac{c^2}{4}$.

b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$ et Γ.

II. Recherche d'une valeur approchée de α**.**

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = e^{2x-4} + 1$.

On note I l'intervalle $\left[1; \frac{5}{4}\right]$.

1. a. Calculer $g'(x)$ et préciser le sens de variation de g.

b. Démontrer que $g(I) \subset I$.

c. Démontrer que pour tout élément x de I, on a : $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

(On pourra étudier le sens de variation de g' sur I.)

d. En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question 1.2.c), que pour tout élément x de I, on a: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

2. On considère la suite $\mathcal{U}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $\mathrm{n}, \mathcal{U}_n$ est élément de I.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b. En déduire que la suite $\mathcal{U}$ est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

4. Déterminer n pour que $\mathcal{U}_n$ soit une valeur approchée de α au centimètre près.

SESSION NORMALE 2002 Série C

EXERCICE 1.

1. DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que la distance DE est égale à 4 cm.

K désigne le milieu du segment $[EF]$ et G le point défini par: $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$.

a. Faire une figure.

b. Démontrer que G est le barycentre des points pondérés ($D, 2$), ($E, -1$) et ($F, 1$).

c. Démontrer que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.

d. En déduire que $\mathrm{GF} = 2\sqrt{5}$.

e. Démontrer que le triangle GEF est isocèle en G.

2. On note $(\mathcal{C})$, l'ensemble des points M du plan tels que: $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$.

a. Vérifier que E et F sont des éléments de $(\mathcal{C})$.

b. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$.

c. Construire l'ensemble $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 2

1. Déterminer suivant les valeurs du nombre entier naturel n, les restes respectifs dans la division euclidienne de 11 des nombres entiers naturels 5^n et 3^n.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n - 3^n$ soit divisible par 11 .

PROBLEME

Le plan est muni du repère $(O, 1, J)$; l'unité graphique est 4 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

On note (Γ) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les limites de f en -m et en to.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Justifier que (Γ) admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (δ) d'équation $y = 1$.
3. a) Démontrer que le point $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (Γ).

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation: $x - 4y + 2 = 0$ est tangente à (Γ) en K.

4. On se propose d'étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ). Soit h et φ les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$ et $\varphi(x) = 4e^{-x} - (1 + e^{-x})^2$.

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

b) Etudier le sens de variation de φ et dresser le tableau de variation de φ. (On ne demande de calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$).

c) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq 0$.

d) Démontrer que h est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) En vous aidant des questions précédentes, démontrer que:

$\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) \geq 0$,

$\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \leq 0$.

f) En déduire la position relative de (Γ) et (Δ).

g) Tracer la courbe (Γ) et (Δ) dans le repère (O, I, J).

Partie B

On définit la fonction $\mathrm{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{1}{1 + e^{x}}$$

(G) est la représentation graphique de g dans le repère (O,I,J) et (Δ') est la tangente à (G) en K.

1. Démontrer que (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
2. En déduire les constructions de (Δ') et de (G) dans le repère (O,I,J). (Utiliser une couleur différente de la précédente).
3. a) Vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{g(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})}$.

b) Calculer en cm^2, l'aire. $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite (O,J), la courbe (G) et la droite des abscisses.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par
$g_n(x) = \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$.

Soit (G_n) la courbe représentative de g_n dans le repère (O,I,J).

1. Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g_n(x) \leq e^{-nx}$.
2. On désigne par A_n, l'aire de la partie du plan délimitée par les droites (OI), (OJ), la droite d'équation $x = 1$ et la courbe (G_n).

a) Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathrm{A}_n \leq \frac{1}{\mathrm{n}}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{n}})$.

(On pourra utiliser la question C1).

b) En déduire la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

SESSION NORMALE 2001 SERIE E

EXERCICE 1

On considère l'équation $(\mathrm{E}): z \in \mathbb{C}, z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$.

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i; 3i; -2+3i$.

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $2, -2$ et 1 .

a. Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GA}}, \overrightarrow{\mathrm{GB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$.

b. Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GA}}, \overrightarrow{\mathrm{GB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera ła raison.

c. En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_l la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose: $\mathrm{N}=r_1(\mathrm{M}), \mathrm{M}'=r_2(\mathrm{N}), \mathrm{r}=r_2 \mathrm{O} r_1$.

1. a. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer $r(D)$.

b. Démontrer que r est la symétrie centrale de centre Ω milieu de [BD].

2. a. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω.

(On pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}\overrightarrow{MA})$).

b. Prouver que (Γ) admet $[AD]$ pour diamètre et que le milieu I de $[AB]$ appartient à (Γ). Construire le cercle (Γ).

PROBLÈME

Partie A

On propose de déterminer l'ensemble $\boldsymbol{J}$ des fonctions numériques f d'une variable réelle , définies sur $]-1;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle et vérifiant relation suivante :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, (1+x)f'(x)+f(x)=1+\ln(1+x)$$

1. Soit f un élément de $\boldsymbol{J}$ et soit g la fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$ et définie par : $g(x)=(1+x)f(x)$.

a. Démontrer que g est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h définie par :
$\forall x \in]-1;+\infty[,\ h(x)=1+\ln(x+1)$.

b. Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1, définie par :

$$\forall x \in]-1;+\infty\left[\ f_1(x)=\frac{g_1(x)}{1+x}\right. \text{ est élément de } J$$

2. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in]-1;+\infty\left[, \frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}\right..$$

b. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de h sur $]-1;+\infty[$.

3. En déduire l'ensemble J

Partie B

1. On considère l'ensemble des fonctions f_k dérivables sur $]-1;+\infty[$ et définies sur cet intervalle par : $f_k(x)=\ln(x+1)+\frac{k}{x+1}, k$ étant un paramètre réel.

a. Calculer suivant les valeurs de k, la limite de f_k en $+\infty$ et à droite en -1 .

b. Étudier suivant les valeurs de k, le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation.
c. Tracer avec soin, dans un même repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les représentations graphiques respectives $(C_{-1}),(C_0)$ et (C_1) des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.
Pour tout réel t et pour tout entier naturel n supérieur à 2 , on pose :
$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2}t^{n-2}$
a. Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}, Q_{n-2}(t) = \frac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$.
b. En déduire que $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1}\left(\frac{t^{n-1}}{1+t}\right), t \neq -1$.
c. À l'aide d'une intégration sur $[0;x](0 \leqslant x \leqslant 1)$, démontrer que :
$\left(f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt\right)$ avec
$P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$.
On considère la fonction φ définie sur $[0;1]$ par :
$\varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x}$ si $x \in]0;1]$
$\varphi(0) = 1$
a. Démontrer que : $\forall x \in [0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt \leqslant \int_0^x t^{n-1}dt$.
b. En déduire que : $\forall x \in [0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}dt \leqslant \frac{1}{n}$.
c. Utilisant 2. c., démontrer que : $\forall x \in]0;1], \frac{-1}{nx} \leqslant \varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$.
d. Par intégration sur $\left[\frac{1}{n};1\right]$, démontrer que :
$\int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right)$.
avec $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots . + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$ $n \geqslant 2$.

Partie C

1. Soit $g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{2n-1}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1;+\infty[, f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$.
2.
a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \frac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$.
b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

3. On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{i=0}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0(1) = U_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$.
b. En déduire la limite de la suite (U_n).

SESSION NORMALE 2001 Série C

EXERCICE 1

On considère la suite (J_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n \, dt$.

1. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n :
   a. J_n est positif si n est pair.
   b. J_n est négatif si n est impair.
2. Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = 2\int_0^1 (t^2 - 1)^n \, dt$.
3. Calculer J_0, J_1 et J_2.
4. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$.
5. Retrouver J_1 et J_2 connaissant J_0.
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n_n} = \frac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}$.

EXERCICE 2

Le quadrilatère OHKL est un rectangle de sens direct tel que : $OH = 2LO$. La médiatrice de $[OK]$ coupe (OH) en E et (OL) en F. Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre E passant par O recoupe (OH) en A. Le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre F passant par O recoupe (OL) en O'. S est la similitude directe qui applique A sur O et O sur O'.

1. Démontrer que l'angle de S mesure $-\frac{\pi}{2}$.
2. Démontrer que: $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{O; K\}$.
3. Déterminer le centre de la similitude S.
4. Démontrer que : $S(H) = L$ et en déduire le rapport de S.
5. Déterminer l'image du point E par S.
6. Soit M un point de (OH) distinct des points O et A. On admet que le cercle passant par O, K et M recoupe (OL) en M'. Démontrer que : $S(M) = M'$.

PROBLEME

PARTIE A

Dans tout le problème, les fonctions étudiées sont dérivables sur $]0; 0 + \infty[$ et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty\Big[$ par: $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$.

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0 .
2. On note h' la dérivée de h; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty\Big[, h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans I]; $+\infty$ [.
4. En déduire le signe de h.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0 .
2. On note g' la dérivée de g; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = xh(x)$.
3. Démontrer que $g(x_0) > 0$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0; 1[$.
5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0; +\infty[$. a. Déterminer le signe de g.

bs Démontrer que $x_1 \in]0{,}3; 0{,}4[$ et $x_2 \in]3{,}3; 3{,}4[$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0; +\infty\Big[, \ f(x) = \frac{x\ln x}{1 + x^2}$$

1. Démonter que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0 .
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la dérivée de f; démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty\Big[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$.

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Démontrer que si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$ alors : $\ln \alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$.
6. En déduire que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$.
7. Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f.
8. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le plan muni du repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. (On prendra pour unités: 3 cm en abscisse, 8 cm en ordonnées, $x_1 \approx 0{,}35$ et $x_2 \approx 3{,}35$.)

PARTIE D

1. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$.

Calcul de la limite de F en $+\infty$.

a. Démontrer que $\forall t \in]1; +\infty\Big[,\ \frac{1}{2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

b. Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$.

c. En déduire les limites de $F(x)$ et $\frac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Calcul de la limite de F en 0 .

2. Pour tout nombre réel α élément de $]0; 1[$, on pose : $\phi(\alpha) = \int_1^\alpha t\ln t dt$.

a. Exprimer $\phi(\alpha)$ en fonction α.

b. Calculer $\lim_{\alpha \to 0} \phi(\alpha)$.

3. c. En déduire un encadrement de $\lim_{\alpha \to 0} F(x)$.
4. Déterminer la fonction dérivée F' de F.
5. Déterminer la fonction dérivée F' de F.

Dresser le tableau de variation de F.

Donner l'allure de la courbe représentative de F dans le même repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ de la partie C.

SESSION NORMALE 2000 Série E

EXERCICE 1

PARTIE A

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 (1 - x^n)\sqrt{1 - x^2}dx$.

On pose $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}dx$.

1. En utilisant une considération d'aire, justifier que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. Calculer J_1, en déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.
3. a. Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n dx$.

b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de J_n en fonction de n.

1. Soit v la fonction définie sur $[0; 1]$ par $v(x) = -\frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}$ et soit v' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; 1[$.

a. Démontrer que $v'(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. On admet que le résultat reste valable sur $[0; 1]$.

b. À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir v, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , on a :

$(n + 2)J_n = (n - 1)J_{n-2}$. Vérifier que cela reste valable pour $n = 2$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p - 1)}{4 \times 6 \times \ldots \times (2p + 2)} \times \frac{\pi}{4} \text{ et } J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2p)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2p + 3)}$$

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\begin{cases} AB = AC \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On appelle r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On pose : $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$(f^{-1} étant la transformation réciproque de).

b. Déterminer l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

3. Démontrer que (AC) est l'image de (IJ) par f.
4. Soit M un point du plan. On désigne par M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.

a. Démontrer que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$.

b. Démontrer que M appartient à la droite (IJ) si et seulement si les points A, C, M_1 et M_2 sont alignés.

c. On suppose que le point M n'appartient pas à la droite (IJ) . Quelle est la nature du quadrilatère ACM_1M_2 ? Justifier.

PROBLEME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J); unité graphique 2 cm. L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ et définie par : $g(t) = 1 - t - e^{-2t}$.

a. Étudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en $+\infty$. (on ne demande pas de construire la courbe représentative de).

b. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$.

c. Étudier le signe de $g(t)$.

d. Établir que $0{,}79 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}8$.

Sens de variation de f.

a. On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b. Déduire de la question précédente le sens de variation de f.

Limite de f en 0 .

a. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\ln[f(x)] = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

b. En déduire la limite de f en 0 .

Limite de f en $+\infty$.

a. Établir que pour tout élément t de $[0; 1]$: $0 \leqslant e^t - 1 \leqslant te$.

b. En déduire à l'aide d'une intégration, que pour tout u de $[0{,}1]$:

$$1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + u + \frac{e}{2}u^2.$$

c. Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geqslant 2$: $0 \leqslant [f(x)]^2 - 2x \leqslant 2e$

d. Démontrer que pour tout $x \geqslant 2$: $f(x) \geqslant \sqrt{2x}$ En déduire la limite de f en $+\infty$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Tracer $(\mathcal{C})$.

SESSION NORMALE 2000 Série C

EXERCICE 1

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD). On désigne par I, J, O les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

1. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :
$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \|$$
2. Les médiatrices des côtés [AD] et [BC] se coupent en G.

Démontrer que: $\mathrm{GA}^2 + \mathrm{GB}^2 = \mathrm{GC}^2 + \mathrm{GD}^2$.

3. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que: $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \mathrm{MC}^2 + \mathrm{MD}^2$.

a. Justifier que (E_2) est non vide.

b. Démontrer que : $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = k$ (où k est une constante réelle).

c. En déduire que : $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GM}} = 0$.

d. Déterminer et construire (E_2).

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C} telles que :

$z_{\mathrm{A}} = -3, z_{\mathrm{B}} = 2 + 2i$ et $z_{\mathrm{C}} = 7i$.

1. Construire le triangle ABC.
2. Vérifier que les nombres complexes $z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}$ et $z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}$ ont le même module que l'on précisera.
3. Écrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.
4. Déduire des questions 2. et 3. que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
5. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Construire, après justification, les points E et F images de C et E par la similitude S. (On ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F.)

6. On pose : $\mathrm{A}_0 = \mathrm{S}(\mathrm{A}); \mathrm{A}_1 = \mathrm{B}; \mathrm{A}_2 = \mathrm{S}(\mathrm{B}); \mathrm{A}_3 = \mathrm{S}(\mathrm{C}); \mathrm{A}_4 = \mathrm{S}(\mathrm{E}); \mathrm{A}_5 = \mathrm{S}(\mathrm{F}); \ \mathrm{A}_6 = \mathrm{S}(\mathrm{A}_5); \ldots;$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $2 : \mathrm{A}_n = \mathrm{S}(\mathrm{A}_{n-1})$ et, pour tout entier naturel $n : \mathrm{R}_n = |\mathrm{Z}_{\mathrm{A}_{n+1}} - \mathrm{Z}_{\mathrm{A}_n}|$.

a. Calculer $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et R_2.

b. En déduire la nature précise du triangle $\mathrm{AA}_2\ \mathrm{A}_3$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{AA}_n\ \mathrm{A}_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_n.

d. Démontrer que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

e. 'Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{R}_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{29}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème le plan est muni du repère orthonormé $(0, I, J)$ (unité : $2\ \mathrm{cm}$).

PARTIE A

On considère f la fonction numérique, de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en prenant soin de tracer la tangente à l'origine.

2. On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|e^{|1-x|}$.

a. Écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b. En déduire une méthode pour obtenir la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de g sur]- $\infty, 1]$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$.

c. Étudier sur l'intervalle $[1; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto xe^{x-1}$.

d. Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 1 .

e. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de g.
f. Tracer $(\mathcal{C}_g)$ ainsi que les demi-tangentes à $(\mathcal{C}_g)$ aux points d'abscisses 0 et 1 .

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par : $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$.
On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n.

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Calculer la limite de $f_n(x)$ et de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

En donner une interprétation graphique.

3. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer la dérivée f_n' de f_n.
b. Étudier le signe de $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f_n(x) = x$.
d. En déduire que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes que l'on précisera.

4. Étudier la position de $(\mathcal{C}_n)$ par rapport à $(\mathcal{C}_{n+1})$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
6. α étant un nombre réel, on pose : $\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_0^\alpha f_n(x)dx$.

a. Calculer $\mathrm{I}_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
b. Calculer la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

SESSION NORMALE 1999 Série E

EXERCICE 1

On considère l'application f suivante :

$$f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x$$

1. Démontrer que f est une bijection.

On notera g la bijection réciproque de l'application f.

2. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

EXERCICE 2

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches. On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$.

1. Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :

A : Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches.

B : Obtenir au moins une boule blanche.

(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

2. On suppose $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geqslant 2$.

a. Calculer la probabilité P_n d'obtenir deux boules de même couleur.

b. Démontrer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 2}$ est majorée par 1 . Quel est le sens de variation de $(\mathrm{P}_n)_{n>2}$?

c. Déduire de la question précédente que $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

PARTIE A

1. On désigne par M_0 l'origine O du repère et par M_1 le point tel que : $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} = \vec{\imath}$. On fixe un nombre réel $r > 0$ et un réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Soit M_2 le point du plan tel que :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\| = r\|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}\| \\ \mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1};\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}}\right) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$.

2. Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout entier naturel non nul n, on définit M_{n+1} à partir des points M_n et M_{n-1} par :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\mathrm{M_nM_{n+1}}}\| = r\|\overrightarrow{\mathrm{M_{n-1}M_n}}\| \\ \mathrm{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M_{n-1}M_n}};\overrightarrow{\mathrm{M_nM_{n+1}}}}\right) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_\mathrm{b}, \dots., \mathrm{M}_n$, et la figure obtenue en traçant les segments $[\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1], [\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2], \dots, [\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}], \dots$ est appelée «polygone». On note v_n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}}_{n\ n+1}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n, v_n = \mathrm{r}e^{i\theta}v_{n-1}$. En déduire que la suite (V) est une suite géométrique.

b. Déduire de la question précédente, l'expression de v_n en fonction de n, r et θ.

3. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calculer v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$ et placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, en prenant 8 cm pour unité graphique.

PARTIE B

Dans toute la suite du problème on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on note z_n l'affixe du point M_n.

1. Calculer z_0, z_1, z_2.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1, z_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

3. On rappelle que pour tout nombre $z \neq 1$, on a: $1 + z + z^2 + \cdots . + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, calculer z_n en fonction de n, r et θ.

4. a. Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. On note Ω le point d'affixe ω tel que : $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$.

Interpréter géométriquement le résultat de la question a. ci-dessus.

5. Pour tout $n \geqslant 0$, on note z'_n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a. Calculer z'_n en fonction de n, r et θ.

b. Établir qu'il existe un nombre complexe a non nul tel que pour tout $n \geqslant 1$, $z'_n = az'_{n-1}$.

c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geqslant 1, f(\mathrm{M}_{n-1}) = \mathrm{M}_n$; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d. Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$; calculer dans ce cas les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée.

Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points $\mathrm{M}_5, \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_7$ et M_8 sur la figure.

SESSION DE REMPLACEMENT 1999 Série C

EXERCICE 1

1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 .
2. Justifier que : $1999 \equiv 4[7]$.
3. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132}.
4. Soit l'entier A_k tel que : $\mathrm{A}_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k_*} + 123^{5k}$. Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de A_k par 7.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 . On considère les fonctions f_n dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définies par: $f_n(x) = x + n\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Calculer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, calculer $f_n'(x)$.
3. Étudier le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que l'équation, $x \in]0; n[f_n(x) = 0$, admet une unique solution a_n.
5. Démontrer que: $\forall n \geqslant 3, 1 < a_n < e$.
6. Démontrer que: $\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$.
7. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
8. En déduire que la suite (a_n) converge.
9. Démontrer que : $\forall \mathrm{n} \geqslant 3\,, \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$.
10. En déduire la limite de la suite (a_n).

PROBLEME

Dans le plan orienté muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, on considère le carré direct OIKJ de côté 1 (L'unité étant le centimètre, on prendra : $\mathrm{OI} = 4$). Soit A un point quelconque de la droite (IJ) distinct de J et soit S la similitude directe de centre O qui applique J sur A.

PARTIE A

On désigne par I', K' et A' les images respectives des points I, K et A par S.

1. Démontrer que le quadrilatère OI'K'A est un carré direct.
2. Construire les points $\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \mathrm{J}, \mathrm{I}'$ et K'.
3. Démontrer que les points A, A' et I' sont alignés.
4. Démontrer que: $OA' = A'K'$.

PARTIE B

Soit a l'affixe du point A, α un argument de a et x la partie réelle de a.

1. Déterminer l'affixe de K.
2. Démontrer que : $ia + 1 = x(1 + i)$.
3. En déduire qu'il existe un argument de $i\mathrm{a} + 1$ dans la paire $\left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. Démontrer que : $\overrightarrow{(\mathrm{OJ}, \overrightarrow{\mathrm{OA}})} = \overrightarrow{(\overrightarrow{\mathrm{KA}}, \overrightarrow{\mathrm{KJ}})}$
5. En déduire que $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ est un argument du nombre complexe $\mathrm{a} - (1 + i)$.

PARTIE C

Soit M un point du plan d'affixe z et M' son image d'affixe z ' par S.

1. Démontrer que : $z' = -iaz$.
2. Calculer en fonction de a les affixes respectives k' et a' des points K' et A'.
3. Soit u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KK}'}$, et $\overrightarrow{\mathrm{K}'\mathrm{A}'}$.

a. Démontrer que u est un imaginaire pur et que v est un réel.

b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{K'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$ sont orthogonaux.

4. Démontrer que I, K et K' sont alignés et en déduire que K' est le projeté orthogonal de A' sur la droite (IK).
5. En déduire une construction de A'.
6. Démontrer que, lorsque A décrit (IJ) privée de J, A' appartient à la parabole (Γ) de foyer O et de directrice (IK).

PARTIE D

On veut construire (Γ).

1. Donner l'axe focal et le sommet de (Γ).
2. Démontrer que J appartient à (Γ).
3. Construire (Γ).

SESSION NORMALE 1999 Série C

EXERCICE 1

On considère un dé cubique dont quatre faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1. Calculer la probabilité d'avoir :

a. une face blanche.

b. une face noire.

2. On jette le dé quatre fois de suite.

a. Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche; une face noire; une face blanche ; une face blanche.

b. Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.

c. Calculer la probabilité d'avoir une face noire au 4^{e} lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $P_n \geqslant 0{,}99$.

EXERCICE 2

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$.

a. Calculer $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b. Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

a. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer I_2.

b. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

d. En utilisant la question 1.c., démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} - \frac{e^2}{(n+2)e^n}$.

e. En déduire la limite de la suite (I_n).

PROBLÈME

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J); unité : 1 cm.

PARTIE A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.
2. On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes respectives $3; 2 + i\sqrt{3}; -1; 7$ et $11 + 4i\sqrt{3}$.

a. Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

b. Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

c. Placer les points A, B, C, E et G.

3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

PARTIE B

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB.

1. On veut déterminer l' homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.

a. Démontrer que l'image par h de [IA] est [EF].

b. Justifier que : $h(I) = E, h(A) = F$ et $h(B) = G$.

c. Déterminer le centre et le rapport de h.

2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = h o r$.

a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
b. Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.

3. Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG.

a. Démontrer que $h^{-1}og$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même).
b. Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.
c. En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h, f et une troisième f 'que l'on décomposera à l'aide de h et de r.
d. Déterminer le rapport et l'angle de f'.

4. Soit Ω le centre de la similitude f. On appelle K le milieu du segment [IA]. a. Déterminer l'image K' de K par f.

b. Démontrer que Ω, A, G et F sont cocycliques.
c. Démontrer que Ω, F, K et K' sont cocycliques.
d. Construire Ω.

5. Déterminer l'application complexe associée à f' '
6. Calculer l'affixe du centre Ω' de f'.

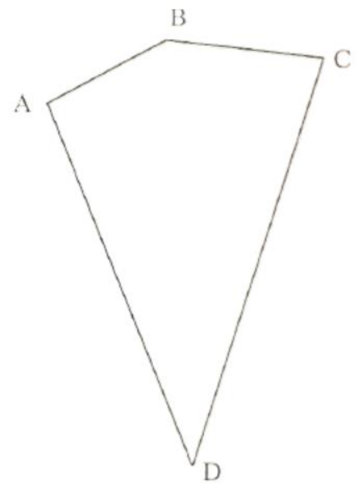
SESSION NORMALE 1998 Série E

EXERCICE 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct$(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère :

- le quadrilatère convexe ABCD.

(Voir figure ci-contre.)



- Extérieurement au quadrilatère, le point

M_1 (respectivement $M_2; M_3; M_4$) tel que le triangle AM_1B (respectivement BM_2C, CM_3D, DM_4A) soit rectangle et isocèle de sommet M_1 (respectivement M_2, M_3, M_4).

Le but de l'exercice est de démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.

1. Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D et z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

a. Exprimer z_1 en fonction de a et b.

b. En déduire les expressions de z_2, z_3 et z_4 en fonction de a, b, c et d.

2. Démontrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont même la longueur.

EXERCICE 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

(1) $25(x^2+y^2)=(3x-16)^2$.

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrer que (E) est une ellipse de foyer O et de directrice associée la droite (Δ) d'équation $x=\frac{16}{3}$

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteur $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

2. a. Déduire de l'équation (1) une relation entre OM et l'abscisse x de M.

b. Démontrer que $OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$

3. On suppose ici que θ appartient à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M′.

a. Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b. Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $f_n(x)=x^n e^{-x}$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 3 cm).

PARTIE A

1. a. Calculer les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f_1 et dresser son tableau de variation.

c. Tracer la tangente à l'origine à (C_1), puis tracer (C_1).

2. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , étudier le sens de variation de la fonction f_n.

b. Calculer les limites de f_3 en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.

c. Sur une autre figure, tracer la tangente à l'origine à (C_3), puis tracer (C_3).

3. On note S_n la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation : $x = n$ et (C'_n) l'image de (C_n) par S_n.

a. M étant le point du plan de coordonnées (x, y), calculer les coordonnées (x', y') de son image M' par S_n.

b. Démontrer que (C'_n) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient : $y = f_n(2n - x)$.

c. Tracer (C'_3) dans le même repère que (C_3).

d. Pour $x \leqslant 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n g_n(t)dt$.

4. Pour tout x élément de $]0, n]$, on pose $h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.

a. De l'étude des variations de h_n, déduire le signe de $h_n(x)$.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, n]$, on a $f_n(x) \leqslant g_n(x)$.

c. Déduire de ce qui précède, l'inégalité :

$$\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2n} f_n(t)\mathrm{d}t$$

PARTIE B

Pour tout réel positif x, on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.
2. À l'aide d'une intégration par parties:

a. Calculer $F_1(x)$.

b. Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on a:

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

3. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ,

$F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

4. a. Démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = n!$.

b. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_n(x) \leqslant n!$.

PARTIE C

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on a :

$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)dt \leqslant n!$

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on a :

$0 \leqslant F_n(n) \leqslant \frac{n!}{2}$.

$\frac{1}{2}e^n \leqslant 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} \leqslant e^n$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1998 Série C

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $2\ \mathrm{cm}$, on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que :

$$|z-1|=\frac{1}{4}|z-i\bar{z}-2(i-1)|$$

On appelle (D) la droite d'équation $x-y+2=0$.

1. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z ' telle que : $z'=\frac{1}{2}(z+i\bar{z})+i-1$.

(On pourra poser $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+iy'$ où x,y,x' et y' sont des réels.)

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=M$ est la droite (D).

b. Démontrer que pour tout point M du plan, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).

c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est normàl à la droite (D), puis caractériser géométriquement l'application f.

2. On se propose de déterminer l'ensemble (E) défini au début de l'exercice.

a. Démontrer que : $z-z'=\frac{1}{2}[z-i\bar{z}-2(i-1)]$.

b. En déduire que (E) est une ellipse de foyer F d'affixe 1, de directrice associée (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}\cdot$ Préciser son axe focal (Δ).

c. Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $\frac{1}{2}(1+i)$ et $\frac{1}{2}(5-3i)$ sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal.

3. a. Construire la droite (D), l'axe focal (Δ), les points A,A' et F.

b. Déterminer géométriquement les autres sommets de (E).

c. Construire (E).

EXERCICE 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel $\mathrm{AB}=2a$ et $\mathrm{AC}=a$, où a est un nombre réel strictement positif donné.

1. a. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A,1);(B,-1)$ et $(C,1)$.

b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$$

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

a. Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés $(A,3);(B,1)$ et $(C,-2)$.

b. Pour tout réel k, on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que:

$$3\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2-2\mathrm{MC}^2=ka^2$$

Pour quelle valeur de k,E_k contient-il le point C ?

c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$.

PROBLEME

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

On désigne par ((C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,I,J)$. (unité graphique: $4\ \mathrm{cm}$).

PARTIE A

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x puis étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et donner le tableau de variation de f.

2. Démontrer que le point A de coordonnées $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).
3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - f(x)$.

a. Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > 0$,
$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < 0$.

b. En déduire la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$.

c. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$.

PARTIE B

Pour tout réel non nul m, on considère les fonctions f_m dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par: $f_m(x) = f\left(\frac{x}{m}\right)$.
$(\mathcal{C}_m)$ désigne la courbe représentative de f_m dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
Soit T_m la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\mathrm{HM}'} = m\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (OJ).

1. a. Donner la nature de T_{-1}.

b. Démontrer que $(\mathcal{C}_m)$ est l'image par $\mathrm{T}_m \mathrm{de}(\mathcal{C})$.

c. Tracer $(\mathcal{C}_{-1})$.

2. Soit λ un réel. On pose $I_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\mathrm{d}x$.

Calculer $\mathrm{I}_m(\lambda)$ et en déduire que $\mathrm{I}_m(\lambda)$ est indépendant de m.

PARTIE C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $g(x) = x - f(x)$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.

b. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

b. Calculer $f''(x)$. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

c. En déduire que : $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|x - \alpha|$

3. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence : $\mathrm{U}_0 = \frac{1}{4}$ et $\mathrm{U}_{n+1} = f(\mathrm{U}_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

b. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|\mathrm{U}_n - \alpha|$

c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

4. a. Déterminer la limite de (U_n).

b. Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \alpha| \leqslant 10^{-2}$.

SESSION DE NORMALE 1998 Série C

EXERCICE 1

Dans le plan orienté on considère le carré ABCD de centre O tel que

$$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$$

Soit M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, et I le milieu de [MN].

1. Faire une figure.
2. On considère la rotation r de centre A telle que : $r(\mathrm{D}) = \mathrm{B}$.

a. Démontrer que N est l'image de M par r.
b. En déduire la nature du triangle AMN.

3. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A telle que $s(\mathrm{D}) = \mathrm{O}$.

b. Quelle est l'image de C par s ?
c. Démontrer que I est l'image de M par s.
d. En déduire l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite (DC).

EXERCICE 2

Soit a un réel non nul. On considère la suite U définie par :
$\mathrm{U}_0 = 0, \mathrm{U}_1 = 1$
Pour tout entier naturel n non nul, $a\mathrm{U}_{n+1} = (a+1)\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$.

1. Pour quelle valeur de a, la suite U est-elle arithmétique ? Dans la suite de l'exercice, on supposera le réel a différent de 1.
2. Démontrer que la suite V définie pour tout entier naturel n par : $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_l + \cdots + \mathrm{V}_{n-1}$$

b. Pour tout entier naturel n non nul, calculer U_n en fonction de n et de a.
c Pour quelles valeurs de a, la suite U est-elle convergente? Préciser alors la limite de U en fonction de a.

4. On choisit $a = 2$.

Trouver le plus petit entier naturel p tel que $|\mathrm{U}_p - 2| < 10^{-3}$.
On donne: $\ln 2 \simeq 0{,}69$ et $\ln 5 \simeq 1{,}61$.

PROBLEME

Ce problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes.
Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité mesurant 1 cm.

PARTIE A

On considère la fonction f définie, $\mathrm{sur}[0; +\infty[\mathrm{par}\, f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Démontrer que f est continue à droite en 0 .

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 .

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire une interprétation géométrique.
b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
c. Tracer (C).

3. a. Soit g la restriction de f à $[4; +\infty[$.

Démontrer que g est une bijection de $[4; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ et que son application réciproque g^{-1} est définie sur $[0; +\infty[$ par :
$g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$.
b. Tracer la courbe représentative (C′) de g^{-1}, dans le même repère que (C).

On appellera (H) la courbe $(\mathrm{C}) \cup (\mathrm{C}')$.

4. Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a. Démontrer que pour tous réels x et y positifs, on a :
$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$.
En déduire que $(\mathrm{H}) = (\mathrm{E})$.
b. Démontrer que un point $\mathrm{M}(a; b)$ est un point de (E) si, et seulement si, le point $\mathrm{M}'(b; a)$ est aussi un point de (E).
En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

PARTIE B

1. Soit m un réel appartenant à $]-2; 2[$.

a. Soit les points A_m de coordonnées $(2 + m; 0)$ et B_m de coordonnées$(0; 2 - m)$.
Écrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m.
b. Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x - y - 2m = 0$.
Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées$\left(\frac{1}{4}(2 + m)^2; \frac{1}{4}(2 - m)^2\right)$.
c. Démontrer que (D_m) est tangente à (C) en T_m.

2. a. Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y = -x$. Démontrer que H_m a pour coordonnées $(m; -m)$.

b Soit F le point de coordonnées $(2; 2)$.
Démontrer que le quadrilatère $\mathrm{A}_m\mathrm{H}_m\ \mathrm{B}_m\ \mathrm{F}$ est un carré pour tout m appartenant à $]-2; 2[$.

3. Pour $m = \frac{1}{2}$, placer le point T_{rm}, tracer les droites $(\mathrm{D}_m), (\Delta_m)$ et le carré $\mathrm{A}_m\mathrm{H}_m\ \mathrm{B}_m\ \mathrm{F}$:

PARTIE C

1. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z - i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (δ).
b. Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à $\left|\frac{z + i\bar{z}}{2}\right|$.
a. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z + i\bar{z}}{2}\right| = |z - (2 + 2i)|$ est la courbe (E).
b. Interpréter géométriquement ce résultat.
En déduire la nature de la courbe (E).
En donner deux éléments caractéristiques.

SESSION DE REMPLACEMENT 1997 Série C

EXERCICE 1

On considère l'équation $(E): (p;q) \in \mathbb{Z}^2, 11p - 7q = -4$

1. a. Vérifier que $(-1;-1)$ est solution de (E).

b. Résoudre (E).

2. a. Résoudre les équations (F) et (G) suivantes :

(F) $x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7]$

(G) $x \in \mathbb{Z},\ 9x \equiv 4[1\quad 1]$

b. Déduire de 1) et de 2) les solutions du système

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, x \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 2

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une boule de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.

a. Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.

b. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

PROBLÈME

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty\left[, f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\ln(x)\right. \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de frelativement à un repère orthonormé (O,I,J) d'unité 5 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = (x-2)\ln(x) + (x-1)$.

1. Démontrer que pour tout réel x élément de $]0;+\infty\left[: g'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x} + \ln(x)\right.$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Déduire de 2) que $g(x)$ est positif pour tout réel x élément de $]0;+\infty[$.

PARTIE B

1. a. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b. Démontrer que f est continue à droite en 0 , et continue en 1 .

c. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0 .

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

d. On admettra ici que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = \frac{3}{2}$.

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2. a. On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0;1[\cup]1;+\infty[$ $f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2}g(x)$

b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que pour tout réel appartenant à $[0;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

d. Dans le repère $(\mathrm{O,I,J})$, tracer la demi-tangente à (C) au point O, la tangente à (C) au point B de coordonnées $(1;1)$ et la courbe (C).

On donne: $\ln 2 \simeq 0{,}69; \ln 3 \simeq 1{,}1$.

PARTIE C

1. Pour tout réel α appartenant à $]0;\frac{1}{2}[$ on considère l'intégrale $\mathrm{A}(\alpha)$ telle que :

$$\mathrm{A}(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1}\ln(t)dt$$

On note A la limite de $\mathrm{A}(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.

Que représente géométriquement le nombre A ?

2. a. Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n, sur $]0;+\infty[$ par : $\mathrm{H}_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right)$

est une primitive de la fonction $t \mapsto t^n\ln(t)$ sur. $]0;+\infty[$.

b. Soit α dans $]\,0;\frac{1}{2}\,[$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\ln(t)dt \text{ et } \mathrm{I}_n = \lim_{\alpha\to\frac{1}{2}} \mathrm{I}_n(\alpha)$$

Calculer $\mathrm{I}_n(\alpha)$ et en déduire que $\mathrm{I}_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. a. Pour tout réel t différent de 1 , et pour tout entier naturel non nul n, calculer la somme : $t^2 + t^3 + \cdots + t^{n+}$

(somme des n premiers termes d'une suite géométrique).

Démontrer que $\frac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - \cdots - t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}$

et que $A(\alpha) = -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) - \cdots - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)dt$.

b. En utilisant la question 2.c.de la partie B, démontrer que :

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(\mathrm{t})\mathrm{dt} \leqslant \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \mathrm{~dt} \leqslant \int_0^1 t^n\mathrm{dt}$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel non nul n :

$0 \leqslant \mathrm{A}(\alpha) + \mathrm{I}_2(\alpha) + \mathrm{I}_3(\alpha) + \cdots + \mathrm{I}_{n+1}(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

et que, pour tout entier naturel non nul n :

$0 \leqslant A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^2}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

d. On admet que $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

Démontrer que $\mathrm{A} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$.

SESSION NORMALE 1997 Série C

EXERCICE 1

On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$\mathrm{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$,

$\mathrm{J}_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $\mathrm{J}_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x dx$,

1. a. Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel n non nul.

b. Calculer $\mathrm{I}_2=\mathrm{I}_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{I}_{n+2}-\mathrm{I}_n=\frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2. a. Calculer I_1.

b. En déduire I_3.

3. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ par: $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x: $\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b. On pose, pour tout x élément de $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$: $u(x)=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$ · En déduire une primitive de f sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

c. Calculer I_0 puis I_2 et I_4.

EXERCICE 2

Dans le plan, on donne trois points alignés A, B et P.

Soit un point Q n'appartenant pas à la droite (AB) et tel que : $\mathrm{AQ}=\mathrm{BP}$.

La parallèle à la droite (PQ) passant par B coupe la droite (AQ) en C.

1. Justifier l'existence d'une homothétie h transformant P en B et Q en C.

Préciser son centre.

2. a. Construire B_1 et C_1 les images respectives de B et C par h.

b. Démontrer que : $\mathrm{AC}=\mathrm{BB}_1$.

3. On donne un triangle RST. On veut construire deux points I et J tels que : $\begin{cases}(\mathrm{IJ})//(\mathrm{ST})\\ \mathrm{I}\in(\mathrm{SR})\setminus\{\mathrm{S};\mathrm{R}\}\\ \mathrm{J}\in(\mathrm{RT})\text{ et }\mathrm{RJ}=\mathrm{SI}.\end{cases}$

(Dans cette question, on ne demande pas de trouver toutes les solutions mais seulement d'en donner une.)

a. Démontrer que, si le triangle RST est isocèle en R, il y a une solution évidente.

b. Dans la suite, les segments $[\mathrm{RS}]$ et $[\mathrm{RT}]$ ne sont pas de même longueur. À l'aide des deux premières questions, donner un programme de construction d'un couple de points (I,J) solution du problème.

Justifier ce programme.

PROBLÈME

PARTIE A

Soit f la fonction définie par : $f(0)=0$ et pour tout réel strictement positif x par $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .
2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et définie par : $\varphi(x)=\ln(x)+x+1$.

a. Étudier le sens de variation de φ.

b. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β telle que : $0{,}27\leqslant\beta\leqslant 0{,}28$.

3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

En déduire les variations de f.

b. Vérifier que : $f(\beta)=-\beta$.

c. Calculer la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On placera en particulier les points d'abscisses $1; 3; 4; \mathrm{e}^2; 12.$ $\ln(5) \simeq 1{,}6$.

PARTIE B

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3,4]$.

b. Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

a. Étudier le sens de variation de g.

b. Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4], g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.

c. Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

On prendra. $e^{\frac{4}{3}} \simeq 3{,}8; e^{\frac{5}{4}} \simeq 3{,}49$.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $\mathrm{U}_0 = 3$ et la relation de récurrence $\mathrm{U}_{n+1} = g(\mathrm{U}_n)$.

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \in [3; 4]$.

b. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

En déduire que $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

c. . Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

d. Pour quelles valeurs de n, U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près?

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule. Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln\left(\frac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$.

c. Déduire des questions 2.a. et 2.b. que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

SESSION DE REMPLACEMENT 1996 Série E

EXERCICE 1

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R et un point O' tel que $\mathrm{OO}' = 3\mathrm{R}$.

Soit r la rotation de centre O' et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$. On pose : $f = r \text{ o } t$.

1. a. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par f. Faire une figure où l'on prendra $\mathrm{R} = 3 \text{ cm}$.

c. Déterminer et construire Ω, centre de la rotation f.

2. M étant un point quelconque de $(\mathcal{C})$ et M' son image par f, on appelle I le milieu du segment [MM'].

a. Déterminer la nature du triangle $\Omega M M'$ '.

b. En déduire que I est l'image de M par une similitude directe de centre Ω, dont on précisera le rapport et l'angle.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points I quand M décrit le cercle (($\mathcal{C}$). Justifier votre construction.

EXERCICE 2

Deux personnes, A et B, écrivent chacune au hasard un nombre entier compris entre 1 et 50 . On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B.

On suppose que tous les couples (a, b) tels que $1 \leqslant a \leqslant 50$ et $1 \leqslant b \leqslant 50$ sont équiprobables.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   a. $a = b$
   b. $a + b = 20$
   c. $b \geqslant 15$
   d. $b \geqslant a$
2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'événement " $\mathrm{b} \geqslant \mathrm{a}$ " soit réalisé au moins deux fois ? Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } n = 0, f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{pour } n \geqslant 1, f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Étudier la parité des fonctions f_n.
2. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition. Étudier le sens de variation de f_0 et construire (C_0).
3. Démontrer que toutes les courbes $(C_n)(n \in \mathbb{N})$ ont deux points communs.
4. Dans cette question, on suppose que n est non nul.

Pour tout réel x, calculer $f_n'(x)$ où f_n' est la fonction dérivée de f_n.

5. a. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2 et dresser leurs tableaux de variation.

c. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_1) en $+\infty$ et préciser la position de (C_1) par rapport à cette asymptote. Tracer(C_1) et (C_2) dans le même repère que (C_0).

PARTIE B

Soit (I_n) la suite réelle définie par : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(x)dx; n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout entier naturel n, démontrer que : $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{2}(2n+1)} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$
3. En déduire la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
4. On partage l'intervalle $[0;1]$ en cinq segments de même longueur 0,2 par les points $a_0 = 0; a_1 = 0,2; a_2 = 0,4; a_3 = 0,6; a_4 = 0,8; a_5 = 1$.

a. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel i tel que $0 \leqslant i \leqslant 4$:
$$0,2 f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant 0,2 f_0(a_i)$$
b. Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant 5$, calculer $f_0(a_\mathrm{i})$ à 10^{-2} par défaut et par excès. En déduire un encadrement de I_0.

5. a À l'aide d'une intégration par parties de I_n, démontrer que, pour n de $\mathbb{N}$, on a: $\mathrm{I}_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1})$.

b. Exprimer I_1 en fonction de I_0 et donner un encadrement de I_1.

SESSION NORMALE 1996 Série E

EXERCICE 1

Un carré $ABCD$, de côté 35 cm, est divisé en 1225 (soit 35^2) petits carrés de 1 cm de côté par des segments régulièrement espacés et parallèles soit au segment $[AB]$, soit au segment [AD].

1. On appelle "nœud" tout point d'intersection de deux segments de ce quadrillage qui n'est pas situé sur les côtés du carré $ABCD$.

a. Combien y a-t-il de nœuds dans le quadrillage ?
b. On choisit au hasard un de ces nœuds et on le note M. Soit I le projeté orthogonal de M sur (AB) et J le projeté orthogonal de M sur (AD). Déterminer la probabilité de chacun des événements :
b-1 : le quadrilatère AIMJ est un carré, $\mathrm{b}-2$: le quadrilatère AIMJ a un périmètre de 24 cm.

2. n étant un entier naturel non nul, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

a. Démontrer que $\mathrm{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
b. Combien y a-t-il d'entiers naturels non nuls n tels que $\mathrm{S}_n \leqslant 1225$?

3. Les petits carrés du quadrillage sont numérotés de 1 à 1225 .

a. On choisit au hasard un des petits carrés, et on note son numéro k. Quelle est la probabilité pour qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $\mathrm{S}_n = k$?
Un tel événement est appelé "succès".
b. On réalise 5 fois l'épreuve précédente.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois "succès" ?

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

1. a. Vérifier que -3 est solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).
Les solutions seront notées z_0, z_1, et z_2, où $z_0 = -3$ et z_2 a sa partie réelle positive.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\mathrm{direct}(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm). On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a. Placer les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b. Démontrer que le triangle $\mathrm{M_0M_1M_2}$ est rectangle isocèle.

3. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(M_0, -1)$; $(M_1, 1)$ et $(M_2, 1)$.

a. Construire géométriquement le point G. Justifier la construction.
(On ne demande pas de calculer les coordonnées de G.)
b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :
$-\mathrm{MM}_0^2 + \mathrm{MM}_1^2 + \mathrm{MM}_2^2 = -\mathrm{GM}_2^2$.
(On pourra vérifier que M_2 est un point de (8).)

PROBLÉME

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \dfrac{x^n - 1}{n} & \text{si } x > 0 (\ln x \text{ désigne le logarithme népérien de } x) \\ f_n(0) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ (unité : 2 cm).

PARTIE A

1. Étudier la continuité de f_n à droite en 0 .

2. Déterminer la limite de $\frac{f_n(x)-\frac{1}{n}}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (on distinguera les cas $n=1$ et >1). Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Étudier le sens de variation de f_n. Préciser la nature de la branche infinie.
4. Construire (C_1) et (C_2).

PARTIE B

Soit λ un réel strictement positif.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de λ l'intégrale :

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx$$

2. En déduire la valeur, en fonction de λ, de $\mathrm{I}(\lambda)$ tel que :

$$\mathrm{I}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f_2(x) \mathrm{d} x.$$

3. Calculer la limite de $\mathrm{I}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 .

En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan limitée par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

PARTIE C

1. On pose, pour tout x de l'intervalle $]0;1[, g(x)=f_2(x)-x$. Dresser le tableau de variation de g.

En déduire que l'équation $f_2(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.

2. a. Étudier le sens de variation de f_2', fonction dérivée de f_2 sur $]0;1]$ et dresser son tableau de variation.

b. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, on a : $|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$

3. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases}\mathrm{U}_0=1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{n:l}=f_2(\mathrm{U}_n)\end{cases}$$

a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{U}_n \in [0;1]$

b. α étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$|U_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{2}{e}|U_n-\alpha|,$$

c. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1-\alpha|$.

d. En déduire que la suite (U_n) converge vers α.

SESSION DE REMPLACEMENT 1996 Série C

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur a. Soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, -2)$.

1. Déterminer et construire I.
2. Calculer $\mathrm{IA}^2, \mathrm{IB}^2$ et IC^2 en fonction de a.
3. Soit k, un nombre réel.

a. Déterminer en fonction de k, l'ensemble (Ω_k) des points M du plan tels que : $\mathrm{MA}^2 + 2\mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MC}^2 = ka^2$

b. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (Ω_k) ?

4. a. Démontrer que (Ω_{-1}) est un cercle tangent à la droites (AB).

b. Démontrer que le symétrique D de B par rapport à la droite (AI) appartient à la droite (AC).

c. Démontrer que (Ω_{-1}) est tangent à (AC) en D.

d. Quelle est la nature du triangle IBD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$. On prend 2 centimètres comme unité graphique. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, notée (E).

(E) : $z^3 + (-1 + 2i)z^2 - (1 + 2i)z - 3 + 4i = 0$

1. a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure unique, que l'on calculera.

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $i, -1 - 2i$ et $2 - i$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b. Calculer les réels b et c pour que le point O soit le barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, b)$ et (C, c).

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité choisie est le centimètre.

PARTIE A

1. Soit $(\boldsymbol{h})$ la conique d'équation : $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Quelle est la nature de $(\boldsymbol{h})$?

On note A le sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer $(\boldsymbol{h})$.

2. On pose : $z = x + iy, z' = x' + iy', z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels. Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$.

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3. Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\bar{z}$.

a. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2} + 1)x$.

b. Démontrer que $S = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{OJ})}$ où J est le point de couple de coordonnées $(0; 1)$.

c. Déduire de ce qui précède, la nature de S.

4. a. Vérifier que : $R(A) = S(A)$. On notera A' ce point.

b. Démontrer que (D) coupe ($\boldsymbol{h}$) en deux points E et F.

5. a. Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b. En déduire que $(\boldsymbol{h})$ a la même image par R et S. On appelle $(\mathfrak{H})$ cette image.

Donner la nature et une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6. a. Expliquer pourquoi E et F appartiennent à $(\mathcal{H})$.

b. Construire sur la même figure la courbe $(\boldsymbol{h})$, les points A et A', la droite (D) et la courbe $(\mathcal{H})$.

PARTIE B

1. On note $(\boldsymbol{h}+)$ l'ensemble des points de $(\boldsymbol{h})$ d'ordonnées positives.

a. Démontrer que $(\boldsymbol{h}^{+})$est la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b. Soit N un point de $(\boldsymbol{h}+)$ d'abscisse x positive. On note $\mathrm{U}(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe $(\boldsymbol{h}+)$ et les segments $[\mathrm{OA}]$ et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x :

$$U(x)=\int_0^x \sqrt{t^2+16} dt-\left(\frac{x \sqrt{x^2+16}}{2}\right)$$

On ne cherchera pas à calculer $\mathrm{U}(x)$.

c. Pour tout réel positif ou nul x, on pose: $\mathrm{G}(x)=8 \ln \left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$

Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0 ;+\infty[$.

Calculer $\mathrm{U}(0)$ et $\mathrm{G}(0)$.

En déduire que pour tout réel positif ou nul x :

$$\mathrm{U}(x)=8 \ln \left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$$

2. Soit (*C*) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : $1 \mathrm{~cm}$).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

a. Étudier le sens de variation de la fonction U sur $[0 ;+\infty[$.

b. Calculer le nombre dérivé de U en 0.

Préciser l'allure de la courbe (*C*) au voisinage de l'origine.

c. Tracer la courbe (*C*) sur l'intervalle $[0 ; 8]$. On construira la tangente à (*C*) en 0.

On prendra: $\ln 2 \simeq 0{,}693 ; \ln (1+\sqrt{2}) \simeq 0{,}881 ; \ln (2+\sqrt{5}) \simeq 1{,}444 ;\ \ln (1+\sqrt{5}) \simeq 1{,}174$.

PARTIE C

On appelle $(\mathcal{H}+)$ l'ensemble des points de $(\mathcal{H})$ d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de $(\mathcal{H}+)$ d'abscisse x' telle que : $x' \geqslant 2 \sqrt{2}$.

1. Démontrer que le point N_1, tel que : $\mathrm{N}_1=\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{~N}')$ appartient à $(\boldsymbol{h}+)$ et que son abscisse x est positive.
2. Soit (Δ') la partie du plan limitée par $(\mathcal{H}+)$, les segments [OA'] et [ON']. Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

SESSION NORMALE 1996 Série C

EXERCICE 1

L'unité choisie est le centimètre.

Dans le plan orienté on considère deux points A et O tels que : $\mathrm{AO} = 1{,}5$.

Soit f la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1. On pose: $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C} = f(\mathrm{B})$.

a. Construire les points B et C.

b. Démontrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}})$ et que $\mathrm{BC} = 2\mathrm{BA}$.

En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par D, E et F les points tels que : $\mathrm{B} = \mathrm{R}(\mathrm{D}), \mathrm{E} = \mathrm{R}(\mathrm{C})$ et $\mathrm{F} = f(\mathrm{D})$.

a. Construire les points E, D puis F.

b. Démontrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{B}$ et O sont cocycliques.

En déduire que $\mathrm{B}, \mathrm{F}, \mathrm{C}$ et O sont cocycliques.

c. Soit : $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABD;

$\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle BCF;

$\mathcal{C}''$ le cercle circonscrit au triangle ACE.

Démontrer que ces trois cercles ont le point O en commun.

EXERCICE 2

Soit la suite réelle U de premier terme u_o égal à 5 et définie par lá relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}$$

1. a. Démontrer que pour tout entier n: $u_n > 0$.

b. Démontrer que pour tout entier n: $u_n \neq 1$.

2. Donner dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ une représentation graphique de la fonction f définie sur $]-5;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+4}{x+5}$ (unité : $2\ \mathrm{cm}$).

Utiliser cette représentation graphique et la droite (D) d'équation $y = x$ pour placer u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

D'après le graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur le sens de variation de U et sa limite?

3. Soit V la suite réelle de terme général v_n tel que : $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$

a. Démontrer que V est une suite géométrique et en donner le premier terme et la raison.

b. Démontrer que V est convergente et calculer sa limite.

c. En déduire que la suite U converge et calculer sa limite.

PROBLÈME

Un tableau de valeurs est donné en fin d'énoncé.

Toutes les fonctions considérés dans ce problème sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : $3\ \mathrm{cm}$).

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et préciser les asymptotes éventuelles à (C) parallèles aux axes.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.

c. Tracer (C).

2. u est un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $\mathrm{A}(u)$ de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = u$.

3. Calculer $\lim_{u \to +\infty} \mathrm{A}(u)$.

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B On considère les fonctions f_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$.

1. a. Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation.

c. Construire la représentation graphique (C_2) de f_2 dans le même repère que la courbe (C).

2. a. Déterminer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f_3 et dresser son tableau de variation.

c. Construire la représentation graphique (C_3) de f_3 dans le même repère que la courbe (C).

3. a. Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

b. Démontrer que pour tout entier non nul n: $f'_n = f_{n-1} - f_n$.

Partie C

On considère les fonctions J_n définies dans $\mathbb{R}$ par : $J_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. En utilisant la relation de la question B.3.b, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x.
2. Démontrer que pour tout réel x, on a: $J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$.

En déduire que : $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

3. Dans cette question, on suppose que x est élément de $[0; 1]$.

a. Démontrer que pour tout entier non nul n: $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1)$.

b. En déduire que pour tout x élément de $[0; 1]$, $J_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$.

c. Calculer la limite de $J_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Démontrer que pour tout x élément de $[0; 1]$:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

Partie D

1. On suppose n pair.

Étudier le sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $J_n(x) = e$.

2. On suppose n impair.

Étudier le sens variation de J_n sur $\mathbb{R}$; préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $J_n(x) = e$.

Préciser le signe de chaque solution.

3. Déterminer, suivant la parité de n, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0 \text{ (On ne calculera pas les solutions)}$$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$	2
e^x	0,05	0,13	0,37	2,72	4,48	7,39

SESSION DE REMPLACEMENT 1995 Série E

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un nombre complexe non nul et A le point d'affixe a. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z' = a^3 z + a - 1$

1. Déterminer l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation. Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie.

Représenter graphiquement l'ensemble des points A dont l'affixe a appartient à E_2.

3. Caractériser f pour $a = 1 + i$.
4. a. Soit M_0 le point d'affixe 1 et M_0' son image par f. On considère l'ensemble (Γ) des points A d'affixe a telle que le point M_0' appartient à l'axe $(O, \vec{u})$. Démontrer que (Γ) est la réunion d'une droite êt d'une hyperbole.

   b. Sur une figure distincte de celle de la deuxième question, représenter graphiquement (Γ).

EXERCICE 2

On considère trois points non alignés A, B et C de l'espace. On désigne par G_1, le barycentre des points pondérés $(A, 3), (B, 2)$ et $(C, -1)$ et par G_2, le barycentre des points pondérés $(A, 2), (B, 1)$ et $(C, 1)$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $G_1 \neq G_2$.

2. À tout point M de l'espace on fait correspondre le point M_1 tel que :

$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et le point $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a. Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M_1 décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{M}_1\vec{M}_2$ reste constant quand M décrit l'espace.

3. Déterminer l'ensemble S des poines M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0$.

PROBLÈME

On considère la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie A

1. a. Déterminer : $\lim f(x); \lim f(x)$.

b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Démontrer que le point A de (C) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de (C).
3. Tracer (C). On construira en particulier la tangente à (C) au point A.
4. a. Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}. Préciser l'ensemble de définition de f^{-1}.

b. Donner une expression de $f^{-1}(x)$.

c. Tracer dans le même repère que (C), la courbe (Γ) représentative de f^{-1}.

5. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait : $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$

b. On pose : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t)dt$. Déduire de 5.a, que $I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^\lambda + 1) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$.

6. a. x étant un réel de l'intervalle $[0; 1[$, établir à l'aide d'une considération géométrique que :

$$I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t)dt = xf^{-1}(x)$$

b. En déduire une expression de $\int_0^x f^{-1}(t)dt$.

Partie B

1. a. Étudier le sens variation de f'.

b. En déduire que, pour tout réel $x, 0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel, $\varphi(x) = f(x) - x$.

a. Démontrer que la fonction φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique, que l'on notera α.

c. Démontrer que : $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$.

3. On définit la suite numérique (U_n) par son premier terme U_0 et la relation de récurrence $\forall \in \mathbb{N}, n: \mathrm{U}_{n+1} = f(\mathrm{U}_n)$.

a. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que, pour tout entier naturel n: $|\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|\mathrm{U}_n - \alpha|$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n: $|\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |\mathrm{U}_0 - \alpha|$

En déduire que la suite (U_n) converge vers α.

c. On donne $\mathrm{U}_0 = -1$

Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

À partir de quel rang n est-on sûr d'avoir : $|\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$?

SESSION NORMALE 1995 Série C

EXERCICE 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$.

1. a. Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{U}_n \geqslant 0$.

2. a. Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire la convergence de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{v}_n = \int_0^1 x^n dx$.

a. Démontrer que la suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

b. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif.

On considère le point A de coordonnées $(a,0)$ et B le point de coordonnées $(a;a)$.

On désigne par R la rotation de centre O et l'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, par S la symétrie de centre B et par R' la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $F = R\ '\mathrm{o}\ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ? Préciser ses éléments caractéristiques. (On pourra considérer l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$.)
2. Soit (D) la droite d'équation $x+y=a$ et $\mathrm{S}_{(\mathrm{D})}$ la symétrie orthogonale d'axe (D). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation composée $\mathrm{S}_{(\mathrm{D})}\mathrm{OF}$.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de D_f.)

2. a. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0[$.

b. Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x| + \frac{\ln|x|}{x}$

Soit $(\mathrm{C_f})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$ (l'unité sera égale à $1\ \mathrm{cm}$).

1. a. En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.

2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que les droites (Δ) d'équation $y=x$ et (Δ') d'équation $y=-x$ sont asymptotes à (C_f) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.
4. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ') sur $]0;+\infty[$.

b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ') sur $]0;+\infty[$.

5. a. Déterminer l'intersection de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty;0[$.

b. Étudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]-\infty;0[$.

6. Tracer $(\Delta),(\Delta')$ et (C_f).

Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de $(\mathrm{C_f})$ et (Δ') sur $]-\infty;0[$.

Soit la fonction h définie sur $]-\infty;0[$ par : $h(x) = f(x) + x$.

1. a. Calculer $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to 0} h(x)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $x \in]-\infty; 0[, f(x) = -x$ admet une solution unique α.

b. Démontrer que :

$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Partie D

1. Soit t un nombre réel tel que $t \geqslant 1$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie du plan délimitée par (Δ'), (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

2. On pose, pour tout nombre réel t tel que $t \geqslant 1$: $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\boldsymbol{J}(t)$.

b. Démontrer que :

$0 \leqslant \boldsymbol{J}(t) \leqslant 1$.

c. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{J}(t)$.

SESSION DE REMPLACEMENT 1994 Série C

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$. On prendra $4 \mathrm{~cm}$ pour unité.

1. Soit (H) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2-y^2+x=0$.

a. Déterminer la nature de (H).

Préciser ses éléments de symétrie et asymptotes éventuelles.

b. Représenter graphiquement (H).

2. A tout point M' d'affixe z différente de 0 et de -1 on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{2}{z^2+z}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on désigne par (C_1) et (C_2) deux cercles de centres O_1 et O_2, de rayons respectifs 2 et 5 et sécants en I et J tels que :

$\operatorname{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{IO}_1, \mathrm{IO}_2})=\frac{2\pi}{3}$.

1. Faire une figure (unité : $1 \mathrm{~cm}$).
2. Soit s une similitude directe plane transformant (C_1) en (C_2).

a. Quel est le rapport d'une telle similitude ?

b. Si N est le centre de s, quelle est la valeur du rapport $\frac{\mathrm{NO}_2}{\mathrm{NO}_1}$?

c. Déterminer et construire avec soin l'ensemble (Γ) des centres N des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2).

3. On considère maintenant la similitude plane directe S de centre I transformant (C_1) en (C_2).

Faire une deuxième figure ne faisant pas apparaître (Γ).

a. Soit M_1 un point de (C_1) et M_2 son image par S. Démontrer que les points J, M_1 et M_2 sont alignés.

b. Placer un point M_1 sur (C_1), construire alors M_2.

4. Une droite (D) passant par J recoupe (C_1) en $B_1 (B_1 \neq M_1)$ et (C_2) en B_2.

a. Pourquoi les droites $(B_1 M_1)$ et $(B_2 M_2)$ sont-elles sécantes ?

b. On désigne par P le point d'intersection de $(\mathrm{B}_1 \mathrm{M}_1)$ et $(\mathrm{B}_2 \mathrm{M}_2)$. Démontrer que les points I, B_1, B_2 et P sont cocycliques.

PROBLÉME

On désigne par g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=\frac{e^t}{1+e^{2t}}$

On se propose d'étudier g et de trouver une de ses primitives.

Partie A: Étude d'une fonction G définie par une intégrale

1. a. Démontrer que g est une fonction paire.

b. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

c. Étudier le sens de variation de g. Dresser le tableau des variations de g.

d. Tracer (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ (On prendra $4 \mathrm{~cm}$ pour unité et $\mathrm{e} \simeq 2,7$).

2. On considère la fonction numérique G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x)=\int_0^x g(t) d t$$

(On ne cherchera pas à exprimer $G(x)$ en fonction de x..)

a. Que représente G pour la fonction g ?

b. Préciser $G'(x)$ et déduire le sens de variation de G.

c. Déterminer le signe $G(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Étude d'une bijection f et de sa réciproque

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$ par :

$f(x)=\ln\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

a. Démontrer que si $x \in]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$ alors $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in \left]0;+\infty\right[$

b. Démontrer que f est une fonction impaire.

c. Démontrer que: pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$,

$$f'(x)=\frac{1+\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Préciser le nombre dérivé de f en 0 .

d. Étudier la limite à droite de f en $-\frac{\pi}{4}$, ainsi que la limite à gauche de f en $\frac{\pi}{4}$.

e. Dresser le tableau des variations de f.

f. Tracer (C), la courbe représentative de f, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}',\mathrm{I}',\mathrm{J}')$ (unité : 4 cm).

a. Démontrer que f admet une bijection réciproque, que l'on notera f^{-1}, dont 2n précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.

b. Préciser les limites de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition.

Préciser le nombre dérivé de f^{-1} en 0 .

Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

Tracer sa courbe représentative (C'), dans le même repère que (C).

c. Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$ on a :

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow e^x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$.

d. En déduire que $(f^{-1})'=G'$ et démontrer que $f^{-1}=G$.

SESSION NORMALE 1994 Série C

EXERCICE I

On considère l'équation (E) :
$z^3-(5+3i)z^2+(6+11i)z-10i=0$, où z
désigne un nombre complexe.

$1°$) a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle z_1.

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution de (E) telle que $\boldsymbol{R\varepsilon}(z_2)=z_1$ et z_3 la troisième solution.

$2°$) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J), on appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Déterminer le barycentre des points pondérés $(A,2),(B,-2)$ et $(C,1)$.

b) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S. S.

c) Calculer l'affixe du point C', image de C par

d) Sans aucun calcul, démontrer que le barycentre des points pondérés $(B,2),(C,-2)$ et $(C',1)$ est le point I.

EXERCICE 2

$1°$) a) Soit deux nombres réels naturels p et q tels que $p>q$. Démontrer que $p+q$ et $p-q$ sont de même parité.

b) En déduire que p^2-q^2 est soit impair, soit multiple de 4.

$2°$ Soit n un nombre entier naturel.

a) On suppose que n est impair. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels consécutifs p et q tels que; $\mathbf{n}=p^2-q^2$.

b) On suppose que n est multiple de 4 . Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels p et qtels que: $n=p^2-q^2$.

$3°$) Déduire des questions $1°$) et $2°$) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier naturel soit la différence des carrés de deux nombres entiers naturels.

PROBLEME

L'objet du problème est de démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$$

en utilisant le calcul intégral.

Partie A:

$1°$) Démontrer par récurrence que:

$$\forall n\in IN^*\ \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

$2°$) Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases}u_o=1\\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\end{cases}$$

a) Déduire du $1°$) que la suite u est majorée par 3.

b) Démontrer que la suite u est convergente, sans chercher à calculer sa limite.

Partie B:

On considère la fonction f_o de IR vers IR définie par : $f_o(x)=e^{-x}$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n de IR vers IR définie par :

$$f_n(x)=x^ne^{-x}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé ($0, I, J$)
(unité 4 cm), on désigne par (C_0) et (C_n) les représentations graphiques respectives de f_o et f_n.

1°) Etudier les variations de f_0 et f_1. Préciser la position de (C_0) par rapport à (C_1). Construire les courbes (C_0) et (C_1) sur une même figure
(prendre $\mathrm{e} = 2{,}7$ et $\mathrm{e}^{-1} = 0{,}37$).
2°) Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$, en distinguant deux cas suivant la parité de n.
3°) Construire les courbes (C_2) et (C_3) sur une autre figure que la figure du $1°$).

Partie C:

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction $\mathrm{F_n}$ définie sur IR_+par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

1°) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour tout x appartenant à I
R_+. Calculer ensuite $\lim_{x\to+\infty} F_0(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F_1(x)$.
2°) Démontrer que:
$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{IN}^* \forall \mathrm{x} \in IR_+ \mathrm{F_n(x)} = -\mathrm{x^n e^{-x}} + \mathrm{nF_{n-1}(x)}$.

Partie D.

Le but de cette dernière partie est de calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in IN}$ de la partie A.
1°) a) Démontrer que:
$\forall n \in IN^* \dfrac{F_n(1)}{n!} = -\dfrac{e^{-1}}{n!} + \dfrac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$
b) En déduire que :
$\forall n \in IN \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} u_n$.
2°) a) Démontrer que:
$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{IN}^* \ \forall \mathrm{t} \in [0,1] \ 0 \leq \mathrm{f_n(t)} \leq \mathrm{e^{-1}}$.
b) En déduire que: $\forall n \in IN^* 0 \leq F_n(1) \leq \mathrm{e}^{-1}$.
3°) Déduire des résultats des questions précédentes la limite lorsque n tend vers l'infini de :
$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

CORRIGES DES EXAMENS

CORRECTION SESSION NORMALE 2023 Série C

EXERCICE 1

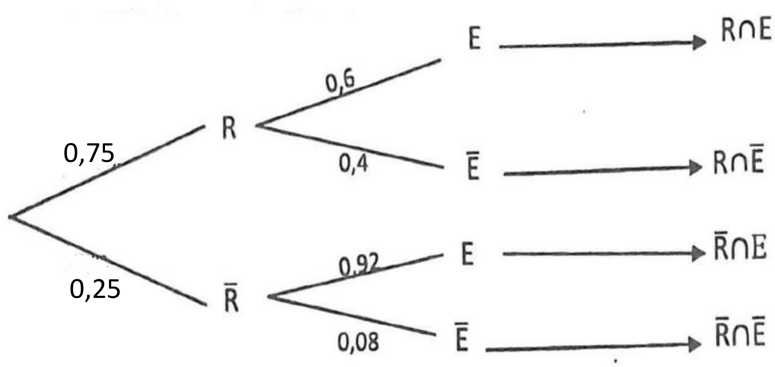
1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Vrai

EXERCICE 2

1. C
2. D
3. A
4. A

EXERCICE 3

1°) a- Arbre pondéré de la situation



b-Donnons les probabilités suivantes: $P(R); P_{\overline{R}}(\overline{E}); P_R(E)$

$P(R) = \frac{75}{100} = 0{,}75$

$P_{\overline{R}}(\overline{E}) = 0{,}08$

$P_R(E) = 0{,}6$

2°) a - Calculons $P_R(\bar{E})$

On a: $P_R(E) + P_R(\bar{E}) = 1$ d'où $P_R(\bar{E}) = 1 - P_R(E) = 1 - 0{,}6$

Donc $P_R(\bar{E}) = 0{,}4$

b-Justifions que $P(\overline{R} \cap E) = 0{,}23$

On a: $P_{\bar{R}}(\bar{E}) = \frac{P(\bar{R}\cap\bar{E})}{P(\bar{R})}$ d'où $P(\bar{R} \cap \bar{E}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(\bar{E})$ Or $P(\bar{R}) = 1 - P(R)$

$P(\overline{R}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

Donc $P(\bar{R} \cap \bar{E}) = 0{,}25 \times 0{,}08 = 0{,}02$

3°) a- Justifions que la probabilité qu'un scientifique interrogé soit un écologiste est 0,68

On a : $P(E) = P(E \cap R) + P(E \cap \bar{R}) = 0{,}75 \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}92$

Donc $P(E) = 0{,}68$.

b-Calculons la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique.

La probabilité cherchée est : $P_E(\overline{R})$

On a : $P_E(\bar{R}) = \frac{P(E\cap\bar{R})}{P(E)}$
$P_E(\bar{R}) = \frac{0,25\times0,92}{0,68} = 0,3382$ donc : $P_E(\bar{R}) = 0,34$

EXERCICE 4
1° On a: $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$
$\mathrm{D}_m = \{\forall x \in \mathbb{R}/1 - me^{-x} > 0\}$
a-Si $m \leq 0$ alors $1 - me^{-x} > 0$ donc $\mathrm{D}_m = \mathbb{R}$
b- Si $m > 0$ alors $1 - me^{-x} > 0$
Donc $\mathrm{D}_m =]\ln(m); +\infty[$
$e^{-x} < \frac{1}{m}$
$x > -\ln\left(\frac{1}{m}\right)$ d'où $x > \ln(m)$

2°) a - Justifions que pour tout x de $\mathrm{D}_m, f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$
Pour tout x de $\mathrm{D}_m, f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$
$f'_m(x) = 1 + \frac{(1-me^{-x})'}{1-me^{-x}}$ d'où $f'_m(x) = 1 + \frac{me^{-x}}{1-me^{-x}}$
$f'_m(x) = \frac{1}{1-me^{-x}}$; En mettant e^{-x} en facteur, on obtient : $f'_m(x) = \frac{1}{e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} - m\right)}$
D'où $f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$ car $c^x = \frac{1}{e^{-x}}$
Au total, pour tout x de $\mathrm{D}_m, f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$

b- Justifions que pour $m \leq 0, f_m$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Pour tout réel x de $\mathrm{D}_m, f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$ et si $m \leq 0$ alors $e^x - m > 0$ car $e^x > 0$ donc $f'_m(x) > 0$.
Au total, pour tout $m \leq 0, f'_m(x) > 0$ donc f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c- Justifions que pour $m > 0, f_m$ est strictement croissante sur $]\ln(m); +\infty[$
Pour tout réel x de $\mathrm{D}_m, f'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$
Si $m > 0$, on a: $e^x > 0$ et $e^x - m > 0$ d'où $x > \ln(m)$ donc $f'_m(x) > 0$
Au total, pour tout $m > 0, f'_m(x) > 0$ donc f_m est strictement croissante sur $]\ln(m); +\infty[$ 3°) a – 3-3- 3.

3.a)Démontrons que pour tout nombre réel m, f_m est une bijection sur D_m.
Pour tout $m \leq 0, f'_m(x) > 0$ d'où f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f_m est une bijection sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $m > 0, f'_m(x) > 0$ d'où f_m est strictement croissante sur$]\ln(m); +\infty[$ donc f_m est une bijection sur $]\ln(m); +\infty[$.
Au total, pour tout nombre réel m, f_m est une bijection sur D_m.

b) f_m est une bijection sur D_m. On a : pour tout nombre réel m, $f_m(x) = y \Leftrightarrow x = f_m^{-1}(y)$
Or $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$ d'où $x + \ln(1 - me^{-x}) = y$
$\Leftrightarrow \ln e^x + \ln(1 - me^{-x}) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - m) = y \Rightarrow e^x = e^y + m \Rightarrow x = \ln(e^y + m)$
Donc pour tout nombre réel m et pour tout nombre réel x élément de $f_m(D_m)$, on a :
$f_m^{-1}(x) = \ln(e^x + m)$: relation (1)
Pour tout nombre réel m, on a : $f_{-m}(x) = x + \ln(1 + me^{-x})$
$f_{-m}(x) = \ln e^x + \ln(1 + me^{-x})$
$f_{-m}(x) = \ln e^x(1 + me^{-x})$
$f_{-m}(x) = \ln(e^x + m)$ relation (2)

En comparant les relations (1) et (2), on conclut que : pour tout nombre réel m et pour tout nombre réel x élément de $f_m(D_m)$, on a: $f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$

c) Méthode de construction de $(C_{-m}$) dans le même repère que (C_m)

On a : $f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$ et aussi, on sait que f_m est une bijection sur D_m.

D'où la courbe $(C_m^{-1}$) est le symétrique de la courbe (C_m) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

Aussi, la courbe (C_{-m}) est le symétrique de la courbe (C_m^{-1}) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

En conclusion, la courbe $(C_{-m}$) est le symétrique de la courbe $(C_m$) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

4°) a - Justifions que $\left(C_p\right)$ est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p; \ln p)$

On a: $\left(C_p\right)$: $f_p(x) = x + \ln(1 - pe^{-x})$ et (C_1): $f_1(x) = x + \ln(1 - e^{-x})$

Exprimons f_p en fonction de f_1

$f_p(x) = x + \ln(1 - pe^{-x}) \Rightarrow f_p(x) = x + \ln e^{-x}(e^x - p) \Rightarrow$

$f_p(x) = x + \ln e^{-x} + \ln(e^x - p)$. Donc $f_p(x) = \ln(e^x - p)$: Relation (3)

On a : $f_1(x) = x + \ln(1 - e^{-x})$

d'où $f_1(x - \ln p) = (x - \ln p) + \ln\left(1 - e^{-x+\ln p}\right)$

$\Rightarrow f_1(x - \ln p) = (x - \ln p) + \ln\left(1 - e^{-x} \times e^{\ln p}\right)$

$f_1(x - \ln p) = (x - \ln p) + \ln e^{-x}(e^x - p)$

$f_1(x - \ln p) = (x - \ln p) + \ln e^{-x} + \ln(e^x - p)$

$f_1(x - \ln p) = (x - \ln p) - x + \ln(e^x - p)$

$f_1(x - \ln p) = -\ln p + \ln(e^x - p)$ Relation (4)

En observant les relation (3) et (4), on remarque que: $f_1(x - \ln p) = -\ln p + f_p(x)$ D'où $f_p(x) = f_1(x - \ln p) + \ln p$

Au total, $\left(C_p\right)$ est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\ln p \\ \ln p\end{pmatrix}$

NB : On sait que si $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$ alors la courbe $\left(C_g\right)$ est l'image de $\left(C_f\right)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

b - Déterminons la translation T' qui transforme $\left(C_p\right)$ en (C_m)

On a: $\left(C_p\right)$: $f_p(x) = x + \ln(1 - pe^{-x})$ et (C_m): $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$

A partir de la question 4a), et après transformation, on obtient

$f_m(x) = f_p(x - (\ln m - \ln p)) + (\ln m - \ln p)$

Donc la translation T' qui transforme $\left(C_p\right)$ en (C_m) a pour vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\ln m - \ln p \\ \ln m - \ln p\end{pmatrix}$

EXERCICE 5

1°) a- Le couple $(x_0; y_0)$ est solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow 4x_0 - y_0 = 2 \Leftrightarrow y_0 = 2(2x_0 - 1)$ d'où $y_0 = 2k$ avec $k = 2x_0 - 1$. En conclusion y_0 est un nombre pair.

Au total, si le couple $(x_0; y_0)$ est solution de l'équation (E), alors y_0 est pair.

b - Déterminons les valeurs possibles de $\mathrm{PGCD}(x_0; y_0)$

On a: $4x_0 - y_0 = 2$ et $\mathrm{PGCD}(x_0; y_0) = d$ d'où d est un diviseur de 2 .

Donc l'ensemble des diviseurs positifs de d est : $\{1; 2\}$.

Par conséquent $\mathrm{PGCD}(x_0; y_0) = 1$ Ou $\mathrm{PGCD}(x_0; y_0) = 2$

2°) a - Vérifions que le couple $(1; 2)$ est une solution de (E).

On a (E): $4x - y = 2$ d'où $4 \times 1 - 2 = 2$ donc le couple $(1; 2)$ est une solution de (E).

b) On a : $4x - y = 2$ et $4x_0 - y_0 = 2$. En faisant la soustraction des deux équations, on obtient: $4(x - x_0) = y - y_0$.
4 divise - y_0. D'après le théorème de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 4k$ d'où $y = 4k + y_0$ c'est-à-dire $y = 4k + 2$
De même, on montre aussi que $x - x_0 = k$ d'où $x = k + 1$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{(1 + k; 2 + 4k)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3°) Déterminons l'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de (E) tels que x et y sont premiers entre eux.
On a: $y = 2(2x - 1)$ d'où y est un nombre pair.
Pour que x et y sont premiers entre eux c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(x; y) = 1$ alors il faut que x soit impair. D'où $x = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent: $k + 1 = 2n + 1 \Rightarrow k = 2n$
L'ensemble des solutions de (E) tels que x et y sont premiers entre eux :
$\{(2n + 1; 8n + 2), n \in \mathbb{Z}\}$

4°) a - Justifions que $3c + 2$ est un multiple de 4
On a : $p = \overline{ac2^3} = 9a + 3c + 2$ et $p = \overline{baa^4} = 16b + 5a$.
On en déduit que $9a + 3c + 2 = 16b + 5a$ d'où $3c + 2 = 4(4b - a)$
En conclusion $3c + 2$ est un multiple de 4.

b - L'écriture de l'entier p en base 3 a pour reste : $\{0; 1; 2\}$
On a: Pour $c = 0$ alors $3c + 2 = 2$ qui n'est pas un multiple de 4
Pour $c = 1$ alors $3c + 2 = 5$ qui n'est pas un multiple de 4
Pour $c = 2$ alors $3c + 2 = 8$ qui est un multiple de 4
En conclusion le nombre c est égal à 2 .

c – En utilisant la question 2 b, on a ontenu le couple $(1 + k; 2 + 4k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ comme solution de (E). Le seul couple solution qui vérifie la question 4 a) et $4b$) est $(1; 2)$ pour $k = 0$ car $0 \leq a \leq 2$ et $0 \leq b \leq 2$, a et b sont les restes communs en base 3 et 4 .
Pour $a = 1$ et $b = 2$, on a : $4(4b - a) = 32$ et $3c + 2 = 8$ ce qui est faux car pas d'égalité Pour $a = 2$ et $b = 1$, on a: $4(4b - a) = 8$ et $3c + 2 = 8$ ce qui est juste.
En conclusion, on obtient $a = 2$ et $b = 1$.

d-Dans les deux bases, le nombre p est égal : $p = \overline{222^3}$ et $p = \overline{122^4}$
Dans le système décimal, le nombre p est égal: $p = 9 \times 2 + 3 \times 2 + 2 = 26$

EXERCICE 6
Pour répondre à la préoccupation de cette étudiante, je vais utiliser des notions d'équations différentielles. Pour cela, je vais déterminer une équation différentielle liant P et P' :
On a $(E): P'(t) = -\lambda \cdot P(t)$
Résolution de l'équation (E)
$$\mathrm{P}'(t) = -\lambda \cdot \mathrm{P(t)} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{P}'(t)}{\mathrm{P(t)}} = -\lambda \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \ln|\mathrm{P(t)}| = -\lambda t + c$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(t) = ke^{-\lambda t}$$
Pour $\mathrm{t} = 0$, on a: $\mathrm{P}(0) = ke^0 = k$ d'où $\mathrm{P}(0) = p_0$
Donc la solution de l'équation différentielle (E) est : $P(t) = p_0 e^{-\lambda t}$ Relation (1)

Détermination de la valeur de t correspondant à 70% de teneur en carbone 14 relativement à l'os temoin. Sachant que le fragment découvert à une teneur en carbone 14 égale à 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse pris comme témoin, alors on a: $P(t) = 0{,}7.\, p_0$ Relation (2) En posant l'égalité entre les relations (1) et (2), on a : $\mathrm{P}(t) = p_0 e^{-\lambda t} = 0{,}7.\, p_0$ d'où $e^{-\lambda t} = 0{,}7 \Leftrightarrow -\lambda t = \ln(0{,}7) \Leftrightarrow\ t = -\frac{\ln(0{,}7)}{\lambda}\ \Rightarrow\ t = -\frac{\ln(0{,}7)}{1{,}2444 \times 10^{-4}}$

D'où $t = 2866{,}24$

Au total, l'âge de l'os découvert est 2866 ans

CORRECTION SESSION NORMALE 2022 Série C

EXERCICE 1

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Faux

EXERCICE 2

1. D
2. C
3. D
4. B

EXERCICE 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points $\mathrm{A}(0; 4; 1), \mathrm{B}(1; 3; 0), \mathrm{C}(2; -1; -2), \mathrm{E}(7; -1; 4)$ et le vecteur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

1. Démontrons que les points A, B et C déterminent un plan.

On a: $\overrightarrow{AB}(1; -1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -5; -3)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés; donc les points A, B et C déterminent un plan.

2. a)Démontrons que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$ et

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \times 2 + (-5) \times (-1) + 3 \times (-3) = 0$ donc on a:

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$$

Au total, le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Justifions qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$

On a : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC)

L'équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 3z + d = 0$

Or A appartient au plan (ABC) d'où : $2x_A - y_A + 3z_A + d = 0$

$$2 \times 0 - 4 + 3 + d = 0 \text{ d'où } d = 1$$

Donc l'équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 3z + 1 = 0$

c) Vérifions que le point E n'appartient pas au plan (ABC).

On a : $2x_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{E}} + 3z_{\mathrm{E}} + 1 = 2 \times 7 - (-1) + 3 \times 4 = 27$

Donc le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3.a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ).

(Δ) est la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit $\mathrm{M}(x; y; z)$ un point de la droite (Δ). Il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{EM}} = t \times \vec{u}$.

On a: $\overrightarrow{\mathrm{EM}}\begin{pmatrix} x-7 \\ y+1 \\ z-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{EM}} = t \times \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ c'est l'équation paramétrique de la droite (Δ).

b) Justifions que le point K a pour coordonnées $(3; 1; -2)$.

On a: $\{K\} = (\Delta) \cap (ABC)$ d'où $K(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$ et $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Déterminons t en remplaçant x, y et z.

On a : $2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$

On obtient: $28 + 14t = 0$ donc $t = -2$

En remplaçant la valeur de t dans le système $\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$, on obtient les coordonnées de

k: $(3; 1; -2)$

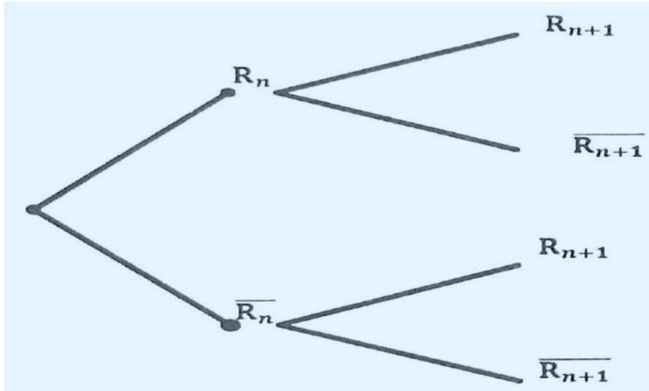
c). Calcule la distance EK.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{EK}}(-4; 2; -6)$

$\mathrm{EK} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{56}$ donc $\mathrm{EK} = 2\sqrt{14}$

EXERCICE 4

Arbre de choix



1.a) Justifions que: $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20}p_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5}q_n$

L'employé est en retard le lendemain sachant qu'il est en retard le jour n.

On a: $\mathrm{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{R}_n \cap \mathrm{R}_{n+1})}{\mathrm{P}(\mathrm{R}_n)}$ d'où $\mathrm{P}(\mathrm{R}_n \cap \mathrm{R}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{R}_n) \times \mathrm{P}_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$

Donc $P(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20} \times P_n$ avec $P(R_n) = P_n$ et $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$

L'employé est en retard le lendemain sachant qu'il n'est pas en retard le jour n.

On a: $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})}{P(R_n)}$ d'où $P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

Donc d'où $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{R}_n} \cap \mathrm{R}_{n+1}) = \frac{1}{5} \times q_n$ avec $\mathrm{P}(\overline{R_n}) = q_n$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{R}}_n}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{1}{5}$

b) Déterminons p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

D'après l'arbre de choix, on a: $P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$

D'où $\mathrm{P}(\mathrm{R}_{n+1}) = \frac{1}{20} \times \mathrm{P}_n + \frac{1}{5} \times q_n$ Donc $\mathrm{P}_{n+1} = \frac{1}{20} \times \mathrm{P}_n + \frac{1}{5} \times q_n$ avec $\mathrm{P}_{n+1} = P(R_{n+1})$

c) Déduisons-en que : $P_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}P_n$.

On sait que: $\mathrm{P}_n + q_n = 1$ d'où $q_n = 1 - \mathrm{P}_n$

On a : $P_{n+1} = \frac{1}{20} \times P_n + \frac{1}{5} \times q_n$

$$P_{n+1} = \frac{1}{20} \times P_n + \frac{1}{5} \times (1 - P_n)$$
$$P_{n+1} = \frac{1}{20} \times P_n - \frac{1}{5} \times P_n + \frac{1}{5}$$

Donc $P_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}P_n$.

2. On pose: $v_n = \mathrm{P}_n - \frac{4}{23}$

a) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

On a: $v_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1} - \frac{4}{23} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}\mathrm{P}_n - \frac{4}{23}$ avec $\mathrm{P}_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}\mathrm{P}_n$.

D'où $v_{n+1} = \frac{3}{115} - \frac{3}{20}P_n \Leftrightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{20}\left(-\frac{4}{23} + P_n\right)$

Donc $v_{n+1} = -\frac{3}{20}v_n$ avec $v_n = \mathrm{P}_n - \frac{4}{23}$

Au total, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$

b) Déterminons son premier terme v_2

On a: $v_n = \mathrm{P}_n - \frac{4}{23}$ d'où $v_2 = \mathrm{P}_2 - \frac{4}{23}$ or $\mathrm{P}_2 = \frac{1}{5}$. Donc $v_2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{23} = \frac{3}{115}$
3.a) Calculons la limite de la suite (v_n)

On sait que: $v_n = v_2\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-2}$ donc $v_n = \frac{3}{115}\left(-\frac{3}{20}\right)^{n-2}$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ car la raison $q = -\frac{3}{20}$ et $|q| < 1$

b) Déduisons-en la limite de la suite (p_n)

On sait que: $v_n = \mathrm{P}_n - \frac{4}{23}$ d'où $\mathrm{P}_n = v_n + \frac{4}{23}$

On a : $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(v_n + \frac{4}{23}\right) = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{23}\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{4}{23}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

EXERCICE 5

1.a) Justifions que: $\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$

On a : $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+n\ln(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(1 + n\ln(x)) \times \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}(1 + n\ln(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

b) Justifions que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+n\ln(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + n\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} n\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

c) Donne une interprétation graphique des résultats des questions 1.a) et 1.b).

On a : $\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ ou la droite (OJ) est une asymptote verticale à la courbe (C_n)

On a: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ ou la droite (OI) est une asymptote horizontale à la courbe (C_n) en $+\infty$.

2.a) On admet que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$

Justifions que : $\forall x \in]0; +\infty\left[, f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}\right.$
On a : $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$

$$f_n'(x) = \frac{n\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x(1+n\ln(x))}{x^4}$$
$$f_n'(x) = \frac{n\times x - 2x(1+n\ln(x))}{x^4}$$
$$f_n'(x) = \frac{n-2(1+n\ln(x))}{x^3}$$
$$f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty\left[, f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}\right.$

b) Déterminons les variations de f_n sur $]0; +\infty[$

Tableau de signe de $f_n'(x)$ et sens de variation de f_n sur $]0; +\infty[$

x	0		$e^{\frac{n-2}{2n}}$		$+\infty$
$n-2-2n\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^3		$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	

Pour tout $\epsilon]0; e^{\frac{n-2}{2n}}[, f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissant sur $]0; e^{\frac{n-2}{2n}}[$. Pour tout $x \in]e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[, f_n'(x) < 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $]e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[$

c) Vérifions que : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2\pi}}\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$

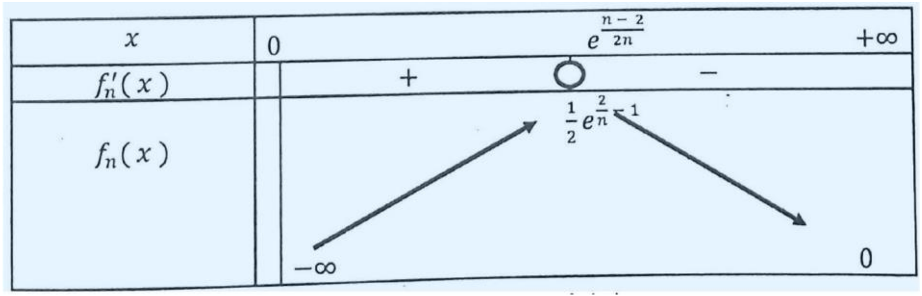
On a: $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$

D'où on a: $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{1+n\ln\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)}{\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)^2}$

$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{1+\frac{n-2}{2}}{e^{\frac{n-2}{n}}}$ d'où $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n-2}{n}}}$

$f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{\frac{n}{2}}{e^{1-\frac{2}{n}}}$ donc $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$

d) Tableau de variations



3.a) Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty\left[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}\right.$

On a: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1+(n+1)\ln(x)}{x^2} - \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x) + \ln(x) - 1 - n\ln(x)}{x^2}$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Donc $\forall x \in]0;+\infty\left[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}\right.$

b) Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

On sait que : $\forall x \in]0;+\infty\left[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}\right.$

Etudions le signe de $\frac{\ln(x)}{x^2}$, puis comparons $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$; ensuite donnons la position de (C_n) et (C_{n+1})

On a: $\forall x \in]0;1\left[\frac{\ln(x)}{x^2} < 0\right.$ d'où $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

$$\forall x \in]1;+\infty\left[, \frac{\ln(x)}{x^2} > 0\right. \text{ d'où } f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

Au total: $\forall x \in]0;1[, f_{n+1}(x) < f_n(x)$ donc la courbe (C_{n+1}) est en dessous de la courbe (C_n) sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$ donc la courbe (C_{n+1}) est au dessus de la courbe (C_n) sur $]1;+\infty[$.

4. a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que: $I = 1 - \frac{2}{e}$

On a : $1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

Posons: $U = \ln(x)$ et $V' = \frac{1}{x^2}$

On a: $U' = \frac{1}{x}$ et $V = -\frac{1}{x}$

D'où $\mathrm{I} = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$

$\mathrm{I} = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e$

$1 = -\frac{\ln(e)}{e} + \frac{\ln(1)}{1} - \frac{1}{e} + 1$

Donc: $1 = -\frac{2}{e} + 1$

b)Déduis-en l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes $(C_n), (C_{n+1})$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$

$$\mathcal{A} = \int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx \cdot u \cdot a$$
$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{e} + 1\right) \cdot u \cdot a$$
$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{e} + 1\right) \cdot 9 \cdot \mathrm{cm}^2$$
$$\mathcal{A} = \left(-\frac{18}{e} + 9\right) \mathrm{cm}^2$$

EXERCICE 6

$1°$) Pour répondre au chef de service technique, je vais utiliser des notions d'arithmétique.

- Convertissons en Cm, les dimensions de la salle :

On a: longueur $L = 14{,}40\ \mathrm{m}$ d'où $L = 1440\ \mathrm{cm}$

Largeur $\ell = 8{,}70\ \mathrm{m}$ d'où $L = 870\ \mathrm{cm}$

- Calculons le PGCD $(1440; 870)$

On a : L'algorithme d'Euclide donne

Dividende.	1440	870	570	300	270
Diviseur	870	570	300	270	30
Reste	570	300	270	30	00

Donc PGCD $(1440; 870) = 30$

Au total, le chef du service technique a raison de penser que les carreaux de côté $30\ \mathrm{cm}$ conviennent si l'on veut éviter des découpes de carreaux.
$2°$) Pour déterminer le nombre de paquets de 20 et le nombre de paquets de 12 que le chef du service technique doit commander, je vais :

- déterminer le nombre total de carreaux de $30\ \mathrm{cm}$

Aire de la salle : $A_1 = L \times \ell$

$A_1 = 1440 \times 870 = 1252800\ \mathrm{cm}^2$

Aire d'un carreau de 30 cm

$A_2 = 30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$

Nombre total de carreaux de 30 cm

$N = \frac{1252800}{900} = 1392$

- traduire par une équation la relation entre le nombre de paquets de 20 et de 12 :

Soit x le nombre de paquets de 20 et y le nombre de paquets de 12

On a : $20x + 12y = 1392$

- Résoudre l'équation $20x + 12y = 1392$

L'équation $20x + 12y = 1392$ équivaut à $5x + 3y = 348$

On a : $\text{PGCD}(5; 3) = 1.$

348 est un multiple de $\text{PGCD}(5; 3)$ donc l'équation admet une solution dans $\mathbb{Z}$.

Déterminons une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation

On a: $5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$ d'où $5 \times (-348) + 3 \times 696 = 348$

Donc une solution particulière est : $(x_0; y_0) = (-348; 696)$

Déterminons toutes les solutions de l'équation

On a: $5x + 3y = 348$ et $5x_0 + 3y_0 = 348.$

Après avoir fait la soustraction des deux équations, on obtient : $5(x - x_0) = -3(y - y_0)$

On a 3 divise $5(x - x_0)$ et $\text{PGCD}(5; 3) = 1$ d'où 3 et 5 sont premiers entre eux;

D'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x - x_0)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x_0 = 3k$

donc $x = 3k + x_0$

On obtient aussi après calcul $y = -5k + y_0$

L'ensemble des solutions de l'équation $5x + 3y = 348$ est :

$(x; y) = (3k - 348; -5k + 696)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- utiliser la contrainte pour déterminer le nombre de paquets de 20 et de 12

On a: $x > 66$ et $y > 0$ avec $x = 3k - 348$ et $y = -5k + 696$

Après calcul, on a : $k = 139$; d'où $x = 69$ et $y = 1$

Au total, le chef de service technique doit commander 69 paquets de 20 et 1 paquet de 12

CORRECTION SESSION NORMALE 2021 Série C

EXERCICE 1

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Faux

EXERCICE 2

1. B   3.D
2. C   4.D

EXERCICE 3

1. a) Justifions que A, B et C déterminent un plan.

Pour justifier que A, B et C déterminent un plan, il suffit de justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non coplanaires

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$. De plus : $\frac{0}{2} \neq \frac{-2}{-2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non coplanaires On en déduit que A, B et C détermineat un plan.

Autre méthode:

Soit k et k' deux nombres réels tels que : $k\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

On a: $k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 0 \\ 4k = 0 \\ -2k - 2k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = k' = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non coplanaires

b) Démontrons qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + y + 2z - 4 = 0$.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\beta \\ y = 4a \\ z - 2 = -2a - 2\beta \end{cases}$$

On a alors : $z - 2 = -2 \times \left(\frac{1}{4}y\right) - 2 \times \left(\frac{1}{2}x\right)$ donc $z - 2 = -\frac{1}{2}y - x$ d'où : $2x + y + 2z - 4 = 0$. Ainsi, une équation cartésierne du plan (ABC) est : $2x + y + 2z - 4 = 0$.

2. a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D).

La droite (D) a pour repère $(A, \vec{1})$.

Soit $\mathrm{M}(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (D) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 5\lambda \end{cases}$$

Donc le système : $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 5\lambda \end{cases}$, , a $\mathbb{E}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

b) Justifions que (D) est incluse dans le plan (ABC).

la droite (D) a pour repère $(A, \vec{\imath})$ et le plan (ABC) passe par B et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

On a: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 4 + 1 \times 2 + 2 \times (-5) = 8 + 2 - 10 = 0$.

Par ailleurs : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 0 + 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$

Comme $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, on en déduit que la droite (D) est incluse dans le plan (ABC).
c] Justifions que la droite (D) est la hauteur du triangle ABC issue du point A.

On a i $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, D'où $\vec{1} \cdot \overrightarrow{BC} - 4 \times 2 + 2 \times (-1) + (-5) \times 9 - 8 - 8 - 0$

Donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{BC}$, de plus la droite (D) passe par A et est incluse dans le plan (ABC).
Par conséquent, (D) est la hauteur du triangle ABC issue du point A.

3. a) Justifions que les plans ($\mathcal{P}$) et (ABC) sont perpendiculaires.

Les plans (P) et (ABC) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

On $a{:}\overrightarrow{n'} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 - 2 \times 1 + 0 \times 2 = 0$.
Donc les plans $(\mathcal{P})$ et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Démontrons que: $\{(D)] = (\mathcal{P}) \cap (ABC)$.
On sait que ($\mathcal{P}$) et (ABC) sont perpendiculaires donc sécants suivant une droite.
De plus $(D) \subset (ABC)$.
Justifions que (D) $\subset (\mathcal{P})$.

1En effet, la droite (D) passe par le point $A(0;0;2)$ et de vecteur directeur $\bar{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$.

Le plan $(\mathcal{P}$) passe par le point O et de vecteur normal $\overrightarrow{n^2}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n'} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$ donc $(D) \subset (\mathcal{P})$. On en déduit que $\{(D)\} = (\mathcal{P}) \cap (ABC)$.
Autre méthode:
(P) : $x - 2y = 0$.
(ABC): $2x + y + 2z - 4 = 0$.
Soit $M(x{:}y{:}z)$ un point de l'espace.

$M \in (\mathcal{P}) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

Posons: $y = t$.

le système devient: $\begin{cases} x = 2t \\ z = 2 - \frac{5}{2}t \end{cases}$

Ainsi. (P) ∩ (ABC) est une droite de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - \frac{5}{2}t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ et cette droite passe par le point $M(0;0{:}2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\1\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$,

Or $\overrightarrow{u'} = \frac{1}{3}\vec{u}$.
$\overrightarrow{t'}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires, on en déduit que $(P) \cap (ABC)$ est la droite(D).
D'où $((D)) = (P) \cap (ABC)$.

EXERCICE 4

1. Démontrons que tout diviseur de X qui divise k, divise 2 .

On a : $X = k^2 - 2k + 2$
Donc $X - (k^2 - 2k) = 2$
D'ou : tout diviseur de X et k divise $X - (k^2 - 2k)$ donc divise 2 .
2. Démontrons que tout diviseur de X et Y divise $4k$.
Pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a :

$Y - X = (k^2 + 2k + 2) - (k^2 - 2k + 2) = 4k.$
Donc tout diviseur de X et Y divise $Y - X$ donc divise $4k$.
3. a) Justifions que X et $\boldsymbol{Y}$ sont impairs.
k étant impair, $k = 2n + 1$ où $n \in \mathrm{Ne}^*$,
Donc $X = (2n + 1)^2 - 2(2n + 1) + 2 = 4n^2 + 1$
$x - 2 \times (3n^2) \mid 1 - 2q + 1$ vù $\eta = 2n^2$ et $\mathrm{q} \in \mathbb{N}$
D'ou X est impair.
On a aussi: $Y = (2n + 1)^2 + 2(2n + 1) + 2\pi n^2 + 8n + 4 + 1$
$Y = 2 \times (2n^2 + 4n + 2) + 1 = 2q'$? dú $q' = 2n^2 + 8n^2 + 2$ et $q' \in \mathbb{N}$
D'où Y est impair.

b) Déduisons que m est impair.
Supposons que m est pair.
On a : m divise X et m est pair donc X est pair.
Ce qui est absurde car X est impair.
Donc in est impair.
4. a) Justifions que m divise 2 .
m divise X et Y donc m divise $4k$.
m étant impair, m et 4 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, m divise k.
De plus, 1 divise X.
m divise X et k d'après 1.) m divise 2 .
b) Déduisons des questions précédentes que: $\mathrm{PGCD}(X, Y) = 1$.
On a: $\mathrm{PGCD}(X, Y) = m$.
De plus m est impair et m divise 2 .
Donc $m = 1$
Par suite, $\mathrm{PGCD}(X, Y) = 1$.

EXERCICE 5

1. a) Déterminons $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^x + 2e^{-x}) = +\infty$

$$\text{car: } \begin{cases} \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 2e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \end{cases}$$

De plus $\lim_{x \to +\infty} \ln(X) = +\infty$
Donc $\lim_{x+\infty}^{x-\infty} g(x) = +\infty$
b) Déterminons $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

Car: $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(e^x + 2e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} 2e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{d^x} = +\infty \end{cases}$

De plus $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
Donc $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$,
2. a) Justifions que g est strictement croissante sur $]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}; [$.
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - 2e^{-x})}{e^x(e^x - 2e^{-x})}$ donc $g'(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$
$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $e^{2x} - 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{2}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 2}{2}$

Donc $\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty; \frac{\ln 2}{2}[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[, g'(x) > 0 \end{cases}$

D'où g est strictement croissante sur $]\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}[$.

b) Vérifions que : $g\left(\frac{\ln 2}{z}\right) = \ln(2\sqrt{2})$..

On a : $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\ln 2}{2}} + 2e^{\frac{-\cos}{2}}\right) = \ln\left(e^{in\sqrt{2}} + 2e^{-\ln\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{2})$

Donc : $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln(2\sqrt{2})$.

c) Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$
   $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln[e^x(1 + 2e^{-2x})]$
   $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(e^*) + \ln(1 + 2e^{-2x})$
   $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

   b) Déduisons que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + 2e^{-2x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + 2e^{-2x}) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-2x} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \ln(1) = 0$

D'où la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$,

c) Justifions que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

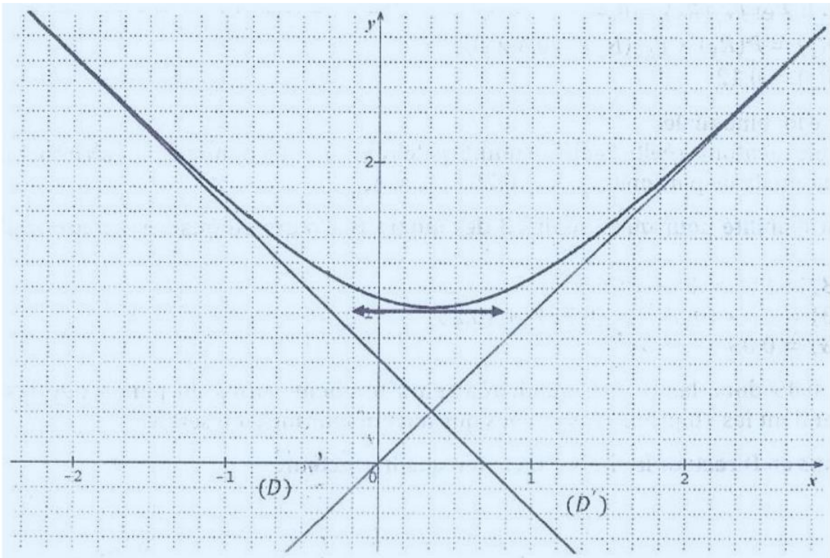
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - x = \ln\left(1 + 2e^{-2k}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + 2e^{-2x} > 1$ donc $\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) - x > 0$.

On en déduit que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur R.

4. Traçons (C), (D) et (D').



5. a) Donnons une interprétation géométrique de J.
On a: $J = \int_0^1 (g(x) - x)\Big) dx$
Donc J est l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
b) Justifions que $0 < J < 0{,}87$
Un sait que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$
En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]0; +\infty[\ln(1 + x) \leq x$,
on en déduit que : $\forall x \in [0; 1]\ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$
On a : $\forall x \in [0; 1], 0 < \ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$
Donc $0 < \int_0^1 \ln(1 + e^{-2x}) dx \leq \int_0^1 2e^{-2x} dx$

$$0 < J \leq [-e^{-2x}]_0^1$$

$0 < I \leq 1 - e^{-2}$ or $1 - e^{-2} \approx 0{,}864 \rightarrow 1 - e^{-2} < 0{,}87$

D'où $0 < j < 0{,}87$.

EXERCICE 6
Pour répondre à la préoccupation du Directeur, nous allons utiliser les probabilités conditionnelles et variables aléatoires.
Pour cela nous allons procéder comme suit :
- Calculer la probabilité pour que les réacteurs R_1 et R_2 du biréacteur tombent en panne simultanément;
- Définir une loi binomiale;
- Calculer la probabilité pour qu'au moins trois (3) des quatre (4) réacteurs du quadriréacteur tombent en panne;
- Comparer ces deux probabilités et conclure.

Calculons la probabilité pour que les réacteurs R_1 et R_2 du biréacteur tombent en panne simultanément.
Soit les évènements suivants
R_1: « le réacteur R_1 tombe en panne. » :
R_2: « le réacteur R_2 tombe en panne »

On a: $P(R_1) = 0.3$ et $P_{R_1}(R_2) = 0,4$
Dose $P(R_1 \cap R_2) = P(R_L) \times P_{R_1}(R_2) = 0,3 \times 0,4$

$$P(R_1 \cap R_2) = 0,12$$

Définissons une loi binomiale
Soit X la variable alťatoire réelle égale au nombre de réacteurs en panue du quadriréacteur. X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0.25$ et $n = 4$.
Calculons la probabilité pour qu'au moins 3 des quatre réacteurs du quadriréacteur tombent en panne.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

On a: $P(X \geq 3) = C_6^3 \times (0,25)^3 \times (0,75)^1 + (0,25)^4$

$$P(X \geq 3) = 0,05$$

On a: $0,12 > 0,05$ donc les avions quadrirèacteurs tombent moins en panne que les avions biréacteurs pendant les 10 premières andées qui suivent leur mise en service.
Nous conseillons au Directeur le choix d'un avion quadriréacteur.

CORRECTION SESSION NORMALE 2020 Série C

EXERCICE 1

1. a) Placé les points A, B et C (voir repère)

b) Montrons que ABC est un triangle rectangle isocèle.
On a : $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{(2+2i)-(2-2i)}{(2+2i)-(-2+2i)} = i$
Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
c) Ecris sous forme exponentielle
$a = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}; b = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$c = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. a) Déterminons l'application complexe associée à la rotation.

L'écriture complexe de r est : $z' = az + b$
On a: $r(\Lambda) = B$ et $r(0) = 0$ d'où $b = 0$ et $a(2 - 2i) = 2 + 2i$
On obtient $a = i$ et $b = 0$
Donc l'écriture complexe de r est : $z' = iz$
b) Image du point B par r
On a: $z'_B = iz_B \Rightarrow z'_B = i(2 + 2i) = -2 + 2i$ donc $r(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$
c) Nature et élément caractéristiques de (Γ')
(Γ) est le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2 .
L'image de Ω d'affixe 2 par rest Ω' d'affixe $2i$ (Utiliser $z' = iz$)
Donc (Γ') est le cercle de centre Ω' d'affixe $'2i$ et de rayon 2
d) Construction de (Γ) et (Γ'). (Voir figure)

3. a) Montrons que M est un point de (Γ)

L'équation cartésienne de (Γ) est: $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$
M a pour affixe $z = 2 + 2ie^{i\alpha} \Rightarrow x + iy = 2 + 2ie^{i\alpha} \Rightarrow$
$x + iy = 2 - 2\sin\alpha + 2i\cos\alpha$ d'où $x = 2 - 2\sin\alpha$ et $y = 2\cos\alpha$
En remplaçant x et y de M dans l'équation cartésienne de (Γ), on obtient :
$(2 - 2\sin\alpha - 2)^2 + (2\cos\alpha)^2 = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4$ Donc le point M est un point de (Γ)
b) On a : M' est l'image de M par r et r a pour écriture complexe $z' = iz$
d'où $z_{M'} = iz_M \Rightarrow z' = i(2 + 2ie^{i\alpha})$ Donc $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$
c) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ est: $\nearrow_M - \varkappa_B = u \Rightarrow 2 + 2ie^{iat} - (2 + 2i) = u$
donc $u = -2i + 2ie^{i\alpha}$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ est: : $\%_M\ '\ \varkappa_B = v \Rightarrow$
$2i - 2e^{i\alpha} - (2 + 2i) = v$ donc $v = -2 - 2e^{i\alpha}$

4. a) Démonstration

$e^{2ix} + 1 = \cos 2x + i\sin 2x + 1 = (\cos x + i\sin x)^2 + \cos^2 x + \sin^2 x$
$e^{2ix} + 1 = 2\cos^2 x + 2i\cos x\sin x = 2\cos x(\cos x + i\sin x)$
Donc $e^{2ix} + 1 = 2e^{ix}\cos x$ avec $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{2ix} - 1 = \cos 2x + i\sin 2x - 1 = (\cos x + i\sin x)^2 - (\cos^2 x + \sin^2 x)$
$e^{2ix} - 1 = -2\sin^2 x + 2i\cos x\sin x = 2\sin x(-\sin x + i\cos x)$
$e^{2ix} - 1 = 2i\sin x(\mathrm{con}\, x + i\sin x)$ donc $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix}\sin x$
b) Démontrons que : $\frac{u}{v} = \tan\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{U}{V}=\frac{-2i+2ie^{i\alpha}}{-2-2e^{i\alpha}}=\frac{i(-1+e^{i\alpha})}{-(1+e^{i\alpha})}=\frac{i\left(2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{-\left(2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Donc $\frac{u}{v}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

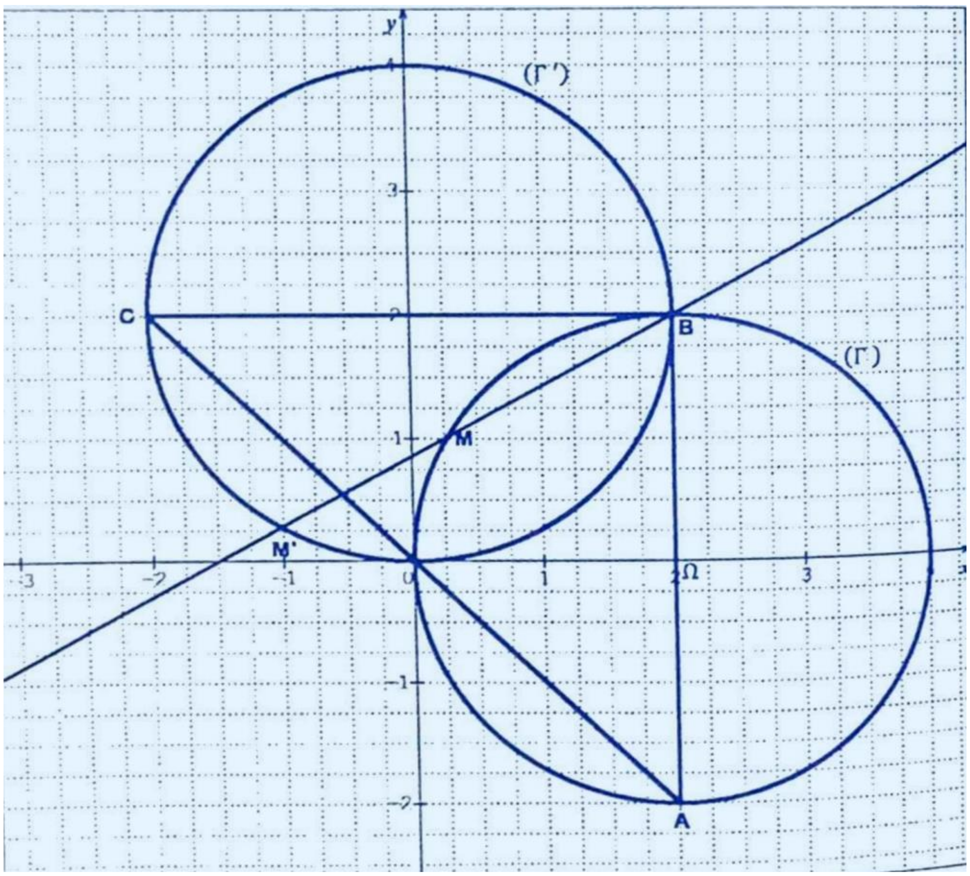
c)On a $\frac{u}{v}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ d'où $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}^*$, donc les points M, M' et B sont alignés.

5 . a)Forme algébrique de l'affixe de M.

Ona $z=2+2ie^{i\alpha}$ or $\alpha=\frac{\pi}{3}$ donc $z=2+2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $\Rightarrow$

$$z=2+2i\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow z=2-\sqrt{3}+i$$

b) Construction de M et $r(\mathrm{M})$ (Voir figure)



EXERCICE 2

1. Exprimons en fonction de k la note globale N de ce candidat.
   $N=4k$
2. a) Les valeurs prises par X

Il y a 5 questions à choix multiples, d'où $X=\{0;1;2;3;4;5\}$

b) Démontre que: $P(X=3)=\frac{45}{512}$

La probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$ et celle de donner une réponse fausse est $\frac{3}{4}$

Nous sommes en présence d'une loi binomiale. Donc la probabilité d'obtenir 3 réponses justes est : $\mathrm{P(X=3)}=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\Rightarrow \mathrm{P(X=3)}=10\times\frac{9}{1024}$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\frac{90}{1024}$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\frac{45}{512}$

c) La probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10

$\mathrm{P}=\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)$

$$P=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}$$

$P=\frac{106}{1024}$ donc $P=\frac{53}{512}$

3. a) La probabilité P_n est:

La probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est $\frac{53}{512}$ et la probabilité pour que le candidat ait une note globale inférieure à 10 est : $1-\frac{53}{512}=\frac{459}{512}$

La probabilité pour qu' un des n candidats ait une note globale inférieure à 10 est : $\left(\frac{459}{512}\right)^n$

La probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est: $P_n=1-\left(\frac{459}{512}\right)^n$

b) La valeur minimale de n est :

$P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{459}{512}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{459}{512}\right) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{459}{512}\right)} \Leftrightarrow n \geq 42{,}143$ donc $n=43$

PROBLEME

Partie A

1. a) $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{\frac{x}{2}}=-\infty$ car :

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)e^{\frac{x}{2}}}{x}=-\infty$ car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x}=-1$ et $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

b)On a : $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=-\infty$ donc la courbe (C_1) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ) en $+\infty$

2. a) $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x}{2}}-xe^{\frac{x}{2}}\right)=0$ Car

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}}=0$$

b) On a: $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (où (OJ)) est une asymptote horizontale à (C_1) en $-\infty$

3 . a) Dérivée de f_1

$\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x)=-e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ donc $f_1'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)e^{\frac{x}{2}}$

Signe et sens de variations de f_1

$\forall x\in]-\infty;-1[, f_1'(x)>0$ donc f_1 est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$

$\forall x\in]-1;+\infty[, f_1'(x)<0$ donc f_1 est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

b) Tableau de variations de f_1

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-\infty$

c) Construction de (C_1) (Voir courbe)

Partie B

1 . a) limite de f_n en $+\infty$ suivant la parité de n

Pour n pair, on a : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x)^n e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Pour n impair, on a : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x)^n e^{\frac{x}{2}} = -\infty$ car

b) limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ en $+\infty$ suivant la parité de n

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$$

Pour n pair, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}}{x} = +\infty$ Car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^n}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-1} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$$

Pour n impair, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}}{x} = -\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^n}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x^{n-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$$

c)Ona: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ où $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction (0 J) en l'infini.

2. a) On a: $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$

Posons $X = 1-x$; quand $x \to -\infty$ et $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{X\to+\infty}(X)^n e^{\frac{1-x}{2}} = \lim_{X\to+\infty}(X)^n \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{X}{2}}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{x^n}{e^{\frac{x}{2}}} e^{\frac{1}{2}} = 0, \text{ car}$$

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X^n}{e^{\frac{X}{2}}} = 0 \text{ ct } \lim_{X\to+\infty} e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

b) On a : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_n) en $-\infty$.

3. a) Dérivée de f_n

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = e^{\frac{x}{2}}(1-x)^{n-1}\left(-n + \frac{1}{2}(1-x)\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(1-x)^{n-1}(-2n+1-x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2}(-x - 2n + 1)(1 - x)^{n-1}e^{\frac{x}{2}}$

b) Signe de $f_n'(x)$ suivant la parité de n

Cas : n est pair

x	$-\infty$		$-2n+1$		1		$+\infty$
$-x-2n+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(1-x)^{n-1}$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$e^{\frac{x}{2}}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Au total, $\forall x \in]-\infty; -2n+1[\cup]1; +\infty[, f_n'(x) > 0$

$\forall x \in]-2n+1; 1[, f_n'(x) < 0$

Cas: n est impair

x	$-\infty$		$-2n+1$		1		$+\infty$
$-x-2n+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(1-x)^{n-1}$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Au total, $\forall x \in]-\infty; -2n+1[f_n'(x) > 0$

$\forall x \in]-2n+1; 1[\cup]1; +\infty[, f_n'(x) < 0$

c) Tableau de variation de f_n

Cas : n est pair

x	$-\infty$		$-2n+1$		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↗	$f_n(-2n+1)$	↘	0	↗	$+\infty$

Cas : n est impair

x	$-\infty$		$-2n+1$		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$f_n(-2n+1)$	↘	0	↘	$-\infty$

4. a) Résolution d'équation $f_n(x) = f_{n+1}(x)$

$f_n(x) = f_{x+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)^n e^{\frac{x}{2}} = (1-x)^{n+1} e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow$
$(1-x)^n c^x - (1-x)^{n+1} e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow (1-x)^n e^x (1-(1-x)) = 0 \Rightarrow$
$(1-x)^n e^x (x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0$ ou $x = 0$ car $e^{\frac{x}{2}} \neq 0$
$x = 1$ ou $x = 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{0; 1\}$
b) On sait que l'équation $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ donne $x = 0$ vu $x = 1$
d'où pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$ et pour $x = 1$, on a $f_n(1) = 0$
Donc les courbes (C_n) passent par deux points fixes $\mathrm{J}(0; 1)$ et $\mathrm{I}(1; 0)$
c) Positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1})
On a : $f_n(x) = f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}(x) = 0$
Signe de $f_n(x) = f_{n+1}(x)$
Cas : n est pair

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n(x) - f_{n+1}(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty; 0[, f_n(x) - f_{n+1}(x) < 0$ d'où $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ donc la courbe (C_n) est au dessous de la courbe (C_{n+1}) sur $]-\infty; 0[$
$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f_n(x) - f_{n+1}(x) > 0$ d'où $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ donc la courbe (C_n) est au dessus de la courbe (C_{n+1}) sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$
Cas : n est impair

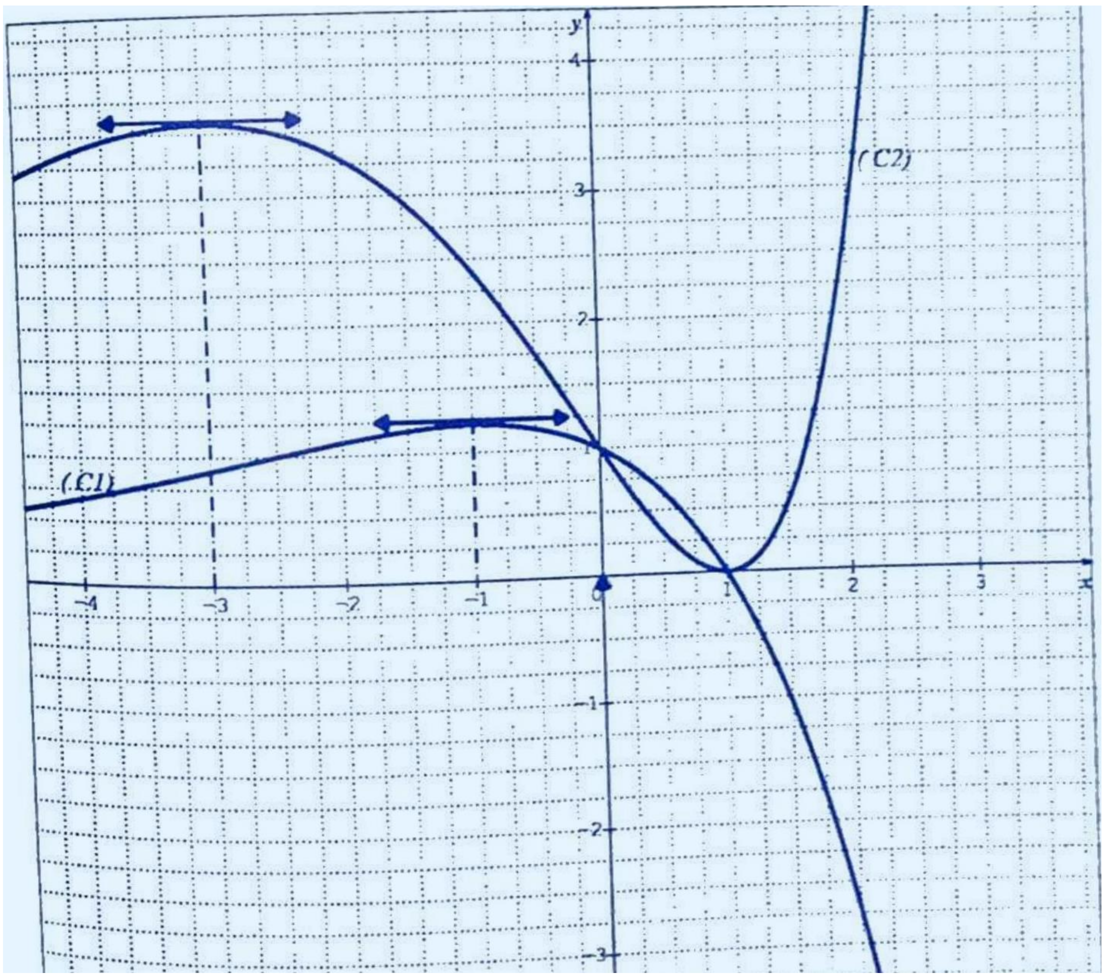
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n(x) - f_{n+1}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, f_n(x) - f_{n+1}(x) < 0$ d'où $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ donc la courbe (C_n) est au dessous de la courbe (C_{n+1}) sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ $\forall x \in]0; 1[, f_n(x) - f_{n+1}(x) > 0$ d'où $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ donc la courbe (C_n) est au dessus de la courbe (C_{n+1}) sur $10; 1[$
d) Tracer de la courbe (C_2) (voir figure)
Partie C $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2}(-x - 2n + 1)(1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}}$
$\forall x \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $-x - 2n + 1 < 0; (1-x)^{n-1} > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} > 0$ d'où $\forall x \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n'(x) < 0;$
donc $f_n(x)$ est décroissante sur $[0; 1]$ 2.On a: $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$ et $f_n(x)$ est décroissante sur $[0; 1]$ d'où $\forall x \in [0; 1]$, on a $f_n([0; 1]) = [f_n(1); f_n(0)]$. Or $f_n(1) = 0$ et $f_n(0) = 1$; an obtient donc $f_n([0; 1]) = [0; 1]$
Au total, $f_n(x) \in [0; 1]$

3. On a: $\forall x \in [0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f_n \leq 1 \Rightarrow$
$\int_0^1 0dx \leq \int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 1dx \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n!}[x]_0^1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n!} \Leftrightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n!}$ or $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$
Donc $0 \leq \mathrm{S}_n \leq \frac{1}{n}$

4. On a: $0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'après le théorème des gendarme,

on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$



CORRECTION SESSION NORMALE 2019 Série C

EXERCICE 1(5 points)

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 4), (\mathrm{B}, -1)$ et $(D, -1)$.

1.

a. Démontre que A est le milieu du segment$[KG]$.

On a : $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & D \\ \hline 4 & -1 & -1 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & K \\ \hline 4 & -2 \\ \hline\end{array}$

, vu que K est le centre du carré, donc milieu du segment $[BD]$;

on en déduit que : $\overrightarrow{AG} = \frac{-1+(-1)}{4+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AK}$: A est le milieu du segment $[KG]$.

b. Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$.

Vu que $ABCD$ est un carré, le triangle KGB est rectangle en K; alors par la propriété de Pythagore, on obtient :

$GB^2 = GK^2 + KB^2 = (2AK)^2 + KB^2 = 5AK^2 = 5 \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$.

C. Justifie que : $GB = GD$.

On a : $s_{(AC)}(B) = D$ et $G \in (AC)$, alors $s_{(AC)}([GB]) = [GD]$: $GB = GD$.

d. Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.

On a : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9 \Leftrightarrow 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GD^2 = 9 \Leftrightarrow 2MG^2 = -4 \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3^2 + 2 \times \frac{45}{2}$

$\Leftrightarrow MG^2 = (3\sqrt{2})^2 = GK^2$: (Γ_1) est le cercle de centre G qui passe par K.

2.

a. Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Dans le triangle rectangle ABE, on a : $AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{45}{4}$: $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.0,50pt

b. Démontre que pour tout point M du plan : $3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$.

Comme $3 + (-2) + (-1) = 0$, on a : $3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 3OA^2 - 2OB^2 - OD^2 - 2(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OM}$, pour tout point O du plan et en particulier pour $O = A$, on obtient :

$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -2AB^2 - AD^2 - 2(-2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AM} = -2AB^2 - AD^2 - 2(-2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= -2AB^2 - AD^2 - 2(-2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AM} = -3AB^2 + 4\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AM} = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$$

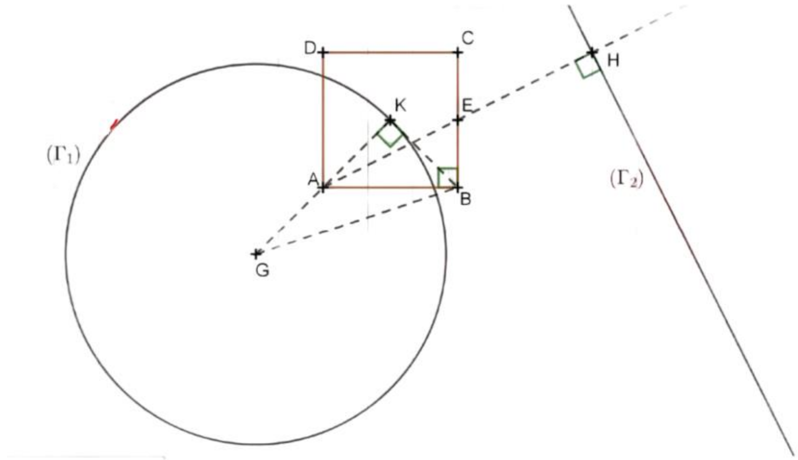
c. Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63$.

D'après ce qui précède,

$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63 \Leftrightarrow -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 63 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 90 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{45}{2} \Leftrightarrow \overline{AH} \times \overline{AE} = \frac{45}{2}$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AE); on en déduit que :

$AH = \frac{45}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} = 2AE$ et $H \in [AE)$ et alors (Γ_2) est la perpendiculaire à la droite (AE) en H.



EXERCICE 2

Partie A

1° - Ecrivons m en base 2

$$m = 10^2a + 10b + c$$
$$m = 10^2 \times 1 + 10 \times 2 + 1 = 121$$

En divisant 121 par 2, puis successivement les quotients obtenus par 2, on obtient: $m = \overline{1111001^2}^2$

2° - i) Démontrons que $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$

On a : $m \equiv 0[27] \Leftrightarrow 10^3a + 10b + c \equiv 0[27]$
$\Leftrightarrow 10(10^2a + 10b + c) \equiv 0[27]$
$\Leftrightarrow 10^3a + 10(10b + c) \equiv 0[27]$
$\Leftrightarrow 10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$ avec $\overline{bc} = 10b + c$

ii) Déduis en que $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$

On a : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$ (1)

Or $10^3 \equiv 1[27] \Rightarrow 10^3a \equiv a[27] \Rightarrow 10^3a - a \equiv 0[27]\#(2)$

Les relations (1) et (2) donnent (En faisant la soustraction), on a :
$a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$. En conclusion, on a : $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$

iii) Justifions que $\overline{bca}$ est divisible par 27

On sait que $\overline{bca} = 10\overline{bc} + a$. Or $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$

D'où $\overline{bca} \equiv 0[27]$. Donc l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B

1°) Justifions que $d = 99u$

On a : $d = \overline{abc} - \overline{cba}$

$$d = (10^2a + 10b + c) - (10^2c + 10b + a)$$
$$d = 10^2a + c - 10^2c - a$$
$d = 99a - 99c \Leftrightarrow d = 99(a - c)$. Donc $d = 99u$

2°) Déduction : d ne peut être le carré d'un entier naturel

$d = 99u \Rightarrow d = 9 \times 11 \times u$. Or $u \in \mathbb{N}, 0 < u \leq 9$ d'où
$d = 3^2 \times 11 \times u$. L'exposant de 11 est impair; pas un carré.
Donc d n'est pas un carré d'un entier naturel.

3°) i) Justifions que $m = 11(10a + c)$

On sait que : $m = 10^2a + 10b + c$

$m = 10^2a + 10(a + c) + c$ avec $b = a + c$

$m = 10^2a + 10a + 10c + c$

$m = 110a + 11c$

Donc $m = 11(10a + c)$

ii) Déduction : m et d ne sont pas premiers entre eux.

On a: $m = 11(10a + c)$ d'où 11 divise m.

$d = 99u \Rightarrow d = 9 \times 11 \times u$ d'où 11 divise d

Donc $\mathrm{PGCD}(m; d) \neq 1$

4*) Ji) Justifions que $d = 3^2 \times 11b$

On sait que: $d = 99u$ Or $u = a - c$

d'ou $d = 99(a - c)$. Or $a = b + c$

$d = 99(b + c - c) \Rightarrow d = 99b \Rightarrow d = 9 \times 11b$

Donc $d = 3^2 \times 11b$

ii) Justifions que $m = 110b + 101c$

On sait que: $m = 10^2a + 10b + c$

$m = 10^2(b + c) + 10b + c$ car $a = b + c$

$m = 10^2b + 10^2c + 10b + c \Leftrightarrow m = 100b + 10b + 100c + c$

Donc $m = 110b + 101c$

iii) Démontrons que: $b + c$ n'est divisible par 3 .

On a: $d = 3^2 \times 11 \times b$ et $m = 110b + 101c$

$\mathrm{pGcD}(m; d) = 1 \Leftrightarrow 3; 11$ et b ne divise pas m d'od:

3 ne divise pas $b + c$

- II ne divise pras m si $c \neq 0$
- b ne divise pras m si $\mathrm{P(;CD}(b; c) = 1$

En conclusion: $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$b + c$ **n'est pas divisible par 3**

$\mathrm{PCCD}(b; c) = 1$

$a = b + c$

iv) Déduction: tous les entiers naturels m premiers avec d

On sait que: $1 < a < 9$ et $a = b + c$ non divisible par 3

D'ou les valeurs de a sont: $2; 4; 5; 7$ et 8

Pour $a = 2$, on a: $b + c = 2$ d'ou $b = c = 1$ donc $m = 211$

Pour $a = 4$; on a : $b + c = 4$ d'ou $b = 3$ et $c = 1$ ou $b = 1$ et $c = 3$ done

$m = 431$ ou $m = 413$

Pour $a = 5$; on a: $b + c = 5$ d'ou $b = 4$ et $c = 1$ ou $b = 1$ et $c = 4$ ou

$b = 2$ et $c = 3$ ou $b = 3$ et $c = 2$. Donc

$m \in \{541; 514; 523; 532\}$

Pour $a \equiv 7$; On a: $b + c = 7$ doi $b = 1$ et $c = 6$ ou $b = 6$ et $c = 1$ ou

$b = 2$ et $c = 5$ ou $b = 5$ ou $c = 2$ ou $b = 3$ et $c = 4$ ou

$b = 4$ et $c = 3$. Donc on a:

$m \in \{716; 761; 725; 752; 734; 743\}$

Pour $a \equiv 8$; On a: $b + c = 8$; doú $b = 1$ et $c = 7$ ou $b = 7$ ct $c = 1$ ou

$b = 3$ et $c = 5$ ou $b = 5$ et $c = 3$. Donc, on a:

$m \in \{817; 871; 835; 853\}$

PROBLEME

Partie A

1) Démontrons que f est une fonction impaire

$$D_f = \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$\forall x \in D_f$ et $\forall -x \in D_f$, on a: $f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow f(-x) =$

$\ln\left(\dfrac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \Leftrightarrow f(-x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$f(-x) = \ln 1 - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ d'où $f(-x) = -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Donc $f(-x) = -f(x)$. Par conséquent, f est donc une fonction impaire.

2° a) Calculons la limite de $f(x)$ puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x\left(1+\sqrt{x_{x^i}^{1}+1}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x}\right] = 0 \text{ Car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}\right)}{x} = 0$$

b) Interprétation graphique

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OI) en $+\infty$.

3°) a) Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : $f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) Sens de variation de f

$\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

c) Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

4°) Equation de la tangente ($\triangle$) à (C) en 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1(x-0) + 0 \text{ avec } f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 0$$
$$y = x$$

5°) a) Sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{-\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\sqrt{1+x^2}+1$	$-$	0	$-$
$\sqrt{1+x^2}$	$+$		$+$
$g'(x)$	$-$	0	$-$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

b) Positions relatives de (C) et (Δ)

g est continu et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$ donc

$\forall x \in J-\infty; 0], g(x) > 0$, d'où $f(x) > y$ donc (C) est au dessus de (Δ)

$\forall x \in [0; +\infty[, g(x) < 0$, d'où $f(x) < y$ donc (C) est au dessous de (Δ)

6°) Construction de (C) et (Δ). (voir fin feuille)

7°) Calcule de A à l'aide d'une intégration par parties

$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Posons $U = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ et $U' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$V' = 1$ et $V = x$

D'où $\Lambda = \left[x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$\Lambda = \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 - \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

$A = (\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1)$ ua donc $A = (\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1)c\ \mathrm{cm}^2$

Partie B

1°) a) Justifions que F_n est définie sur $\mathbb{R}$

On sait que $F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^1 f_n(t)dt$

On a : $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}$ d'où $f_n(x)$ est continue et définie sur $\mathbb{R}$; donc la fonction F_n est définie sur $\mathbb{R}$

b) Démontrons que F_n est une fonction impaire

$\forall x \in \mathbb{R}$ it $\forall -x \in \mathbb{R}$, on a : $F_n(-x) = \int_0^{-x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \Rightarrow$

$F_n(-x) = -\int_{-x}^0 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$. Or $\frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0$ et paire d'où on a :

$\int_{-x}^x \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_{-x}^0 \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = 2\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$\Rightarrow \int_{-x}^0 \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^x \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Donc $F_n(-x) = -F_n(x)$

Par conséquent F_n est une fonction impaire.

c) Sens de variation de F_n sur $[0; +\infty[$

$\forall x \in [0; +\infty[, F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ d'où $F_n'(x) = f_n(x)$

$\forall x \in [0; +\infty[, F_n'(x) \geq 0$ donc F_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2°) a) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n \geq 0$

On a: $\mathrm{I}_0 = \ln(1+\sqrt{2})$ d'où $\mathrm{I}_0 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, ct $t \in [0;1], \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n \geq 0$

b) Démontrons que la suite (I_n) est décroissante

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \text{ et } \mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

On a : $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}(t^2-1)dt$$

$\forall t \in [0;1], \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0$ et $t^2 - 1 \leq 0$

D'où $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0 \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1} \leq \mathrm{I}_n$

Donc la suite (I_n) est strictement décroissante.

c) Démontrons que (I_n) est convergente

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n \geq 0$ d'où la suite (I_n) est minorée par 0 et décroissante; doncla suite (I_n) est convergente.

d) Vérification

On a : $\frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n}\times t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

$= t^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

$= t^{2n}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}+t^2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}\right)$

$\frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n}\sqrt{1+t^2}\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)$

D'où $\frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n}\sqrt{1+t^2}$

Donc $\forall t \geq 0$, on a : $t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$

e) Justifions que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n$

On a : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$ et $\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$I_{n+1} = \int_0^1 \left(t^{2n}\sqrt{1+t^2} - \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1+t^2}dt - I_n$

Intégrons $A = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1+t^2}dt$

Posons: $\mathrm{U} = \sqrt{1+t^2} \Rightarrow \mathrm{U}' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\mathrm{V}' = t^{2n} \Rightarrow \mathrm{V} = \frac{1}{2n+1}t^{2n+1}$

D'où $A = \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)\sqrt{1+t^2}}dt$

$$\Lambda = \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{(2n+1)}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$\Lambda = \left[\frac{\sqrt{1+t^2}}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{(2n+1)}I_{n+1}$$

Les relations (2) et (1) donnent :

$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1+t^2}dt - \mathrm{I}_n$

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1} + \frac{1}{(2n+1)}\mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+1} + \mathrm{I}_n$$

$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+1} + \mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2n+1} + \mathrm{I}_n\right) \times \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)$

Donc $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n$

f) Calculons I_1 et I_2

$\mathrm{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

$\mathrm{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2})$

3°) a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

On a : $\mathrm{F}_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Donc $\mathrm{F}_n(x) = \mathrm{I}_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

b) Démontrons que $\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

On a : $t \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow t^2+1 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{t^2+1} \geq 2 \Rightarrow$
$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. et Ona : $t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq 1$ d'où

$\frac{1}{t} \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{t} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{t} \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{t} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

En conclusion, $\forall t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

- Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n}-1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

On sait que : $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t}$ et $t^{2n} \geq 0$ d'où

$\frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{t^{2n}}{t} \Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{t^{2n}}{t}dt \Rightarrow$

$\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{2}} \times t^{2n-1}dt \Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^{2n}}{2n}\right)\right]_1^x$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{2n}}{2n} - \frac{1}{2n}\right) \Rightarrow \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \frac{1}{2n\sqrt{2}}(x^{2n}-1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n}-1)$

c) Déduction de la limite de $\mathrm{F}_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ On sait que: $\mathrm{F}_n(x) = \mathrm{I}_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

La suite (I_n) converge vers 0 d'où $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{I}_n = 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n}-1) = +\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty}x^{2n}-1 = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}_n(x) = +\infty$

d) Démontrons que (C_n) admet une branche parabolique Calculons la limite de $\frac{F_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

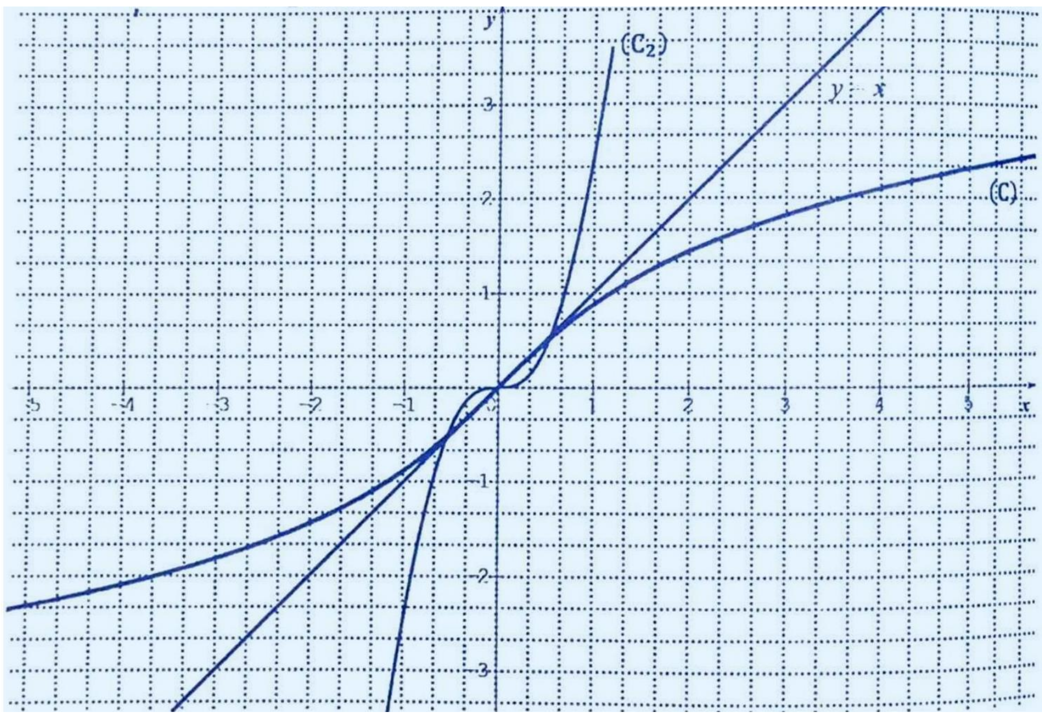
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\mathrm{I}_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{I}_n}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = +\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{I}_n}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt = +\infty$ (Voir 3c)

Au total, on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{F}_n}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}F_n = +\infty$ donc la courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ) en $+\infty$

e) Construction de (C_2) (Voir courbe fin)

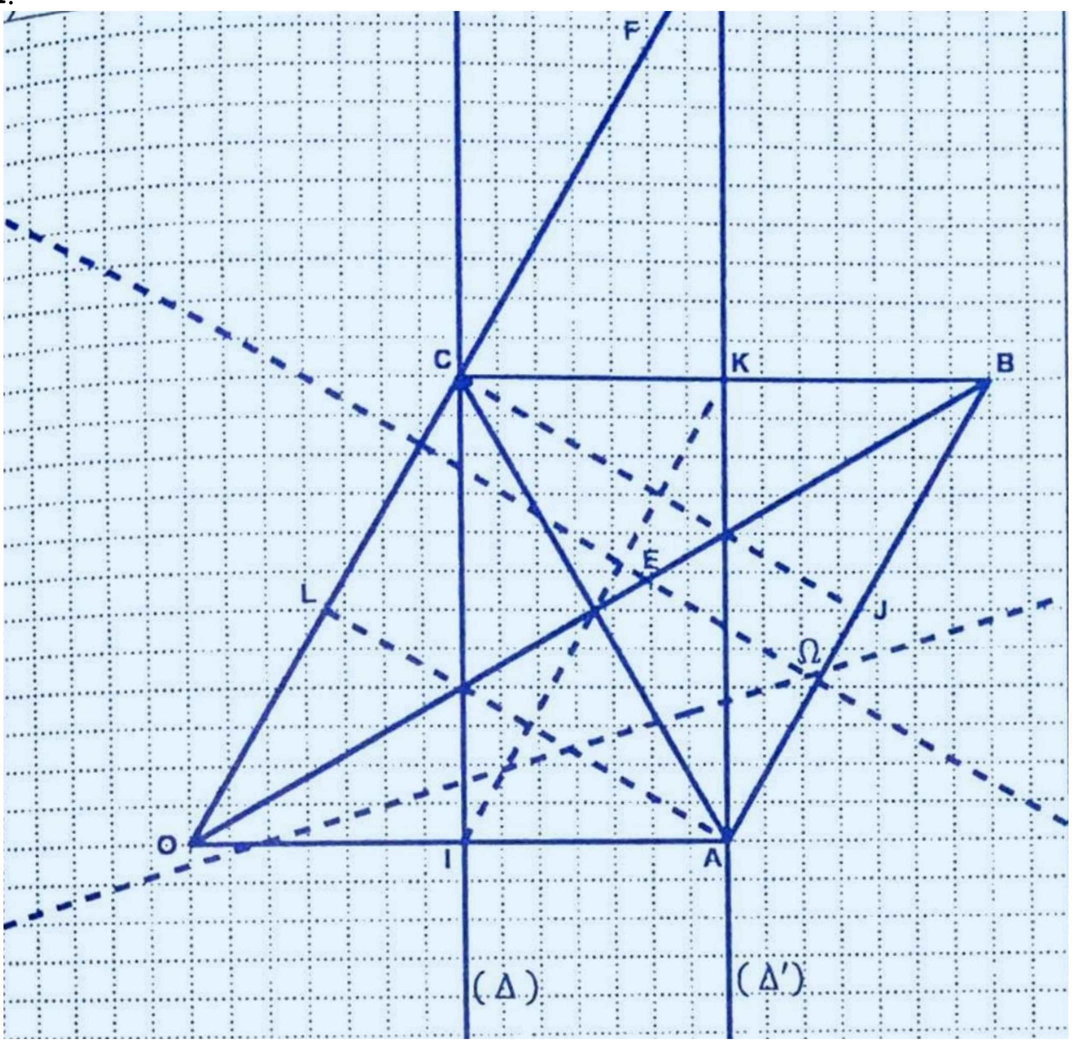


y
(C_2)
$y = x$
(C)
x

CORRECTION SESSION NORMALE 2018 Série C

Exercice 1

1.



2. a) Justifions que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles.

$OABC$ est un losange; donc $(OA)//(BC)$ (1)

(Λ) est la médiatrice de $[OA]$; donc $(\triangle) \perp (OA)$ (2)

D'après (1) et (2), on a: $(\triangle) \perp (BC)$ (3) .

(Δ') est la médiatrice de $[BC]$; donc $(\triangle') \perp (BC)$ (4)

D'après (3) et (4), on a: $(\triangle)//(\triangle')$.

b) Justifions que le triangle OAC est équilatéral.

$OA = OC$ et $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{O\dot{A}; OC}) = \pi/3$ d'où OAC est équilatéral.

c) Justifions que: $OB = OF$.

$C \in [OF]$ donc $OF = OC + CF$; or $OC = OE$ ct $CF = EB$.

Donc $OF = OE + EB = OB$ car $E \in [OB]$. Ainsi, $OB = OF$.

3. On pose: $f = R_1 \circ R_2$.

a) Déterminons $f(O)$ et $f(A)$.

- $R_2(O) = B$ et $R_1(B) = F$ donc $f(O) = F$
- $R_2(A) = A$ et $R_1(A) = E$ donc $f(A) = E$

b) Démontrons que f est une rotation d'angle $-\pi/2$.
f est la composée de deux rotations dont la somme des angles est
$\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$; on a : $-\frac{\pi}{2} \neq 0$
donc f est une rotation d'angle $-\pi/2$

c) Déduisons-en que: $(EF) \perp (OA)$ et $EF = OA$.

f	
O	F
A	E

Donc : $EF = OA$ et $(EF) \perp (OA)$

d) Construction du centre Ω de f.

f	
Ω	Ω
O	F
A	E

$\Omega O = \Omega F$ donc Ω appartient à la médiatrice de $[OF]$;
$\Omega A = \Omega E$ donc Ω appartient à la médiatrice de $[AE]$.
Conclusion : Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OF]$ et $[AE]$.

4. a) O, A, B et C sont quatre points du plan avec $OA = BC$ et $OA \neq 0$. il existe donc une isométrie g et une seule telle que : $g(O) = A$, $g(A) = C$ et $g(C) = B$. (Propriété fondamentale).

b) Justifions que g est un antidéplacement.

g	
O	A
A	C
C	B

Conclusion g est un antidéplacement.

c) Démontrons que g est une symétrie glissée.
g est un antidéplacement; donc g est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée.
Supposons que g est une symétrie orthogonal d'axe ( ).
Comme $g(O) = A$ alors $g(A) = O$ (ce qui est impossible car $(A) = C'$).

Conclusion g est une symétrie glissée.

5. Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.

a) Démontrons que: $g = R \circ S$.

- $S(O) = A$ et $R(A) = A$, donc $R \circ S(O) = A$
- $S(A) = O$ et $R(O) = C$, donc $R \circ S(A) = C$
- $S(C) = C$ et $R(C) = B$, donc $R \circ S(C) = B$

$R \circ S$ est la composée d'une rotation (un déplacement) et d'une symétrie orthogonale (un antidéplacement) donc $R \circ S$ est un antidéplacement. De plus, $R \circ S(O) = A, R \circ S(A) = C$ et $R \circ S(C) = B$ d'où $R \circ S = g$. En effet, il existe un unique antidéplacement g tel que : $g(O) = A, g(A) = C$ et $g(C) = B$.

b) L'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que : $R = S_{(AB)} \circ S_1$. Soit $(\mathfrak{D})$ l'axe de la symétrie orthogonale S_1

$R = S_{(AB)} \circ S_1$ donc $A \in (\mathfrak{D})$. Soit P un point de $(\mathfrak{D})$; on a

$R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(AB)} \circ S_{(AI')}$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

La droite ($\mathfrak{D}$) est donc (Δ');

Conclusion L' 'axe de la symétrie orthogonale S_1 est (Δ')

c) Déduisons-en que : $g = S_{(AB)} \circ t_{ii}$.

On a: $g = R \circ S$; or $R = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta')}$ et $S = S_{(\Delta)}$;

donc : $g = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = S_{(AB)} \circ t_{2lA} = t_{OA} = t_{CB}; g = S_{(AB)} \circ t_{(CB}$

d) Déterminons les éléments caractéristiques de g.

$g: = S_{(AB)} \circ t_{(\cdot B} - \left(S_{(AB)} \circ t_{(ij+,jB}\right) = \left(S_{(AB)} \circ t_{Cj}\right) \circ t_{JB}$.

On a : $t_{(jj} = S_{(AB)} \circ S_{(K)}$ donc : $g = S_{(IK)} \circ t_{J\beta} = t_{J/j} \circ S_{(IK)}$.

$\overrightarrow{JB}$ étant un vecteur directeur de la droite (IK), on a :

g est une symétrie glissée d'axe (IK) et de vecteur, JB˙.

Exercice 2

1. Démontrons que n et $2n+1$ sont premiers entre eux. $-2 \times n + 1 \times (2n+1) = -2n + 2n + 1 = 1$; D'après le théorème de Bézout, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose: $A = n+3, B = 2n+1$ et $d = \mathrm{PGCD}(A; B)$.

a) Calculons $2A - B$

$2A - B = 2(n+3) - (2n+1) = 2n + 6 - 2n - 1 = 5; 2A - B = 5$

Les valeurs possibles de d.

$d = \mathrm{PGCD}(A; B)$, donc d divise toute combinaison linéaire de A et B; en particulier d divise $2A - B$; donc d divise 5 .

Ainsi, $d \in \{1; 5\}$.

b) Supposons que A et B sont multiples de 5 .

Il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $k' \in \mathbb{N}^*(k < k')$ tel que $A = 5k$ et $B = 5k'$.

D'où : $n + 3 = 5k$ et $2n + 1 = 5k$ '

Ainsi : $2n + 1 - (n+3) = 5k' - 5k$

C'est-à-dire: $n - 2 = 5(k' - k)$, donc $n - 2$ est multiple de 5 .

Réciproquement, si $n - 2$ est multiple de 5 alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - 2 = 5\alpha$, d'où $n = 5\alpha + 2$. Ainsi,

• $A = n + 3 = 5\alpha + 2 + 3 = 5\alpha + 5 = 5(\alpha + 1) \in 5\mathbb{Z}$;

• $B = 2n + 1 = 2(5\alpha + 2) + 1 = 10\alpha + 5 = 5(2\alpha + 1) \in 5\mathbb{Z}$.

Conclusion

A et B sont multiples de 5 si, et seulement si

$n - 2$ est multiple de 5

c) Justifions que S et P sont divisibles par $n - 1$.

On effectue la division euclidienne de S et P par $n - 1$.

$S = (n - 1)(n^2 + 3n) = n(n - 1)(n + 3)$ et $P = (n - 1)(2n + 1)$.

Conclusion S et P sont divisibles par $n - 1$.

3. On pose : $\delta = \mathrm{PGCD}(n(n + 3); 2n + 1)$.

a) Démontrons que d divise δ

d divise $n + 3$; donc d divise $n(n + 3)$. Aussi, d divise $2n + 1$ d'où d divise $\mathrm{PGCD}(n(n + 3); 2n + 1)$. Ainsi, d divise δ.

b) Démontrons que δ et n sont premiers entre eux. 1 ìre méthode :

Soit $k = PGCD(\delta; n)$; alors k divise δ et k divise n.

Or δ divise $2n + 1$, d'où k divise $2n + 1$.

Ainsi, k divise $\mathrm{PGCD}(n; 2n + 1)$; d'où k divise 1 . Donc $k = 1$.

Conclusion

δ et n sont premiers entre eux.

2^{ieme} méthode.

$\delta = PGCD(n + 3); 2n + 1)$ donc δ divise $2n + 1$. Ainsi, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}^*$ tel que : $2n + 1 = k_1\delta$; soit $k_1\delta - 2n = 1$. D'après le théorème de Bézout, δ et n sont premiers entre eux.

c) Déduisons des questions 3.a) et 3.b) que δ est égal à d.

D'après), δ divise d donc $\delta \leq d$ (1)

δ divise $n(n + 3)$ et $\mathrm{PGCD}(\delta; n) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, δ divise $n + 3$. De plus, δ divise $2n + 1$ d'où δ divise $\mathrm{PGCD}(n + 3; 2n + 1)$. Donc δ divise d d'où $d \leq \delta$ (2) D'après (1) et (2), on a bien $\delta = d$

d) Déterminons le $\mathrm{PGCD}(S; P)$ en fonction de n.

$\mathrm{PGCD}(S; P) = \mathrm{PGCD}[n(n - 1)(n + 3); (n - 1)(2n + 1)]$;

$\mathrm{PGCD}(S; P) = (n - 1)PGCD[n(n + 3); (2n + 1)] = (n - 1)\delta$.

On sait que $\delta = d$ donc $\delta \in \{1; 5\}$. Ainsi :

- Si $\delta = 1$ alors $\mathrm{PGCD}(S; P) = n - 1$;
- Si $\delta = 5$ alors $PGCD(S; P) = 5(n - 1)$.

4. Déterminons $\mathrm{PGCD}(S; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

- Pour $n = 2016, \delta = 1$ d'où $PGCD(S; P) = 2016 - 1 = 2015$.
- Pour $n = 2017, \delta = 5$ d'où $PGCD(S; P) = 5(2017 - 1) = 10080$.

Problème

Partie A

1. a) Calculons la limite de g_1 en 0 .

On a : $g_1(t) = -\frac{2}{t} + \ln t$; or $\lim_{t \to 0}\left(-\frac{2}{t}\right) = -\infty$ et $\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$;

d'où $\lim_{t \to 0} g_1(t) = -\infty$.

b) Interprétation graphiquement.
(OJ) est une asymptote à (C_1).

2. a) Calculons la limite de g_1 en $+\infty$. $\lim_{l\to+\infty}\left(-\frac{2}{t}\right)=0$ et $\lim_{1\to+\infty}\ln t=+\infty$; donc $\lim_{t\to+\infty}g_1(t)=+\infty$.

b) Pour tout $t>0$, on a : $\frac{g_1(t)}{t}=\frac{2}{t^2}+\frac{\ln t}{t}$.
Or $\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{t^2}\right)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$; donc $\lim_{t\to+\infty}\frac{g_1(t)}{t}=0$.
Ainsi, $\lim_{t\to+\infty}g_1(t)=+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{g_1(t)}{t}=0$. D'où la conclusion :
(C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

3. On suppose que g_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$.
a) Démontrons que g_1 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $t\in]0;+\infty[$, on a : $g_1{}'(t)=\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}$.
Pour tout $t\in]0;+\infty[$, on a : $\frac{2}{t^2}>0$ et $\frac{1}{t}>0$ d'où $g_1{}'(t)>0$.

Conclusion
g_1 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) g_1 est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$; on a
$g_1(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$. De plus $1\epsilon]-\infty;+\infty[$. Donc l'équation $t\in]0;+\infty[, g_1(t)=1$ admet une solution unique β.
On a: $g_1(4{,}3)\simeq 0{,}99<1$ et $g_1(4{,}4)\simeq 1{,}02>1$ d'où $4{,}3<\beta<4{,}4$.

4. a) Démontrons que : $g_1(t)<0 \Leftrightarrow t\in]0;\alpha[$.
$^\circ g_1$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $g_1(\alpha)=0$ Pour tout $t\in]0;+\infty[$, on a :
$t\in]0;\alpha[$ équivaut à $0<t<\alpha;$ $0<t<\alpha$ équivaut à $g_1(t)<g_1(\alpha)$ Ainsi, $t\in]0;\alpha[$ équivaut à $g_1(t)<0$.
Conclusion
$g_1(t)<0$ équivaut à $t\in]0;\alpha[$.

b) Démontrons que : $g_1(t)>0 \Leftrightarrow t\in]\alpha;+\infty[$.
g_1 est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $g_1(\alpha)=0$ Pour tout $t\in]0;+\infty[$, on a :
$t\in]\alpha;+\infty[$ équivaut à $t>\alpha;$ $t>\alpha$ équivaut à $g_1(t)>g_1(\alpha)$
Ainsi, $t\in]\alpha;+\infty$ [équivaut à $g_1(t)>0$.
Conclusion
$g_1(t)>0$ équivaut à $t\in]\alpha;+\infty[$.

Partie B

1. a) Calculons $\lim_{t\to+\infty}g_n(t)$.
On a $g_n(t)=[g_1(t)]^n$; or $\lim_{l\to+\infty}g_1(t)=+\infty$ d'où $\lim_{l\to+\infty}g_n(t)=+\infty$

b) Démontrons que :$\lim_{t\to+\infty}\frac{g_n(t)}{t}=0$.
Pour $t\in]0;+\infty[$, on a : $g_{n1}(t)=\left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^n$. Ce qui donne alors :

$\frac{g_n(t)}{t} = \frac{1}{t}\left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^{\prime\prime} = \left(\frac{1}{\frac{1}{t^n}}\right)^n \left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^n = \left[\frac{1}{t^n}\left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]^n$

$\frac{g_n(t)}{t} = \left(-\frac{2}{t^{\frac{1}{n}}\times t}+\frac{\ln t}{t^{\frac{1}{n}}}\right)^n$. En posant $x = t^{\frac{1}{n}}$, on a : $x^n = \left(t^{\frac{1}{n}}\right)^n = t$.

D'où : $\lim_{t\to+\infty}\frac{g_n(t)}{t} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^n\times x}+\frac{\ln x^n}{x}\right)^n - \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^{n+1}}+n\frac{\ln x}{x}\right)^n$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^{n+1}}\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$; donc $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^{n+1}}+n\frac{\ln x}{x}\right)^n = 0$

Ainsi, $\lim_{t\to+\infty}\frac{g_n(t)}{t} = 0$.

c) Interprétons graphiquement les deux résultats précédents.

$\lim_{t\to+\infty} g_n(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{g_n(t)}{t} = 0$ donc :

(C_n) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) en $+\infty$.

2. On suppose que n est pair.

a) Calculons $\lim_{t\to 0} g_n(t)$.

On a : $\lim_{t\to 0} g_1(t) = -\infty$, donc pour n pair, $\lim_{t\to 0}[g_1(t)]^n = +\infty$.

Par suite, $\lim_{t\to 0} g_1(t) = +\infty$.

b) Interprétation graphique du résultat précédent.

(OJ) est asymptote à la courbe (C_n).

3. On suppose que n est impair.

a) Calculons $\lim_{t\to 0} g_n(t)$.

On a : $\lim_{t\to 0} g_1(t) = -\infty$, donc pour n pair, $\lim_{t\to 0}[g_1(t)]^n = -\infty$.

Par suite, $\lim_{\substack{t\to 0 \\ \to 0}} g_1(t) := -\infty$.

b) Signe de $g_n(t)$ sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $t \in]0;+\infty[, g_n(t) = [g_1(t)]^n$. Donc pour n impair, $g_n(t)$ à même signe que $g_1(t)$. D'après la question 4 . de la partie A, on a :

i) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$;

ii) $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

4. a) Démontrons que $g_n{}'(t) = ng_1{}'(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel strictement positif t,

On a : $g_n(t) = \left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^n$;

D'où : $g_n{}'(t) - n\left(\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^{n-1}$; or $\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t} = g_1{}'(t)$ et $\left(-\frac{2}{t}+\ln t\right)^{n-1} = g_{(n-1)}{}'(t)$. Ainsi, $g_n{}'(t) = ng_1{}'(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

b) Etudions suivant la parité de n, le signe de $g_n{}'$ sur $]0;+\infty[$.

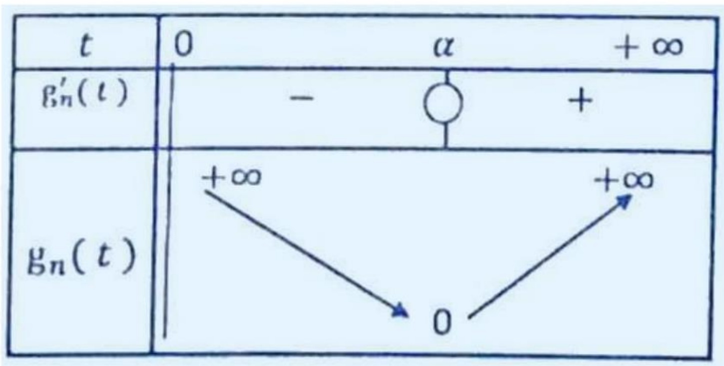
On a: $g_n{}'(t) = ng_1{}'(t) \times g_{(n-1)}(t)$. Pour tout $t > 0, ng_1{}'(t) > 0$ donc $g_n{}'(t)$ et $g_{(n-1)}(t)$ ont même signe sur $]0;+\infty[$.

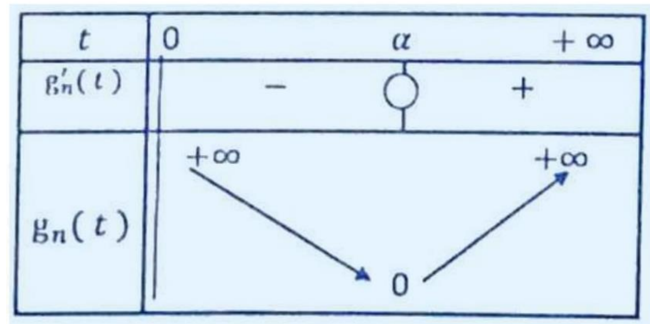
•Pour $n \geq 2$ et n pair, $n-1$ est impair. Donc $g_{(n-1)}(t)$ est du signe de $g_1(t)$.

Ainsi, Sur $]0;\alpha[, g_n{}'(t) < 0$ et sur $]\alpha;+\infty[, g_n{}'(t) > 0$.

•Pour $n \geq 2$ et n impair, $(n-1)$ est pair.
Donc $g_{(n-1)}(t) > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Ainsi, Pour tout t élément de $]0;+\infty[$, on a $g_n{}'(t) > 0$.
c) Tableau de variation de g_n.suivant la parité de n.

n pair **n impair**





Partie C

1. a) Exprimons $g_{n+p}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$:
On a : $g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln\right)^n$;
D'où : $g_{n+p}(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln\right)^{n+p} = \left(-\frac{2}{t} + \ln\right)^n \times \left(-\frac{2}{t} + \ln\right)^n$
C'est-à-dire $g_{n-p}(t) = g_n(t) \times g_p(t)$.

b) Déduisons-en que: $g_{n+p}(t) - g_n(t) = \big(g_p(t) - 1\big) \times g_n(t)$.
On a : $g_{n,p}(t) = g_n(t) \times g_p(t)$;
D'où : $g_{n+p}(t) - g_n(t) = g_n(t) \times g_p(t) - g_n(t) - \big(g_p(t) - 1\big) \times g_n(t)$.

2. **On suppose que n est pair**.

Position relative de (C_n) et (C_{n+1})
On sait que: $g_{n+p}(t) - g_n(t) = \big(g_p(t) - 1\big) \times g_n(t)$.
Pour $p = 1$, on a : $g_{n+1}(t) - g_n(t) = (g_1(t) - 1) \times g_n(t)$
Signe de $g_{n+1}(t) - g_n(t)$.

t	0		β		$+\infty$
$g_n(t)$		$+$		$+$	
$g_1(t) - 1$		$-$		$+$	
$g_{n+1}(t) - g_n(t)$		$-$	0	$+$	

En conclusion : $\forall t \in]0;\beta$ l, $g_{n+1}(t) - g_n(t) < 0$
$\forall t \in]\beta;+\infty[$, $g_{n+1}(t) - g_n(t) > 0$

a) D'après le tableau de signe ci-dessus, on a :
$\forall t \in]0;\beta[, g_{n+1}(t) - g_n(t) < 0$, donc (C_n) cst au dessus de (C_{n+1}) sur $]0;\beta$ |.

b) D'après le tableau de signe ci-dessus, on a :
$\forall t \in]\beta;+\infty[, g_{n+1}(t) - g_n(t) > 0$, donc (C_n) cst au dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta;+\infty[$.

3. Construction de (C_2) et (C_3) : (voir graphique).

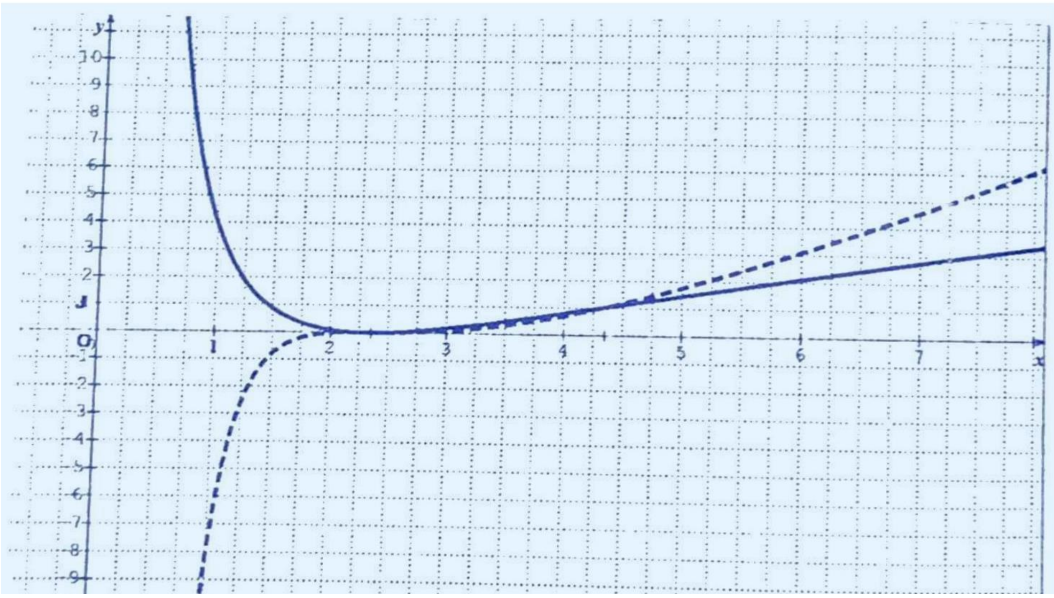
4. a) Justifions que $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)dt$.

$A_n = \int_1^2 \mid g_{n+1}(t)\big) - g_n(t) \mid dt$
Pour tout $t \in [1;2]$, on a $t \in]0;\beta[$. Donc (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur [1;2]. Ainsi,
$A_n = \int_1^2 (g_n(t) - g_{n+1}(t))dt$
$A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)dt.$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculons $\int_1^2 (1 - g_1(t))dt$.
On a : $1 - g_1(t) = 1 + \frac{2}{t} - \ln t$
D'où : $\int_1^2 (1 - g_1(t))dt = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt - \int_1^2 \ln t dt.$
On a : $\int_1^2 \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt = [t + 2\ln t]_1^2 = (2 + 2\ln 2) - 1 = 1 + 2\ln 2.$
A l'aide d'une intégration par parties, on a :
$\int_1^2 \ln t dt = [t\ln t - t]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (-1) = 2\ln 2 - 1.$
D'où : $\int_1^2 (1 - g_1(t))dt = (1 + 2\ln 2) - (2\ln 2 - 1); \int_1^2 (1 - g_1(t))dt = 2.$

c) Démontrons que $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.
Pour n pair, g_n est décroissant sur $]0;\alpha[$; en particulier sur $[1;2]$.
Donc pour tout $t \in [1;2]$, on a : $g_n(2) \leq g_n(t) \leq g_n(1)$.
D'où : $g_n(2)(1 - g_1(t)) \leq g_n(t)(1 - g_1(t) \leq g_n(1)(1 - g_n(t))$
(car $1 - g_n(t) > 0$ sur $[1;2]$).
Ainsi, $g_n(2)\int_1^2 (1 - g_1(t))dt \leq \int_1^2 g_n(t)\big(1 - g_1(t)dt \leq g_n(1)\int_2^2 (1 - g_n(t))dt$
C'est-à-dire $2g_n(2) \leqslant A_n \leq 2g_n(1)$
d) Déduisons-en que: $2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$. (avec n pair)
On a: $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$; or $g_n(t) = \left(-\frac{2}{t} + \ln t\right)^n$.
D'où: $g_n(2) = (-1 + \ln 2)^n \cdots (1 - \ln 2)^n$ et $g_n(1) = (-2)^n = 2^n$
Ainsi, pour tout entier n pair el non nul, $2(1 - \ln 2)'' \leq A_n \leq 2^{n+1}$

Graphiques



CORRECTION SESSION NORMALE 2017 Série C

EXERCICE 1

$1°$ a- La somme des probabilités de chaque événement élémentaire est égal à 1 ; d'où $\mathrm{P(Y=1)+P(Y=-1)+P(Y=2)=1}$

$$\Leftrightarrow\ e^a+e^b+e^c=1 \Leftrightarrow e^{b-r}+e^b+e^{b+r}=1\#(1)$$

avec $a=b-r$ et $c=b+r$ donc $e^be^{-r}+e^b+e^be^r=1$

L'espérance mathématique est: $\mathrm{E(Y)}=1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} y_i\mathrm{P(y=i)}=1$

$\Leftrightarrow 1\times e^a+(-1)\times e^b+2\times e^c=1 \Leftrightarrow e^a-e^b+2e^c=1$

$\Leftrightarrow e^{b-r}-e^b+2e^{b+r}=1 \Leftrightarrow e^be^{-r}-e^b+2e^be^r=1$

Les relations (1) et (2) donnent le système (5) suivant:

$$\begin{cases} e^be^{-r}+e^b+e^be^r=1 \\ e^be^{-r}-e^b+2e^be^r=1 \end{cases}$$

En conclusion, le couple (b,r) est donc solution du système (S) donné.

b - Résolution du système $(S$)

$$(S){:}\begin{cases} e^be^{-r}+e^b+e^be^r=1 \\ e^be^{-r}-e^b+2e^be^r=1 \end{cases}$$

Posons $\mathrm{X}=e^b$ ct $\mathrm{Y}=e^r$. Le système (S) devient ;

$$\begin{cases} \dfrac{X}{Y}+X+XY=1 \\ \dfrac{X}{Y}-X+2XY=1 \end{cases}$$

On a: $\begin{cases} \frac{X}{Y}+X+XY=1 \\ -\frac{X}{Y}+X-2XY=-1 \\ 2X-XY=0 \end{cases}$

$$X(2-Y)=0 \Rightarrow X\neq 0 \text{ et } 2-Y=0$$

Donc $Y=2$

On a: $\frac{X}{Y}+X+XY=1 \Rightarrow \frac{1}{2}X+X+2X=1 \Rightarrow \frac{7}{2}X=1$

Donc $\mathrm{X}=\frac{2}{7}$

On a $X=\frac{2}{7} \Rightarrow e^b=\frac{2}{7} \Rightarrow b=\ln\left(\frac{2}{7}\right)$

On a $\mathrm{Y}=2 \Rightarrow e^r=2 \Rightarrow r=\ln 2$

En conclusion $S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(\ln\left(\frac{2}{7}\right);\ln 2\right)\right\}$.

c-Déterminons a et c

On a : $a=b-r$

et

$c=b+r$

$a=\ln\left(\frac{2}{7}\right)-\ln 2$

Donc $a=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

et

$c=\ln\left(\frac{2}{7}\right)+\ln 2$

$c=\ln\left(\frac{4}{7}\right)$

2°) Calculons la variance $V(Y)$

On a $\mathrm{V(Y)} = \mathrm{E(Y^2)} - [\mathrm{F(Y)}]^2$

$\Rightarrow \mathrm{V(Y)} = \left(1 \times e^a + (-1)^2 \times e^b + 2^2 \times e^c\right) - (1)^2$

$\Rightarrow \mathrm{V(Y)} = e^a + e^b + 4e^c - 1$

$\Rightarrow \mathrm{V(Y)} = e^{\ln\left(\frac{1}{7}\right)} + e^{\ln\left(\frac{2}{7}\right)} + e^{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} - 1 \Rightarrow \mathrm{V(Y)} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{7} - 1$

Donc $V(Y) = \frac{12}{7}$.

3°a) Calculons l'abscisse du point G.

G est le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, 4)$.

Donc : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

soit $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$. Or $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ (marque les ponts A, B et C sur la droite (D)).

D'où: $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$, soit $G = A$ donc $x_i = x_{i1} = 1$

Ou encore : A partir de la relation $A\vec{G} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, on montre que $x_{Ai} = x_{ii} - x_A = 0$.

b) Démontrons que : $h(G) = V(Y)$.

$h(G) = \frac{1}{7}(GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2)$. Or $G = A$ d'où : $GA = 0, GB = AB$ et $GC = AC$. Donc $h(G) = \frac{1}{7}(2AB^2 + 4AC^2) = \frac{1}{7}(2 \times 4 + 4 \times 1)$;

$h(G) = \frac{1}{7}(8 + 4) = \frac{1}{7} \times 12 := \frac{12}{7}$; d'où $h(G) = V(Y)$.

c) Déterminons l'ensemble (Γ).

$(\Gamma) := \{M \in (D) \setminus g(M) = 187\}$ où $g(M) = MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2$.

On a : $g(M) = (1 + 2 + 4)MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2$.

$g(M) = 7MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 4GC^2$

$g(M) = 7MG^2 + 7h(G)$

$g(M) = 7MG^2 + 12$.

$g(M) = 187$ équivaut à $7MG^2 + 12 = 187$.

$7MG^2 + 12 =: 187$ équivaut à $MG^2 := 25$; soit $MG = 5$.

EXERCICE 2

1°) Figure (fin exercice 2)

2°) a-Déterminons $F(C)$ et $G(B)$

$\mathrm{F(C)} = \mathrm{rot(C)} = r(\mathrm{\ B}) = \mathrm{C}$ avec $t(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$ et $r(\mathrm{\ B}) = \mathrm{C}$

Donc $\mathrm{F(C)} = \mathrm{C}$

$G(B) = \mathrm{tor}(B) = t(C) = B$ avec $r(B) = C$ et $t(C) = B$

Donc $G(B) = B$.

b- Nature et éléments caractéristiques de F et G.

La composée d'une rotation et d'une translation est une rotation donc :

F est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

G est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3°) a - Nature de GoF^{-1}

F^{-1} est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et

Les deux rotations G et F^{-1} ont des centres distincts $(B \neq C)$ et $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$. Donc GoF $^{-1}$ est une translation .

$(\mathrm{GOF}^{-1})(0)=\mathrm{G}(\Lambda)=\mathrm{J}$ avec $\mathrm{F}^{-1}(0)=\Lambda$ et $\mathrm{G}(\Lambda)=J$

Donc $(\mathrm{GoF}^{-1})(0)=\mathrm{J}$

GoF^{-1} est une translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$

c-Déterminons (GoF)(I)

$(G \circ F)(I)=G(A)=J$ avec $F(I)=A$ et $G(A)=J$

Donc $(\mathrm{GoF})(\mathrm{I})=\mathrm{J}$

Nature et éléments caractéristiques de GoF

on sait que F est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et G est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. Donc GoF est la rotation d'angle orienté π et de centre A, milieu du segment [IJ] (ou bien GoF est la symétrie de centre A)

4^{0}) a - Affixes des points A, B et C.

Dans le repère orthonormé $(0,1,J)$, on a: $z_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}i; z_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}$ et $z_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b-Ecriture complexe de h et celle de r

-l'écriture complexe de h est de la forme $z'=az+b$ avec $a=-2$ et

$b=z_B(1-a)=\frac{1}{2}i(1+2)=\frac{3}{2}i$, donc l'écriture complexe de h est:

$z'=-2z+\dfrac{3}{2}i$

-l'écriture complexe de r est de la forme $z'=e^{i\theta}(z-z_A)+z_A$

D'où on a: $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \Leftrightarrow z'=iz+1$

Donc l'écriture complexe de rest de la forme $z'=iz+1$

c-Ecriture complexe de S.

Ona: $\mathrm{S}=$ hor $\Leftrightarrow \mathrm{S}=h[r] \Leftrightarrow z'=h[iz+1] \Leftrightarrow$

$z'=-2(iz+1)+\dfrac{3}{2}i \Leftrightarrow z'=-2iz-2+\dfrac{3}{2}i$

D'où l'écriture complexe de S est $z'=-2iz-2+\frac{3}{2}i$. Donc

$\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{g(z)}=-2\mathrm{iz}-2+\dfrac{3}{2}i$

d - Nature et éléments caractéristiques de S

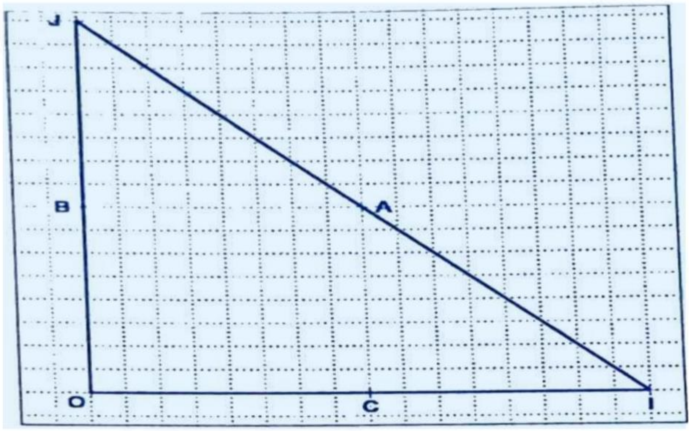
On a $\mathrm{g(z)}=-2\mathrm{iz}-2+\frac{3}{2}i$ d'où $\mathrm{z}'=-2\mathrm{iz}-2+\frac{3}{2}i$

Le Rapport est: $k=|-2i|=2$

l'angle orienté est: $\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-1\end{cases}$ donc $\theta=-\frac{\pi}{2}$

Le centre Ω est : $z_{\Omega}=\frac{-2+\frac{3}{2}i}{1+2i}=\frac{1}{5}+\frac{11}{10}i$

Donc S est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{11}{10}i$, de rapport 2 et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$



PROBLEME

Partie I

$1°)$ a - Dérivée de Ψ

$\forall t \in]-n;+\infty[, \Psi(t) = \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$

$$\Psi'(t) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{t}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n\left(1+\frac{t}{n}\right)} - \frac{1}{n}$$

$$\Psi'(t) = \frac{1}{n\left(1+\frac{t}{n}\right)} - \frac{1+\frac{t}{n}}{n\left(1+\frac{t}{n}\right)} = \frac{-\frac{t}{n}}{n\left(1+\frac{t}{n}\right)}$$

Donc $\forall t \in]-n;+\infty\left[, \Psi'(t) = \frac{-t}{n^2\left(1+\frac{t}{n}\right)}\right.$.

b-Calculons $\Psi(0)$

$\Psi(0) = \ln\left(1+\frac{0}{n}\right) - \frac{0}{n} = 0$

c- Tableau de variation de Ψ

$\forall t \in]-n;+\infty[\,, \Psi'(t) = \frac{-t}{n^2\left(1+\frac{t}{n}\right)}$

On a: $\forall t \in]-n;+\infty\left[, \mathrm{n}^2\left(1+\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{n}}\right) > 0\right.$, d'où le signe de $\Psi'(t)$ est celui de $-t$. Donc $\forall t \in]-n;0[, \Psi'(t) > 0$ et $\forall t \in]0;+\infty[, \Psi'(t) < 0$

t	$-n$		0		$+\infty$
$\Psi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\Psi(t)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

d. D'après le tableau de variation, la fonction Ψ admet un maximum relatif qui est le nombre 0 ; donc $\forall t \in]-n;+\infty[, \Psi(t) \leq 0$ d'où on a:

$$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n} \leq 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$$

Donc $\forall t \in]-n;+\infty\left[, \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}\right.$

2. a- Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x-1$

On sait que $\forall t \in]-n;+\infty\left[, 1+\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{n}} > 0\right.$

D'où posons $x = 1+\frac{t}{n} \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+^*$. Et on tire $x-1 = \frac{t}{n}$

On a: $\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n} \Rightarrow \ln x \leq x-1$

Au total $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x-1$

b-

On a: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx = \left[\frac{x^2}{2k}-x\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx = \left[\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{2k} - \left(k+\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{2k} - \left(k-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx = \left[\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}+\frac{1}{8k}-k-\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}+\frac{1}{8k}-k+\frac{1}{2}\right]$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx = 0$

c-Déduction

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x-1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{x}{k} \in \mathbb{R}_+^*$, donc

$$\ln\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{x}{k}-1 \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx$$

D'après la question 2° b- on a : $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k}-1\right) dx = 0$

Au total, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$

d- Justification

On sait que, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0 \Rightarrow$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) - \ln(k)\Big) dx \leq 0 \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(k) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(k) dx \Rightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \Big[x \ln(k)\Big|_{\mathrm{k}-\frac{1}{2}}^{\mathrm{k}+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k)$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$

e-Démonstration

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{2}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.On a successivement :

Pour $k=1$, on a $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(1)$

Pour $k=2$, on a $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(2)$

Pour $k=3$, on a $\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(3)$

Pour $k=n$, on a $\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(n)$

En additionnant membre à membre chaque inégalité en utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(1+2+3+\cdots+n)$. En conclusion, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(n!)$

3°) a - Intégration par parties de $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx$

Posons $\mathrm{U} = \ln x$ et $\mathrm{V}' = 1$
$\mathrm{U}' = \frac{1}{x}$ et $\mathrm{V} = x$

On a : $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx = [x\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (1)dx$ $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\int_{2}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \ln\sqrt{2}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)dx \leq \ln(n!)$ d'où on a :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \ln\sqrt{2} \leq \ln(n!)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln\sqrt{2}$.

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$

On a : $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) > \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)$ d'où

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) > -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + \ln(n!) > n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ln(n!)$$

D'où $t_n > n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4°) a- Déterminons le sens de variation de (t_n)

On sait que $\forall x \in]0; 1l, f(x) \geq 1$. En posant $x = \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $\frac{1}{2n+1} \epsilon [0; 1]$ d'où $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \geq 1 \Rightarrow 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \leq 0$

D'où ' $\forall n \in N^*, t_{n+1} - t_n \leq 0 \Rightarrow \forall n \in N^*, t_{n+1} \leq t_n$

Donc la suite (t_n) est décroissante.

b - Convergence de (t_n)

on sait que $t_n \geq \ln(\sqrt{2})$. La suite (t_n) est décroissante et minorée par $(\sqrt{2})$, donc la suite (t_n) est convergente.

partie II

1°) a-Calculons W_1

$W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)=1$

b - Démontrons que (W_n) est décroissante et positive.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ W_{n+1}-W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$

$W_{n+1}-W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n+1}t-\sin^n t)dt$

$W_{n+1}-W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(\sin t-1)dt$

$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0\leq\sin t\leq 1$, d'où $0\leq\sin^n t\leq 1\Rightarrow\sin^n t\geq 0$

On a: $-1\leq\sin t-1\leq 0$ d'où $\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\sin t-1\leq 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ W_{n+1}-W_n\leq 0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ W_{n+1}\leq W_n$

La suite (W_n) est donc décroissante. Comme les termes de (W_n) sont positifs $(W_n\geq 0)$ alors la suite (W_n) est décroissante et positive.

c-Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbf{W}_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\times\sin^{n+1}(t)dt$

Posons: $U=\sin^{n+1}(t)$ ct $V'=\sin(t)$

$U'=(n+1)\cos(t)\cdot\sin^n(t)$ et $V=-\cos(t)$

$W_{n+2}=[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)dt$

$W_{n+2}=[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt$ $W_{n+2}=$ $[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}dt$

$W_{n+2}=0+(n+1)W_n-(n+1)W_{n+2}$

$W_{n+2}+(n+1)W_{n+2}=(n+1)W_n\Rightarrow(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$

d- Justification

La suite (W_n) est donc décroissante $\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+2}\leq W_{n+1}\leq W_n$

Or $W_n\geq 0$, d'où $\frac{W_{n+2}}{W_n}\leq\frac{W_{n+1}}{W_n}\leq 1$; donc $\forall n\in\mathbb{N},\frac{n+1}{n+2}\leq\frac{W_{n+1}}{W_n}\leq 1$.

e-Déduction de la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

2° a - Démontrons que (y_n) est constante

On a: $y_n=(n+1)W_{n+1}\times W_n$, d'où $y_{n+1}=(n+2)W_{n+2}\times W_{n+1}$

$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(n+2)W_{n+2}\times W_{n+1}}{(n+1)W_{n+1}\times W_n}\Rightarrow\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(n+2)W_{n+2}}{(n+1)W_n}$ or d'après 1c) $\frac{W_{n+2}}{W_n}=\frac{n+1}{n+2}$

D'où $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{(n+2)}{(n+1)}\times\frac{(n+1)}{(n+2)}=1\Rightarrow y_{n+1}=y_n$ donc (y_n) est constante.

b-Déduction de: $\forall n\in\mathbb{N}, y_n=\frac{\pi}{2}$

On sait que $y_n=(n+1)W_{n+1}\times W_n$ et la suite (y_n) est constante. Calculons le premier terme (y_0)

$y_0=1\times W_1\times W_0=1\times 1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, y_n=y_0=\frac{\pi}{2}$.

c-Déterminons $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2$

On sait que: $n\ \mathrm{W}_n{}^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n+1}} \Rightarrow n\ \mathrm{W}_n{}^2 = \frac{n}{n+1} \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi n}{2(n+1)}$

D'où $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{2n} = \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{d} -$ Déduction de $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ \mathrm{W}_n$

On a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ \mathrm{W}_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n\ \mathrm{W}_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

3°)

a- Déduction de la limite de la suite $(n\ \mathrm{W}_{2n}^2)$

On sait que $n\ \mathrm{W}_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2n\ \mathrm{W}_{2n}^2)$, d'où on a: $\lim_{n\to+\infty}(n\ \mathrm{W}_{2n}^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(2n\ \mathrm{W}_{2n}^2)$

Posons $\mathrm{N} = 2n$ quand $n \to +\infty$ alors $\mathrm{N} \to +\infty$.

On obtient donc : $\lim_{n\to+\infty}(nW_{2n}^2) = \lim_{x\to+\infty}(NW_N^2) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, car

$$\lim_{N\to+\infty}(N\ \mathrm{W}_N^2) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(n\ \mathrm{W}_{2n}^2) = \frac{\pi}{4}$.

b - Démonstration par récurrence

Soit la proposition P_n suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

- Vérifions que P_0 est vraic.

On a: $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_0 = \frac{(0)!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc P_0 est vraie.

- Supposons que P_n esl vraic c'esl-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
- Démontrons que P_{n+1} est vraie

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\ \mathrm{W}_n$ d'où $\mathrm{W}_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\ \mathrm{W}_{2n} \Rightarrow$

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_{2n+2} = \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \times \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow W_{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^2 2^{2n}((n+1)n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

D'où on obtient: $W_{2n+2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$. Donc P_{n+1} est vraie.

En conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n1)^2} \times \frac{n}{2}$.

c- Démontrons que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

On sait que $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + \ln(n!)$ d'où on a :

$e^{t_n} = e^{n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+\ln(n1)} = \frac{e^n}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)}} \times e^{\ln(n1)} = \frac{e^n}{e^{\ln(n)} \times e^{\ln(\sqrt{n}n)}} \times n! \Rightarrow e^{t_n} = \frac{e^n}{n^n \times \sqrt{n}} \times n!$. Donc $e^{t_n} = n! \times \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\mathrm{d} -$ Déterminons la limite de la suite (t_n)

Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty}(t_n)$. (na: $\lim_{n\to+\infty}(t_n) = \lim_{n\to+\infty}(t_{2n}) = \ell$

D'où $\lim_{n\to+\infty}(e^{t_{2n}-2t_n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{n\ \mathrm{W}_{2n}^2}\right) \Rightarrow e^{\ell-2\ell} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

Car $\lim_{n\to+\infty}(nW_{2n}^2) = \frac{\pi}{4}$

D'où $e^{-\ell} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \frac{1}{e^\ell} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow e^\ell = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \ell = \ln(\sqrt{2\pi})$. Donc $\lim_{n\to+\infty}(t_n) = \ln(\sqrt{2\pi})$

CORRECTION SESSION NORMALE 2016 Série C

EXERCICE 1

$1-\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \underline{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]+\ln\left[n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots\cdot\ln\left[n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]-n\ln(n)\right]$$
$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln(n)+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)-n\ln(n)\right]$$
$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(n)+\ln(n)+\cdots+\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)-n\ln(n)\right]$$
$$u_n = \frac{1}{n}\left[n\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)-n\ln(n)\right]$$
$$u_n = \frac{1}{n}\left[n\ln(n)-n\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right]$$

On obtient donc: $u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right]$

$2-a)\forall k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \le k \le n-1$

$\forall x \in \left[1+\frac{k}{n};1+\frac{k+1}{n}\right] \Rightarrow 1+\frac{k}{n} \le x \le 1+\frac{k+1}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \ln(x) \le \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

D'où $\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)dx$

$$\left[x\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \left[x\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$$
$$\left(1+\frac{k+1}{n}-1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le$$
$$\left(1+\frac{k+1}{n}-1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

On a donc:

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

b) Déduisons que : $u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \le \int_1^2 \ln(x)dx \le u_n$

On sait que: $\forall k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \le k \le n-1$;

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

Pour $\mathrm{k}=0$, on a : $\frac{1}{n}\ln(1) \le \int_1^{1+\frac{1}{n}}\ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Pour $\mathrm{k}=1$, on a: $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}}\ln(x)dx\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

Pour $\mathrm{k}=2$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\leq\int_{1+\frac{2}{n}}^{1+\frac{3}{n}}\ln(x)dx\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$

Pour $\mathrm{k}=n-1$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\leq\int_{1+\frac{n-1}{n}}^{2}\ln(x)dx\leq\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)$

En additionnant membre à membre de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $\frac{1}{n}\ln(1)+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\leq\int_1^2\ln(x)dx\leq u_n$

$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\leq\int_1^2\ln(x)dx\leq u_n$ avec $\frac{1}{n}\ln(1)=0$

Or $u_n-\frac{1}{n}\ln(2)=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$

Donc $u_n-\frac{1}{n}\ln(2)\leq\int_1^2\ln(x)dx\leq u_n$.

3 - Déduisons la limite de la suite (u_n)

On sait que $u_n-\frac{1}{n}\ln(2)\leq\int_1^2\ln(x)dx\leq u_n$ d'où

$u_n-\frac{1}{n}\ln(2)\leq\int_1^2\ln(x)dx$ et $u_n\geq\int_1^2\ln(x)dx$

$u_n\leq\int_1^2\ln(x)dx+\frac{1}{n}\ln(2)$ et $u_n\geq\int_1^2\ln(x)dx$

En encadrant u_n, on obtient: $\int_1^2\ln(x)dx\leq u_n\leq\int_1^2\ln(x)dx+\frac{1}{n}\ln(2)$

On sait que: $\int_1^2\ln(x)dx=2\ln(2)-1$, on a :

$2\ln(2)-1\leq u_n\leq 2\ln(2)-1+\frac{1}{n}\ln(2)$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(2\ln(2)-1+\frac{1}{n}\ln(2)\right)=2\ln(2)-1$

Donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=2\ln(2)-1$

EXERCICE 2

1 - Démontrer que M appartient à (/) si et seulement si $3x^2+4y^2-8y=0$

On a : $z=x+iy, M\in(')\Leftrightarrow 14z\bar{z}+16i(z-\bar{z})=z^2+\bar{z}^2$

$$\Leftrightarrow 14(x^2+y^2)+16i(2iy)=(x^2-y^2+2ixy)+(x^2-y^2-2ixy)$$
$$\Leftrightarrow 14x^2+14y^2-32y=2x^2-2y^2$$
$$\Leftrightarrow 12x^2+16y^2-32y=0\Leftrightarrow 3x^2+4y^2-8y=0$$

Au total, $\mathrm{M}\in(/)\Leftrightarrow 3x^2+4y^2-8y=0$

2 – a) Justifions que (1) est une ellipse.

$(1): 3x^2 + 4y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4[y^2 - 2y] = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4[(y-1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(y-1)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1.$

L'équation est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $b = 1$ Donc (%) est une ellipse avec $a > b$

b) Les coordonnées de Ω: $\Omega(0; 1)$

c) Déterminons une équation de l'axe focal de (/).

L'axe ($\Omega, \vec{e_1}$) est l'axe focal de ('). L'axe focal est une droite d'équation $y = 1$.

d) Justifions que A et A' sont les sommets de (/).

La demi-distance focale est : $c = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Dans le repère $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées des sommets sont :

$\mathrm{A}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ et $\mathrm{A}'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$

- Dans le repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées des sommets sont :

$A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ et $A'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$. Donc les affixes des sommets A et A' sont respectivement :

$-\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$ et $\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$

Ces deux points A et A ' sont situés sur l'axe focal car la partie imaginaire de leurs affixes est 1 .

- Dans le repère $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées des foyers sont :

$\mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ et $\mathrm{F}'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$

- Dans le repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées des foyers sont :

$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ et $F'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$. Donc les affixes des foyers F et F' de ( ) sont respectivement: $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$.

3 - Construction de l'ellipse (%) : voir graphique fin exercice 2

4 - a) Déterminons l'équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

L'équation cartésienne de l'hyperbole (H) est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Déterminons les nombres réels a et b

On a : $a = \frac{1}{2}\mathrm{FF}' = \frac{1}{2}|z_{F'} - z_F| = \frac{1}{2}\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Or $c^2 = a^2 + b^2$. On sait aussi que : $c = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}|z_{A'} - z_A| = \frac{1}{2}\left|\frac{4\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

On a : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$b^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ donc $b^2 = 1$.

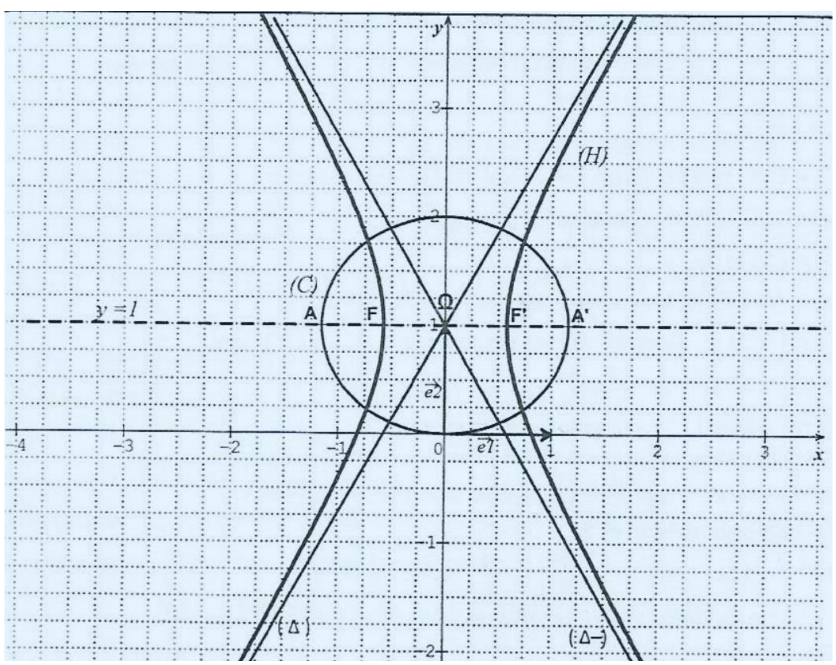
Donc l'équation cartésienne de (H) est : $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 1$

b) Traçons les asymptotes de (H) : Voir graphique fin exercice 2

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les équations des asymptotes sont:
$(\Delta): y = \sqrt{3}x$ et
$(\Delta'): y = -\sqrt{3}x$

Dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les équations des asymptotes sont:
$(\Delta): y = \sqrt{3}x + 1$ et
$(\Delta'): y = -\sqrt{3}x + 1$

c) construction de (H). Voir graphique.



PROBLEME

Partie A

1 - a) La limite de f en 0 .

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} x - 4 = 4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x| = -\infty$

b) les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|\right) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{4}\ln|x| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln(-x)\right)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x - 4 + \frac{1}{4}\ln x\right)$ En posant $X = -x$

quand $x \to -\infty$ alors $\mathrm{X} \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} X\left(-1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{4}\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{X\to +\infty}\frac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

C) Dérivée de f

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = 1 + \frac{1}{4}\times\frac{1}{x} = \frac{4x+1}{4x}$$

Tableau de signe de f'

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{4}[$ et sur $]0; +\infty[$.

$\forall x \in]-\frac{1}{4}; 0[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{4}; 0[$.

d) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-17-ln4}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2- f admet pour maximum le nombre $\frac{-17-ln4}{4} < 0$ sur l'intervalle $]-\infty; 0$ [; donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; 0[$.

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[; f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

De plus $f(3) = -1 + \frac{1}{4}\ln(3)$ et $f(4) = \frac{1}{4}\ln(4)$

On a $f(3) \times f(4) < 0$, donc $3 < \alpha < 4$

3 - Signe de f

Sur l'intervalle $]-\infty; 0[, f$ admet pour maximum le nombre $\frac{-17-l}{4} < 0$ d'où

$f(]-\infty; 0[) =]-\infty; \frac{-17-l}{4}[$ donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$

Sur l'intervalle $]\,0; \alpha[, f$ est strictement croissante et $f(]0; \alpha[) =]-\infty; 0[\mathrm{donc}(x) < 0.$

Sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, f est strictement croissante et $f(]\alpha; +\infty[D =]0; +\infty[$ donc $f(x) > 0.$

Au total: $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, f(x) < 0$

Partie B

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 0$

1 -a) Dérivabilité de f en 0

$\mathrm{D}_h = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{31}{16}x - \frac{1}{8}x\ln|x|\right)$$

$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 1$ car $\lim_{x\to 0} \frac{31}{16}x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{8}x\ln|x| = 0$

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = 1$

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h'(x) = 1 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}x\ln|x| - \frac{1}{8}x^2 \times \frac{1}{x}$

$h'(x) = 1 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}x\ln|x| - \frac{1}{8}x$

$h'(x) = 1 - 4x - \frac{1}{4}x\ln|x| \Rightarrow h'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4}\ln|x|\right) \Rightarrow$

$h'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 4 + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right)$. Or $f(x) = x - 4 + \ln|x|$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

c) Signe de $h'(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$ d'où $x = \frac{1}{\alpha}$

Si $x \in]-\infty; 0[$ alors $\frac{1}{x} \in \left]-\infty; 0\right[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ d'après partie A3

Si $x \in]0; \frac{1}{\alpha}[$ alors $\frac{1}{x} \in \left]\alpha; +\infty\right[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

Si $x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ alors $\frac{1}{x} \in \left]0; \alpha\right[$ d'où $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

Tableau de signe $h'(x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f\left(\frac{1}{x}\right)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 0[U]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0$

$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[, h'(x) < 0$

2 - a) Traçons la tangente (T)

Tracer la tangente (T) en déterminant son équation cartésienne.

L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est : $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$

Donc (T): $y = x + 1$

Autre méthode : Tracer la tangente (T) en utilisant le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et le point $\mathrm{A}(0; 1)$

b) Construction de la courbe (Γ) : voir papier millimétré.

3 -a) Intégration par parties de $\int_{\lambda}^{1} x^2\ln(x)dx$

Posons $\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \quad u'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 \qquad v(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 \end{aligned}$

$\int_\lambda^1 x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_\lambda^1$

$\int_\lambda^1 x^2 \ln(x)dx = -\frac{1}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda + \frac{\lambda^3}{9}$ donc

$\int_\lambda^1 x^2 \ln(x)dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln\lambda$

b) Déterminons l'aire of (λ)

$\forall x \in [\lambda; 1], h(x) > 0$ d'où $A(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 h(x)dx\right) \times 4 \text{ cm}^2$

of $(\lambda) = \left(\int_\lambda^1 \left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln(x)\right)dx\right) \times 4 \text{ cm}^2$

of $(\lambda) = \left(\left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{31}{48}x^3\right]_\lambda^1\right) \times 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2}\left(\int_\lambda^1 x^2\ln(x)dx\right)\text{cm}^2$

of $(\lambda) = \left(\frac{41}{48} - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{31}{48}\lambda^3\right) \times 4 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3\ln\lambda\right)\text{cm}^2$, donc

of $(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right)\text{cm}^2$

c) $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right) = \frac{125}{36}$

Car $\lim_{\lambda\to 0}\left(4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3\ln\lambda\right) = 0$

Partie C

$1 -$ a) Sen de variation de g.

$\forall x \in]0; +\infty\left[, g'(x) = -\frac{1}{4x}\right.$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) g est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$, en particulier sur $[\,3; 4]$.

On a : $g([3; 4]) = [g(4); g(3)] = \left[4 - \frac{\ln}{4}; 4 - \frac{\ln}{4}\right]$, donc

$g([3; 4]) \subset [3; 4]$

c) 1ere méthode :

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow\ 4 - \frac{1}{4}\ln(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow\ x - 4 - \frac{1}{4}\ln(x) = 0$

$\forall x \in]0;+\infty[, \mathrm{g}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

Donc α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0;+\infty[, \mathrm{g}(x) = x$

2éme méthode :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x| = 0$

$\forall x \in]0;+\infty\left[, x - 4 + \frac{1}{4}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 - \frac{1}{4}\ln(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{g}(x)\right.$

Donc α étant solution de l'équation $f(x) = 0$ est aussi solution de l'équation

$\forall x \in]0;+\infty[, \mathrm{g}(x) = x.$

$2 - a)$ Démonstration par récurrence.

On a : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

Soit P_n la proposition suivante $3 \le u_n \le 4$

Vérifions que P_0 est vraie.

On a $u_0 = 3$, d'où $3 \le u_0 \le 4$ donc Po est vraie

Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire pour tout entier naturel $n, 3 \le u_n \le 4$

Démontrer que P_{n+1} est vraie.

On sait que $3 \le u_n \le 4 \Rightarrow \ln(3) \le \ln(u_n) \le \ln(4)$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{4}\ln(4) \le -\tfrac{1}{4}\ln(u_n) \le -\tfrac{1}{4}\ln(3)$$
$$\Rightarrow 4 - \tfrac{1}{4}\ln(4) \le 4 - \tfrac{1}{4}\ln(u_n) \le 4 - \tfrac{1}{4}\ln(3)$$
$$\Rightarrow 4 - \tfrac{1}{4}\ln(4) \le g(u_n) \le 4 - \tfrac{1}{4}\ln(3)$$

D'où g($u_n) \subset \left[4 - \tfrac{1}{4}\ln(4); 4 - \tfrac{1}{4}\ln(3)\right]$ or $\left[4 - \tfrac{1}{4}\ln(4); 4 - \tfrac{1}{4}\ln(3)\right] \subset [3;4]$

Donc $g(u_n) \subset [3;4]$ d'où $u_{n+1} \subset [3;4]$

Au total, on a: $3 \le u_{n+1} \le 4$. P_{n+1} est donc vraie.

En conclusion, pour tout entier naturel $n, 3 \le u_n \le 4$.

b) Démontrons que, pour tout entier naturel $n, (u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

On sait que g est décroissante sur [3;4] et $3 < \alpha < 4$.

- Si $u_n < \alpha$ alors $g(u_n) > g(\alpha)$ donc $u_{n+1} > \alpha$ car $u_{n+1} = g(u_n)$ et $g(\alpha) = \alpha$
- Si $u_n > \alpha$ alors $\mathrm{g}(u_n) < \mathrm{g}(\alpha)$ donc $u_{n+1} < \alpha$

Ainsi si $u_n - \alpha < 0$ alors $u_{n+1} - \alpha > 0$

Si $u_n - \alpha > 0$ alors $u_{n+1} - \alpha < 0$

En conclusion, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrons que, pour tout x élément de $[3; 4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

On sait que $g'(x) = -\frac{1}{4x}$

On a $3 \leq x \leq 4 \Rightarrow 12 \leq 4x \leq 16 \Rightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12} \Rightarrow$

$-\frac{1}{12} \leq -\frac{1}{4x} \leq -\frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16}$
$\Rightarrow -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16} \leq \frac{1}{12}$ donc $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 4]$ et $u_{n+1} \in [3; 4]$ et $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(u_{n+1}) - g(u_n)| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ d'où

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$$

On a: $|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{12}|u_1 - u_0|$

$|u_3 - u_2| \leq \frac{1}{12}|u_2 - u_1|$
$|u_4 - u_3| \leq \frac{1}{12}|u_3 - u_2|$

$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n-1} - u_{n-2}|$
$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12}|u_n - u_{n-1}|$

En multipliant membre à membre les inégalités entre elles, puis en simplifiant, on obtient :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |u_1 - u_0|$$

On a $3 \leq u_n \leq 4$ d'où $3 \leq u_1 \leq 4$; or $u_0 = 3$

$3 - 3 \leq u_1 - u_0 \leq 4 - 3 \Leftrightarrow 0 \leq u_1 - u_0 \leq 1 \Rightarrow |u_1 - u_0| < 1$

Au total, on obtient: $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n \Leftrightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$

d) Démontrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

D'après la question 2-b), on a ($u_n - \alpha$) et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires; donc $u_n \leq \alpha \leq u_{n+1}$; ou $u_{n+1} \leq \alpha \leq u_n$

- Si $u_n \leq \alpha \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 \leq \alpha - u_n \leq u_{n+1} - u_n$ donc

$|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n|$

- Si $u_{n+1} \leq \alpha \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq \alpha - u_n \leq 0$ donc

$|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n|$

D'où $|u_n - \alpha| \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$, donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$

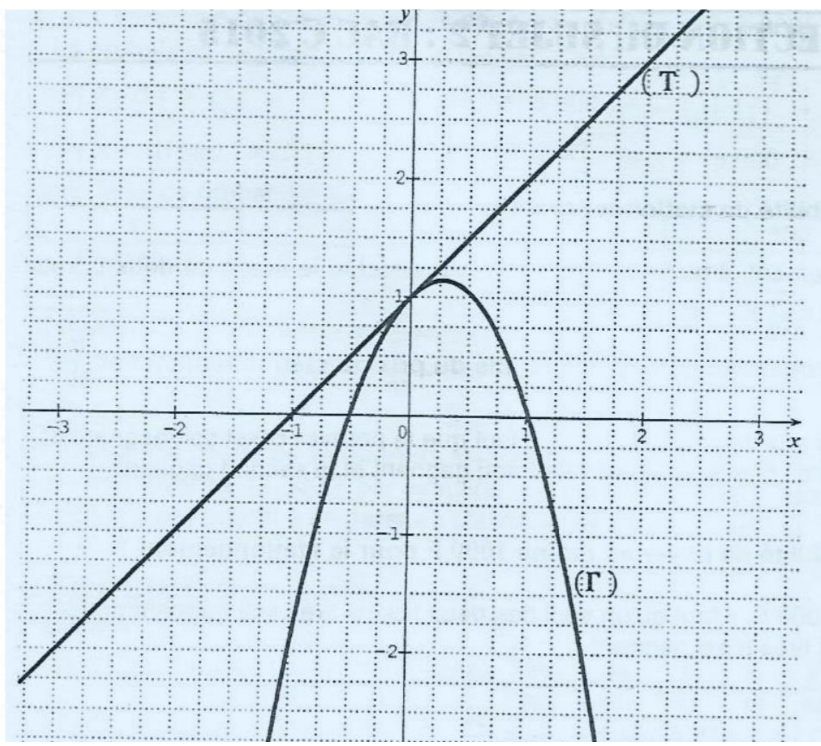
Déterminons une valeur approchée de α à 0,01 près

On a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n} < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{12^n} < 0{,}01 \Rightarrow 12^n > \frac{1}{0{,}01} \Rightarrow$

$12^n > 100 \Rightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 12} \Rightarrow n > 1{,}853$ Or $n \in \mathbb{N}$

Donc à partir de $n \geq 2, u_n$ est une valeur approchée de α à 0,01 près

Le terme u_2 est donc une valeur approchée de α à 0,01 près.



CORRECTION SESSION NORMALE 2015 Série C

EXERCICE 1

Partie I

1. Calculons la probabilité de stationner gratuitement

Soit A l'évènement.

Pour stationner gratuitement, il faut que l'automobiliste effectue le tirage de deux tickets gagnants; d'où $P(A)=\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

2. Justifions que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est $\frac{8}{25}$: Soit B cet évènement .

Pour payer la moitié du prix du stationnement, il faut que le premier ticket soit gagnant et le second non gagnant ou bien le premier ticket non gagnant et le second gagnant; d'où $P(B)=\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}$

3. Calculons la probabilité de payer au moins 1000 F pour le stationnement Soit C cet évènement.

Pour payer au moins 1000 F, il faut qu'un seul des deux tickets tirés soit gagnant ou bien aucun des deux tickets tirés n'est gagnant;

d'où $P(C)=P(B)+\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{8}{25}+\frac{64}{100}=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}$

Autre méthode: $P(C)=1-P(A)=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$

Partie II

1. a) Calculons la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois Nous sommes en presence d'une loi binomiale. La probabilité pour un stationnement interdit est $\frac{4}{5}$ et celle pour un stationnement non interdit est $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$$q_n=C_n^0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^n+C_n^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$
$$q_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+n\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$
$$q_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n\left[1+n\times\frac{4}{5}\times 5\right]$$
$$q_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n(1+4n)$$

b) Démontrons que la probabilité P_n de payer une fois l'amende est $P_n=1-\frac{1}{5^n}$ La probabilité $\overline{P_n}$ de l'évènement contraire (celui de ne pas payer l'amende) est

$$\overline{P_n}=C_n^0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Donc la probabilié démandée est $P_n=1-\overline{P_n}=1-\left(\frac{1}{5}\right)^n$ d'où $P_n=1-\frac{1}{5^n}$

c) Déterminons le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0{,}99$

$$P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{5^n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{1}{5^n} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow 5^n \geq \frac{1}{0{,}01}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{0{,}01}\right)}{\ln} \Leftrightarrow n \geq 2{,}86$$

Donc le plus petit entier naturel est $n_0 = 3$

2. a) L'ensemble des valeurs prises par X est: $X(\Omega) = \{0; 5000; 10000; 15000\}$ La probabilité de chaque valeur prise par X est :

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}; P(X=5000) = C_3^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 3 \times \frac{4}{125} = \frac{12}{125}$$
$$P(X=10000) = C_3^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1 = 3 \times \frac{16}{125} = \frac{48}{125}; P(X=15000) = C_3^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{64}{125}$$

Donc la loi de probabilité est

x_i	0	5000	10000	15000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

b) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$.

$E(X) = 0 \times \frac{1}{125} + 5000 \times \frac{12}{125} + 10000 \times \frac{48}{125} + 15000 \times \frac{64}{125}$
$E(X) = \frac{1500000}{125}$ $E(X) = 12000.$

En prenant le risque de se garer en stationnement interdit 3 fois dans la semaine, RIKO paye en moyenne 12000 F par semaine; ce qui est largement superieur au 4800 F; Donc il n'a pas intérêt à se garer en stationnement interdit.

EXERCICE 2

Partie I

1. a) Module et argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$

$$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{2}{2} = 1$$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \arg(z_A) - \arg(z_B)[2\pi]$ $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; donc $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) Déduisons que le triangle OAB est équilatéral :

On a : $\begin{cases} \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1 \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_A| = |z_B| \\ \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{OB}};\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{OB} = \mathrm{OA} \\ \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{OB}};\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc le triangle OAB est équilatéral

Autre méthode: On a : $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc le triangle OAB est équilatéral.

2. a) L'image de O par f est :

$f(O) = t_{\overrightarrow{PQ}} \circ r_{\left(J;\frac{\pi}{3}\right)}(O) = t_{\overrightarrow{PQ}}(P) = Q$ donc $f(O) = Q$

b) Démontrons que f est une rotation.

f est la composée d'une rotation d'angle non nul et d'une translation, donc f est un deplacement, précisement une rotation.

Ona: $f(O) = Q$ et $f(J) = \mathrm{A}$, or $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{OJ}};\overrightarrow{\mathrm{QA}}) = \frac{\pi}{3}$; donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

c) Construction du centre K de f. (Voir figure à la fin)

K est le point d'intersection des médiatrices des segments [Q] et [JA].

Partie II

1. a) Démontrons que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2|z| = |y - 3|$

Or $\mathrm{OM} = |z|$ et $\mathrm{MH} = |z - z_{\mathrm{H}}| = |x + iy - x - 3i| = |i(y - 3)| = |y - 3|$

D'où $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2OM = MH$ Donc $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$

b) Justifions que (Γ) est une ellipse

Dans le repère $(O, \overrightarrow{\mathrm{e_1}}, \overrightarrow{\mathrm{e_2}}), M(x; y)$ et $\mathrm{H}(x; 3)$,

donc H est le projeté orthogonal de M sur la droite (D) d'équation $y = 3$.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc (Γ) est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

Or $O \notin (D)$. En conclusion (Γ) est une ellipse de foyer O, de directrice associée (D)

d'équation $y = 3$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

c) Démontrons que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2|z| = |y - 3| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(y - 3)^2} \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = (y - 3)^2$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = y^2 - 6y + 9$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4x^2 + 3y^2 + 6y = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 3[(y+1)^2 - 1] = 9$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

d) Le centre de (Γ) est $\Omega(0, -1)$

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), (\Gamma)$ a pour équation $\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{4} = 1.$

On a donc $a^2 = 3$ et $b^2 = 4 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$ et $b = 2$

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$), les coordonnées des sommets de (Γ) sont:

$\mathrm{A}_1\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}, \mathrm{A}'_1\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}, \mathrm{B}_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}'{}_1\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

Dans le repère ($0, \overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}$), les coordonnées des sommets de (Γ) sont:

$S\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}, S_1\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}, J\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $J'\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

e) Tracer de (Γ) (voir figure à la fin).

2. a) Démontrons que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

f est une rotation donc une isométrie. f conserve donc la distance.

On a: $f(M) = M'; f(O) = Q$ et $f(H) = H'$ d'où $\frac{MO}{MH} = \frac{M'Q}{M'H'} = \frac{1}{2}$

Donc l'image de l'ellipse (Γ) par f est l'ellipse (Γ') d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

b) Déterminons le foyer de (Γ')

On a $f(O) = Q$, donc le foyer de (Γ') est le point Q.

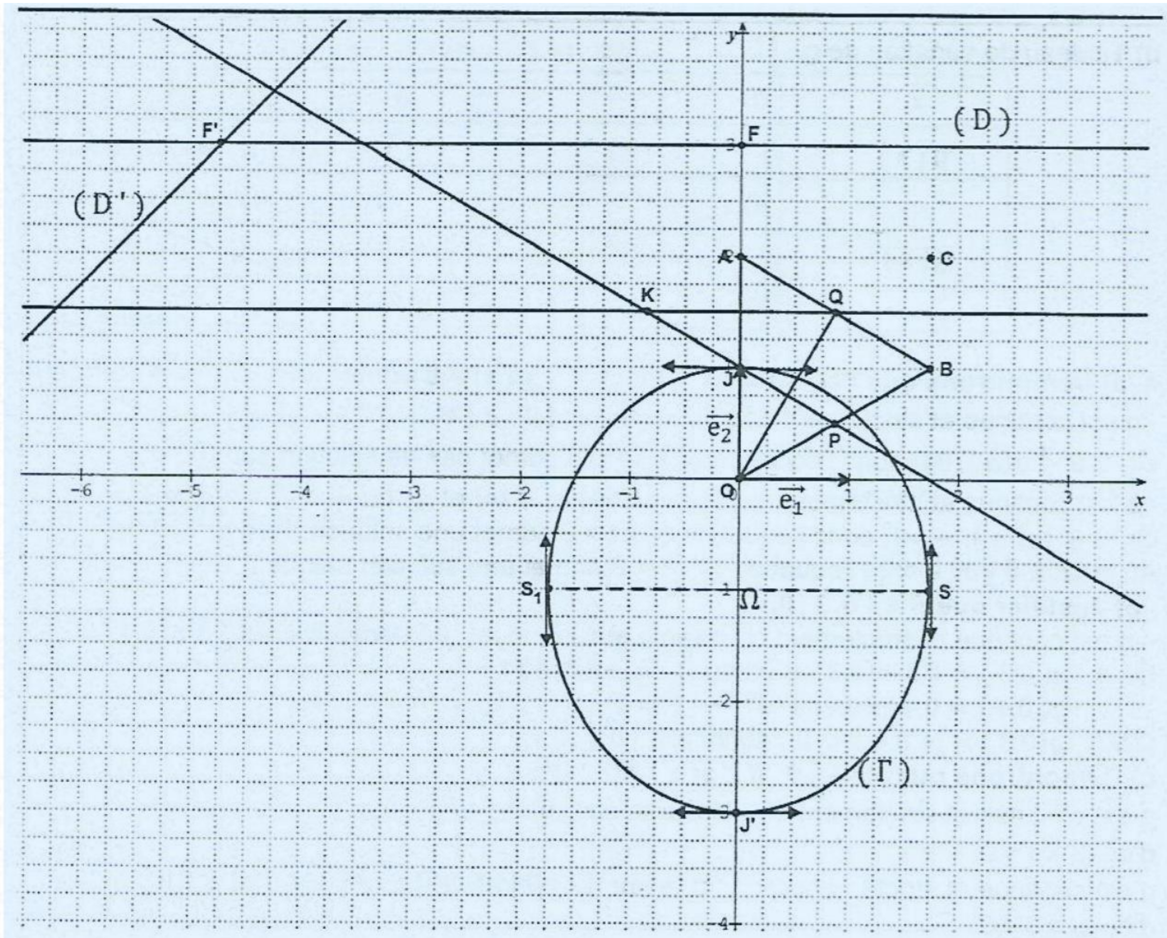
Déterminons la directrice associée à (Γ')

On a $f(J) = A$ et $f(O) = Q$ donc (Q) est l'axe focal de l'ellipse (Γ').

Par ailleurs, F d'affixe $3i$ appartient à la droite (D). Soit F ' image de F par f.

On a: $f(D') = (D')$, donc la directrice associée à (Γ') est la droite (D') passant par F' et perpendiculaire à (AQ).

Autre méthode: Une équation de la droite (D') est : $y = x\sqrt{3} + 6$



PROBLEME

Partie A

1. $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x + e^x - 1) = \lim_{x\to 0} x\ln x + \lim_{x\to 0}(e^x - 1)$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, car $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}(x\ln x + e^x - 1) = \lim_{x\to +\infty} x\ln x + \lim_{x\to +\infty}(e^x - 1)$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, car $\lim_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty}(e^x - 1) = +\infty$

2. Justifions que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = h(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \ln x + 1 + e^x$

Donc $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = h(x)$

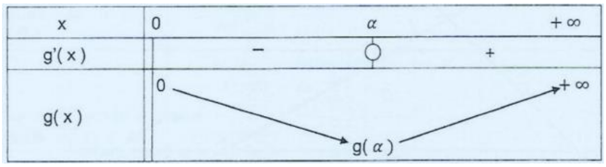
3. a) Sens de variation de g sur $]0;+\infty[$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. Or le signe de $h(x)$ est donné dans le sujet ;

d'où $\forall x \in]0;\alpha[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

b) Tableau de variation de g



4. a) Démontrons que l'équation $x \in]0; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique β - g est continue et strictement decroissante sur] 0; α[et $g(]0; \alpha[) =]g(\alpha); 0[$; Or $0 \notin]g(\alpha); 0[$; donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; \alpha[$. - g est continue et strictement croissante sur] $\alpha; +\infty$[et $g(]\alpha; +\infty[) =]g(\alpha); +\infty[$ Or $0 \in]g(\alpha); +\infty$ [, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\beta \in$ $]\alpha; +\infty[$. Au total, $\in$] $0; +\infty$ [, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]\alpha; +\infty$ [.

b) Justifier que $\beta \in]0{,}3; 0{,}4[$

g est continue et strictement croissante sur] $\alpha; +\infty$ [, en particulier sur] 0,3; 0,4 [.

On a: $g(0{,}3) = 0{,}3\ln(0{,}3) + e^{0{,}3} - 1 = -0{,}0113$

$g(0{,}4) = 0{,}4\ln(0{,}4) + e^{0{,}4} - 1 = 0{,}1253$

D'où : $g(0{,}3) \times g(0{,}4) < 0$, donc $\beta \in]0{,}3; 0{,}4[$

c) Démontrons que $\forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0; \forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$

g est continue et strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et $g(]0; \alpha[) =]g(\alpha); 0[$;

d'où $g(x) < 0$.

g est continue et strictement croissante sur] $\alpha; \beta$[et $g(]\alpha; \beta[) =]g(\alpha); 0[$;

d'où $g(x) < 0$.

g est continue et strictement croissante sur $]\beta; +\infty[$ et $g(]\beta; +\infty[) =]0; +\infty[$; d'où $g(x) > 0$.

En conclusion, $\forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0$

Partie B

$$\forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$$

1.a) Démontrons que f est continue en 0

$D_f = [0; +\infty[$. Or $0 \in [0; +\infty[$, d'où f est définie en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^{-x^2} - 1\right)\ln x = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}\right)x^2\ln x$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$ et $\lim_{x\to 0} -\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{e^{x}-1}{x} = -1$

D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0

2. Justifions que f est dérivable en 0

On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\left(e^{-x^2}-1\right)\ln x}{x} = -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right) x\ln x$

D'où $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right) x\ln x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0, \text{ car } \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right) = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right) = -1$$

Donc f est dérivable en 0 .

3. a)Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(e^{-x^2}-1\right)\ln x$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \text{ car } \lim_{x\to +\infty} \left(e^{-x^2}-1\right) = -1 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

b) Calculons $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a: $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^{-x^2}-1\right)\ln x}{x}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(e^{-x^2}-1\right)\frac{\ln x}{x} = 0, \text{ car } \lim_{x\to +\infty} e^{-x^2}-1 = -1 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

c)Interprétation graphique

On a : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe (OI)

4. a) Démontrons que $\forall x \in]0;+\infty\left[, f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} g(x^2)\right.$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \left(\mathrm{e}^{-x^2}-1\right)\ln x$$
$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\ln x + \left(\mathrm{e}^{-x^2}-1\right)\times\frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\ln x + \mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}$$
$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\left(2x^2\ln x + \mathrm{e}^{x^2}-1\right)$$
$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\left(x^2\ln x^2 + \mathrm{e}^{x^2}-1\right)$$

Donc $f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} g(x^2)$, avec $g(x^2) = x^2\ln x^2 + \mathrm{e}^{x^2}-1$

b) Sens de variation de f sur $[0; +\infty[$

l'équation $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0$ admet pour racine $\mathrm{x} = \beta$; d'où l'équation $\mathrm{g}(\mathrm{x}^2) = 0$ aura pour racine $x = \sqrt{\beta}$.

Tableau de signe de f'

x	0		$\sqrt{\beta}$		$+\infty$
$-\dfrac{e^{-x^2}}{x}$		$-$	|	$-$	
$g(x^2)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$\forall x \in]0; \sqrt{\beta}[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{\beta}[$.

$\forall x \in]\sqrt{\beta}; +\infty[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]\sqrt{\beta}; +\infty[$.
c) Tableau de Variation de f

x	0		$\sqrt{\beta}$		$+\infty$
$f'(x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\sqrt{\beta})$	$\searrow$	$-\infty$

5. a) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 1 L'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Or en calculant, on a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$

Donc $(T): y = \left(-1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)(x-1) \Leftrightarrow (T): y = \left(-1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)x + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$

b) Traçons (T) et (C) : voir figure à la fin

Partie C

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x$, d'où $\forall x \in]0; +\infty[, \mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$:(a) $\forall x \in [0; +\infty[, -x \leq 0$ d'où $e^{-x} \leq e^0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1 : (b)$

Des relations (a) et (b), on en tire la relation suivante :

$$1 \geq \mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x \Rightarrow \forall x \in]0; +\infty[, -1 \leq -\mathrm{e}^{-x} \leq -(1-x)$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, -1 \leq -\mathrm{e}^{-x} \leq -1 + x$

b) Démontrons que $\forall x \in]0;+\infty\left[, 1-x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}\right.$

Soit $t \in]0;+\infty[$ et $x \in]0;+\infty[$; on a : $-1 \leq -e^{-t} \leq -1+t$

$$\int_0^x -dt \leq \int_0^x -e^{-t}dt \leq \int_0^x (-1+t)dt$$
$$[-t]_0^x \leq [e^{-t}]_0^x \leq \left[-t+\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$-x \leq e^{-x}-1 \leq -x+\frac{x^2}{2}$$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité, on obtient:

$$1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}.$$

En conclusion: $\forall x \in]0;+\infty\left[, 1-x \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}\right.$

2. a) Calculons $\mathrm{I}_n(t)$ à l'aide d'une intégration par parties

$\mathrm{I}_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \, \mathrm{d}x$

Posons: $\mathrm{U} = \ln x$ et $\mathrm{V}' = x^n$

$\mathrm{U}' = \frac{1}{x}$ et $\mathrm{V} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

d'où $\mathrm{I}_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$

$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^n}{n+1} dx$$
$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \left[\frac{1}{n+1} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_t^1$$
$$I_n(t) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_t^1 - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_t^1$$

$$I_n(t) = \left(\frac{1^{n+1}}{n+1}\ln 1 - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right) - \left(\frac{1^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$
$$I_n(t) = -\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Donc $\mathrm{I}_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) Démontrons que : $t \in]0;1], -I_2(t) + \frac{1}{2}1_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

On a: $\forall x \in]0;+\infty\left[, 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}\right.$. En ajoutant (-1) à chaque membre de l'inégalité, on obtient: $-x \leq \mathrm{e}^{-x}-1 \leq -x+\frac{x^2}{2}$.

En remplaçant x par x^2, on aura $-x^2 \leq \mathrm{e}^{-x^2}-1 \leq -x^2+\frac{x^4}{2}$

$\forall x \in]0;1[, \ln x < 0$. En multipliant par $\ln x$ l'inégalité, on obtient:

$$-x^2 \leq \mathrm{e}^{-x^2} - 1 \leq -x^2 + \frac{x^4}{2} \Rightarrow$$

$$-x^2 \ln x \geq \left(e^{-x^2} - 1\right)\ln x \geq \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ln x \Rightarrow$$

$$-x^2 \ln x \geq f(x) \geq \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ln x \Leftrightarrow \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ln x \leq f(x) \leq -x^2 \ln x$$

$\forall t \in]0;1\ ]$, on a: $\int_t^1 \left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ln x dx \leq \int_t^1 f(x)dx \leq \int_t^1 -x^2 \ln x dx$

$$-\int_t^1 x^2 \ln x dx + \frac{1}{2}\int_t^1 x^4 \ln x dx \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -\int_t^1 x^2 \ln x dx$$

En utilisant la valeur de $\mathrm{I}_n(t) = \int_t^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$, on aura :

$I_2(t) = \int_t^1 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_4(t) = \int_t^1 x^4 \ln x \,\mathrm{d}x$.

On obtient donc $\forall t \in]0;1], -I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

3. a) Interprétation géométrique de S

$\mathrm{S} = \int_0^1 f(x)dx$ est l'aire (en u.a) de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f,

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Déterminons un encadrement de S

On sait que : $-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$

d'où $\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) \leq \lim_{t\to 0}\int_t^1 f(x)dx \leq \lim_{t\to 0} - I_2(t) \Leftrightarrow$

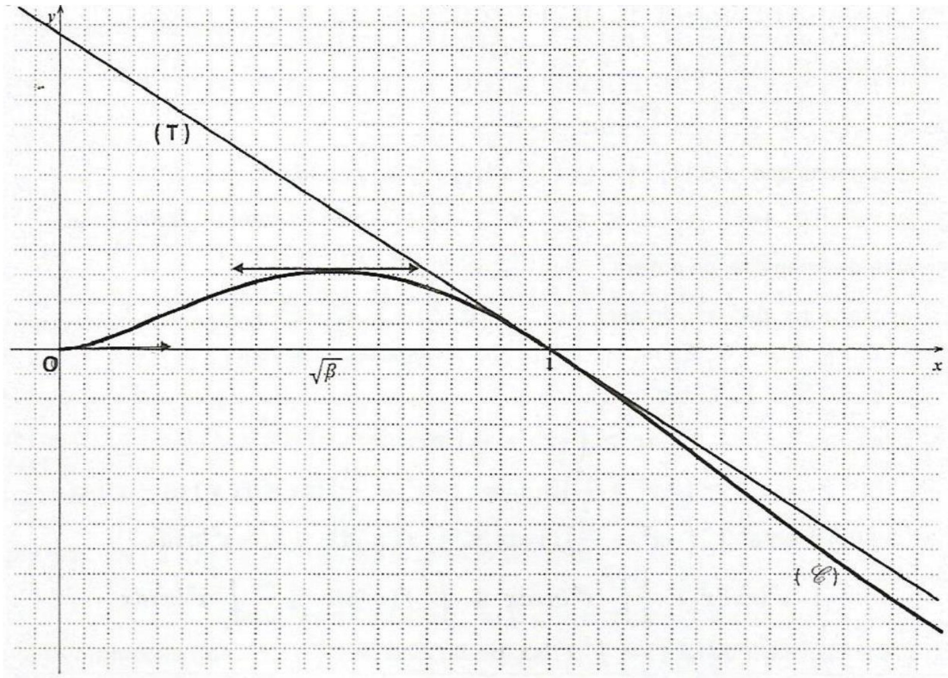
$$\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) \leq S \leq \lim_{t\to 0} - I_2(t)$$

En partant de la valeur intégrée de $\mathrm{I}_n(t)$ de la question 2.a),

on aura: $I_2(t) = \frac{t^3}{9} - \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{9}$ et $I_4(t) = \frac{t^5}{25} - \frac{t^5}{5}\ln t - \frac{1}{25}$

d'où $\lim_{t\to 0}\left(-I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t)\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} = \frac{41}{450}$ et $\lim_{t\to 0}(-I_2(t)) = \frac{1}{9}$

Donc $\frac{41}{450} \leq \mathrm{S} \leq \frac{1}{9}$



y
(T)
O
$\sqrt{\beta}$
1
x
($\mathscr{C}$)

CORRECTION SESSION NORMALE 2014 Série C

EXERCICE 1

1. 1- 1ère Méthode : D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

dividende	45	16	13	3
diviseur	16	13	3	1
reste	13	3	1	0

On a PGCD $(45; 16) = 1$, donc 45 et 16 sont premiers entre eux ; en effet, il existe un couple (a, b) d'entier relatifs tel que $45a - 16b = 1$

2nd Méthode :

On a $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 15 - 14 = 1$. (i); d'après le théorème de Bézout, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

Pour $n = 3$, on a : $14n + 3 = 45$ et $5n + 1 = 16$.

D'après la relation ($\text{i}): 5 \times 45 - 14 \times 16 = 1$, donc $(a, b) = (5,14)$; en effet, il existe un couple (a, b) d'entiers relatifs tel que $45a - 16b = 1$.

2 - a) 1 ère Méthode :

on a : $45 \times 10 - 16 \times 28 = 2$, donc le couple $(10,28)$ est une solution particulière de (E).

2nd Méthode :

On a $45 \times 5 - 16 \times 14 = 1$.

En multipliant membre à membre par 2 on obtient $45 \times 10 - 16 \times 28 = 2$.

Donc le couple $(10; 28)$ est une solution particulière de (E).

b) On a : $45x - 16y = 2$

$$45 \times 10 - 16 \times 28 = 2$$

La soustraction membre à membre donne :

$45(x - 10) - 16(y - 28) = 0$ d'où $45(x - 10) = 16(y - 28)$.

45 divise $16(y - 28)$ et 45 est premier avec 16 , donc d'après le théorème de Gauss,

45 divise $y-28$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$, tel que $y-28=45k$, d'où $y=45k+28$

16 divise $45(x-10)$ et 16 est premier avec 45 , donc d'après le théorème de Gauss,

16 divise $x-10$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x-10=16k$, d'où $x=16k+10$.

L'ensemble des solutions est : $S=\{(16k+10; 45k+28), k \in \mathbb{Z},$

II. 1 -On a 90u et $32v+4$ représentent chacun le nombre de jours écoulés entre J_0 et J_1 ⊤ (J_0 non compris) par les navires.

Les deux navires A et B entrent au port le même jour si et seulement si on a :

$90u=32v+4$ soit $90u-32v=4$ c'est-à-dire $45u-16v=2$.

On en déduire que le couple (u, v) est solution de (E)

2- Le couple (u_0, v_0) est le premier couple d'entiers tous positifs solution de (E):

$\mathrm{k}=0, (\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)=(\mathrm{u}, \mathrm{v})=(10; 28)$

3 -Le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris) est donné par: $90\mathrm{u}=90\times 10=900$ Jours. Ou bien $32\mathrm{v}+4=32\times 28+4=900$ jours.

EXERCICE 2

1. 1 a) ABC est un triangle rectangle en A. Voir figure
   b) ABC est un triangle rectangle en A, d'où les points A, B et C ne sont pas alignés, par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ donc la similitude S n'est pas une translation.

c) On a: $S(A)=B$ et $S(C)=A$, d'où l'angle de S est: $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}})$.

Or $(\overline{\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}})=-(\overline{\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}})=(\overline{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}})$, d'où Mes $(\overline{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}})=-\frac{\pi}{2}$ donc l'angle de la similitude S est : $-\frac{\pi}{2}$

d) Le rapport de la similitude S est :

$S(A)=B$ et $S(C)=A$ d'où $k=\frac{BA}{AC}$. Or $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Or $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{AB}{AC}$ donc $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Le rapport de la similitude S est : $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$2-$ a) $S(A)=B \Rightarrow \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})=-\frac{\pi}{2}$, d'où le triangle ΩAB est rectangle en Ω; donc Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

$\mathrm{S(C)}=\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{Mes}(\overline{\overline{\Omega\mathrm{C}, \overrightarrow{\Omega A}}})=-\frac{\pi}{2}$, d'où le triangle $\Omega\mathrm{AC}$ est un triangle rectangle en Ω. Donc Ω appartient au cercle de diamètre [CA].

b) Le triangle ΩAB est rectangle en Ω, donc $(A\Omega) \perp (B\Omega)$.

Le triangle ΩAC est rectangle en Ω, donc $(A\Omega) \perp (C\Omega)$

Par conséquent: $(B\Omega) = (C\Omega)$ d'où B, Ω et C sont alignés.

$\Omega \in (BC)$ donc $(A\Omega) \perp (BC)$.

En conclusion Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

$3 - a) S(C) = A$ et $C \in (D)$, donc $S((D))$ est perpendiculaire à

(D) passant par A, donc $S((D)) = (\Delta)$.

$S(A) = B$ et $A \in (\Delta)$, donc $S((\Delta))$ est la perpendiculaire à (Δ) passant par B.

Au total, $S((\Delta)) = (B')$

b) On a: (D) $\cap$ $(\Delta) = \{C'\}$ or $S((D)) = (\Delta)$ et $S((\Delta)) = (BB')$

donc $\{S(C')\} = S((D)) \cap S((\Delta))$. De plus $(BB') \cap (\Delta) = \{B'\}$.

Donc $S(C') = B'$.

c) On a : $S(C') = B'$, donc Mes $\left(\widehat{\Omega C', \Omega B'}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc le point Ω appartient au cercle de diamètre $[B'C']$; donc lorsque (Δ) varie, le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par le point fixe Ω.

II . 1 - Placer le point I. Voir figure

2 a) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right)$, on a $z_A = 0, z_B = i$ et $z_1 = 1$

$\mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -ib$ (avec $b > 0) \Rightarrow \frac{z_C - 0}{i - 0} = -ib \Rightarrow \mathrm{z_c} = \mathrm{b}$ donc $\mathrm{zc_c} = |\mathrm{z_c}| = \mathrm{b}$ car $\mathrm{b} \in \mathbb{R}_+^*$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d' où $\frac{|i - 0|}{|z_C - 0|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{|z_C|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

donc $|z_c| = z_c = \sqrt{3}$. En conclusion, l'affixe de C est $\sqrt{3}$

b) L'écriture complexe de la similitude S est de la forme $z' = az + b$.

$S(A) = B \Rightarrow z'_B = az_A + b \Rightarrow i = a(0) + b \Rightarrow b = i$

$S(C) = A \Rightarrow z'_A = az_C + b \Rightarrow 0 = a\sqrt{3} + i \Rightarrow a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = -\frac{\sqrt{3}}{3}iz + i$

c) On a $S(\Omega) = \Omega$, donc $z_\Omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}iz_\Omega + i \Rightarrow z_\Omega\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \mathrm{i} \Rightarrow z_\Omega = \frac{i}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i} \Rightarrow z_\Omega = \frac{3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 9i}{12}$, donc $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

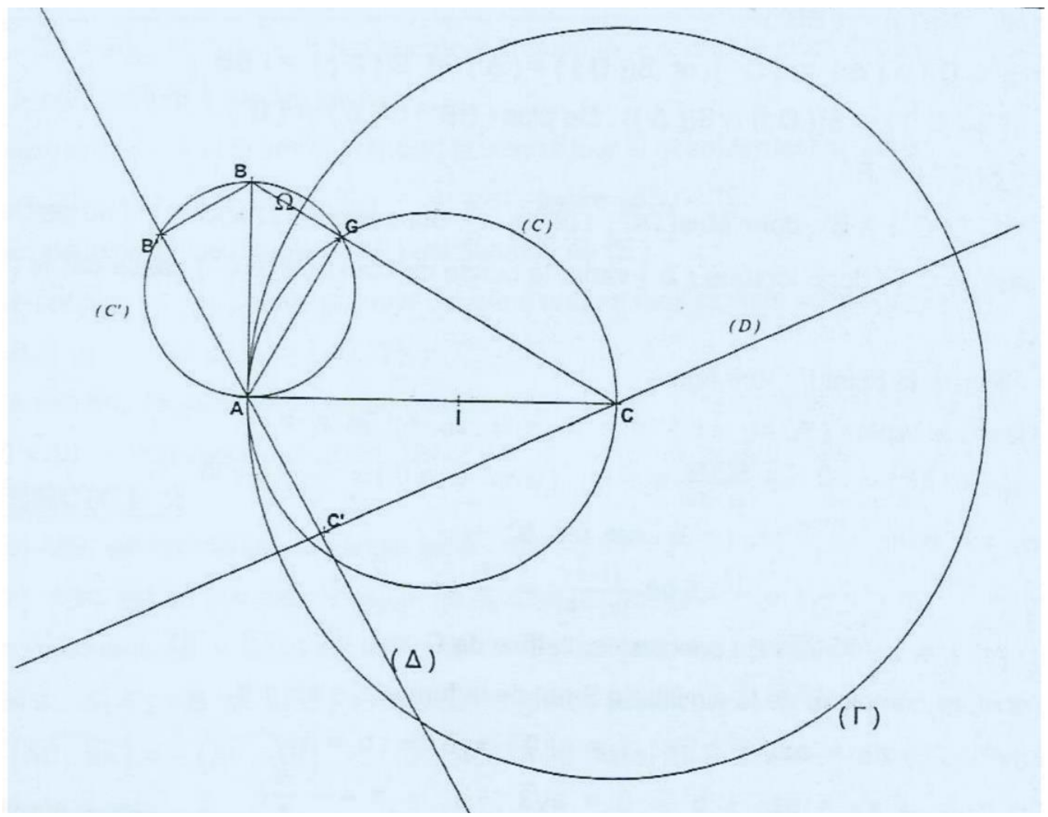
3 -a) Déterminons l'ensemble (Γ).

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{\sqrt{3}}{3}iz + i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{\sqrt{3}}{3}i\left(z + \frac{i}{-\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right||z-\sqrt{3}| = 1 \Leftrightarrow |z-\sqrt{3}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_M - z_C| = \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow CM = \sqrt{3}$ donc l'ensemble (r) est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{3}$.

b) Tracer de (Γ). Voir figure.



PROBLEME

Partie A

1-On a: $D_f = [0;+\infty[$

$0 \in D_f$; donc f est définie en 0 .

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x^2(1-2\ln x) = \lim_{x\to0}(x^2 - 2x^2\ln x) = 0$

Car $\lim_{x\to0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to0} x^2\ln x = 0$

d'où $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0 .

2- Calculons

$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-2\ln x)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-2x\ln x) = 0$

car $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

fest donc dérivable en 0 et $f(0)=0$. Donc (") admet une tangente horizontale en 0 .
$3-a)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1-2\ln x) = -\infty$; car $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} 1-2\ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x(1-2\ln x) = -\infty$; car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} 1-2\ln x = -\infty$$

b) Ona $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

donc la courbe (') admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

4 -a) Démontrons que $f'(x) = -4x\ln x$

On a $\forall x \in]0;+\infty\left[, f'(x) = 2x(1-2\ln x) + x^2\left(-2\times\frac{1}{x}\right)\right.$

$$= 2x - 4x\ln x - 2x$$

donc $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -4x\ln x.$

b) Sens de variation de f.

Signe de $f'(x)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0$ ou $\ln x = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

x	0		1		+ ∞
- 4x		-		-	
lnx		-	0	+	
f '(x)		+	0	-	

D'où $\forall x \in [0;1[f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1[$. $\forall x \in]1;+\infty[$, $\mathrm{f'(x)} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c) $\mathrm{f}(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(1 - 2\ln(\sqrt{e})) = e(1 - \ln e) = 0$

$\forall x \in [0;1], 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \mathrm{f}(0) \leq \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{f}(1)$ car f est croissante sur [0;1];

donc $0 \leq f(x) \leq 1$
$\forall x \in [1;\sqrt{e}], 1 \leq x \leq \sqrt{e} \Rightarrow \mathrm{f}(1) \geq \mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f}(\sqrt{e})$ car f est décroissante sur $[1;\sqrt{e}]$; donc $1 \geq \mathrm{f(x)} \geq 0$. Par conséquent

$\forall x \in [0;\sqrt{e}], 0 \leq \mathrm{f}(x) \leq 1$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[, x > \sqrt{e} \Rightarrow \mathrm{f(x)} < \mathrm{f}(\sqrt{e})$ car f est décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$. Donc $\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[, \mathrm{f(x)} < 0$.

Au total $\forall x \in [0;\sqrt{e}], 0 \leq \mathrm{f}(x) \leq 1$

$\forall x \in]\sqrt{e};+\infty[, \mathrm{f(x)} < 0.$

5 - a)Equation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $\sqrt{e}$

L'équation de la tangente (T) est de la forme: $\mathrm{y} = \mathrm{f}'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + \mathrm{f}(\sqrt{e})$

or $\mathrm{f}(\sqrt{e}) = 0$ et $\mathrm{f}'(\sqrt{e}) = -4\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) = -2\sqrt{e}$

d'ou $\mathrm{y} = -2\sqrt{e}(x - \sqrt{e})$ $\mathrm{donc(T)}: \mathrm{y} = -2\sqrt{e}x + 2e$

b) voir courbe à la fin .

Partie B

1 - Intégration par partie

$\mathrm{S} = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x t^2(1 - 2\ln t)dt$

Posons $\begin{cases} \mathrm{U(t)} = 1 - 2\ln t \\ \mathrm{V}'(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{U}'(\mathrm{t}) = -\frac{2}{t} \\ \mathrm{V(t)} = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

Donc $S = \left[\frac{1}{3}t^3(1 - 2\ln t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{2}{t} \times \frac{1}{3}t^3 dt$

$S=\left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln t)\right]_a^x+\int_a^x\frac{2}{3}t^2dt$
$S=\left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln t)\right]_a^x+\left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}t^3\right]_a^x=\left[\frac{1}{3}t^3\left(\frac{5}{3}-2\ln t\right)\right]_a^x$

Au total , on a: $S=\frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln x\right)-\frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)$

2 -a) Si$a<\sqrt{e}$ alors $\mathrm{f(t)}>0$ donc

$\mathcal{A}(\mathrm{a})=\left(\int_{\mathrm{a}}^{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{f(t)dt}\right)\mathrm{ua}=\left(4\int_{\mathrm{a}}^{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{f}(t)dt\right)\mathrm{cm}^2$

Si $a>\sqrt{e}$ alors $\mathrm{f(t)}<0$; donc

$\mathcal{A}(\mathrm{a})=(\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{a}-\mathrm{f}(t)dt)ua=\left(-\int_{a}^{\sqrt{\mathrm{e}}}-\mathrm{f(t)dt}\right)\mathrm{ua}$

$A(a)=\left(4\int_a^{\sqrt{e}}\mathrm{f}(t)dt\right)\mathrm{cm}^2$

b) Pour $a<\sqrt{e}$ On a

$\mathrm{S}=\int_a^x f(t)dt$ et $A(\mathrm{a})=\left(4\int_a^{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{f(t)dt}\right)\mathrm{cm}^2$ donc d'après la Partie B 1- on a :

$$A(a)=\left[\frac{(\sqrt{e})^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln\sqrt{e}\right)-\frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\times 4c^2$$

$$A(a)=\left[\frac{3\sqrt{e}}{9}-\frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\mathrm{cm}^2$$

$$\lim_{n\to 0}A(a)=\lim_{n\to 0}\left(\left[\frac{8e\sqrt{e}}{9}-\frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\right)$$
$$\lim_{n\to 0}A(a)=\lim_{n\to 0}\left(\frac{8e\sqrt{e}}{9}-\frac{20}{9}a^3+\frac{8}{3}a^3\ln a\right)$$

$$\lim_{n\to 0}A(a)=\frac{8e\sqrt{e}}{9}\ \mathrm{cm}^2$$

c) Pour $\mathrm{a}>\sqrt{e}$, on a :

$A(a)=\left[\frac{8e\sqrt{e}}{9}-\frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)\right]\mathrm{cm}^2$ et $A(a)=\left(\frac{8}{9}e\sqrt{e}\right)\mathrm{cm}^2$ donc

Par identification, on a:$-\frac{4}{3}a^3\left(\frac{5}{3}-2\ln a\right)=0\Rightarrow$

$-\frac{4}{3}a^3\neq 0$ et $\frac{5}{3}-2\ln a=0\Rightarrow a=\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$

3 - L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (')), la droite

(OI) et les droites d'équations $\mathrm{x}=0$ et $\mathrm{x}=\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$ est égale à la somme des aires des parties du plan d'équations : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{\mathrm{e}} \\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} \sqrt{\mathrm{e}} \leq x \leq \mathrm{a}^{\frac{5}{6}} \\ \mathrm{f}(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

$" = \left(\frac{8\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{9} + \frac{8\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{9}\right)\mathrm{cm}^2 = \frac{16\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{9}\ \mathrm{cm}^2$

Partie C

$1 - \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky' \end{cases}$, Or $M \in (/_1) \Leftrightarrow y = f(x)$ et

$M' \in (\,') \Leftrightarrow y' = f_n(x')$ donc $y' = f_n(x') \Leftrightarrow ky = f_n(kx)$

$\Leftrightarrow \mathrm{f_n(kx) = kf(x)}$. On a :

$\mathrm{f}_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}x\right) = \mathrm{e}^{\frac{1-n}{2}} \times \mathrm{e}^{n-1}x^2\left(n - 2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}x\right)\right)$

$\mathrm{f}_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}x\right) = \mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}x^2(n - n + 1 - 2\ln x) = \mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}x^2(1 - 2\ln x)$

$\mathrm{f}_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{x}\right) = \mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{f}(x)$ donc la courbe (/ n) est limage de la courbe

(1) par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$.

2 -a) courbe ($/2$) et ses tangentes. Voir figure

Pour $n = 2$, on a $k = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.(/2)$ et les tangentes s'obtiennent par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{\mathrm{e}}$ appliqué à (/) et ses tangentes .

$(T_2): y = -2\sqrt{\mathrm{e}}x + 2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($/2$), (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = \mathrm{e}$.

Soit C l'aire de la partie du plan vérifiant: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{\mathrm{e}} \\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x) \end{cases}$

Et C' l'aire de la partie vérifiant: $\begin{cases} 0 \leq y \leq \mathrm{f}_2(x) \\ 0 \leq x \leq \mathrm{e} \end{cases}$.

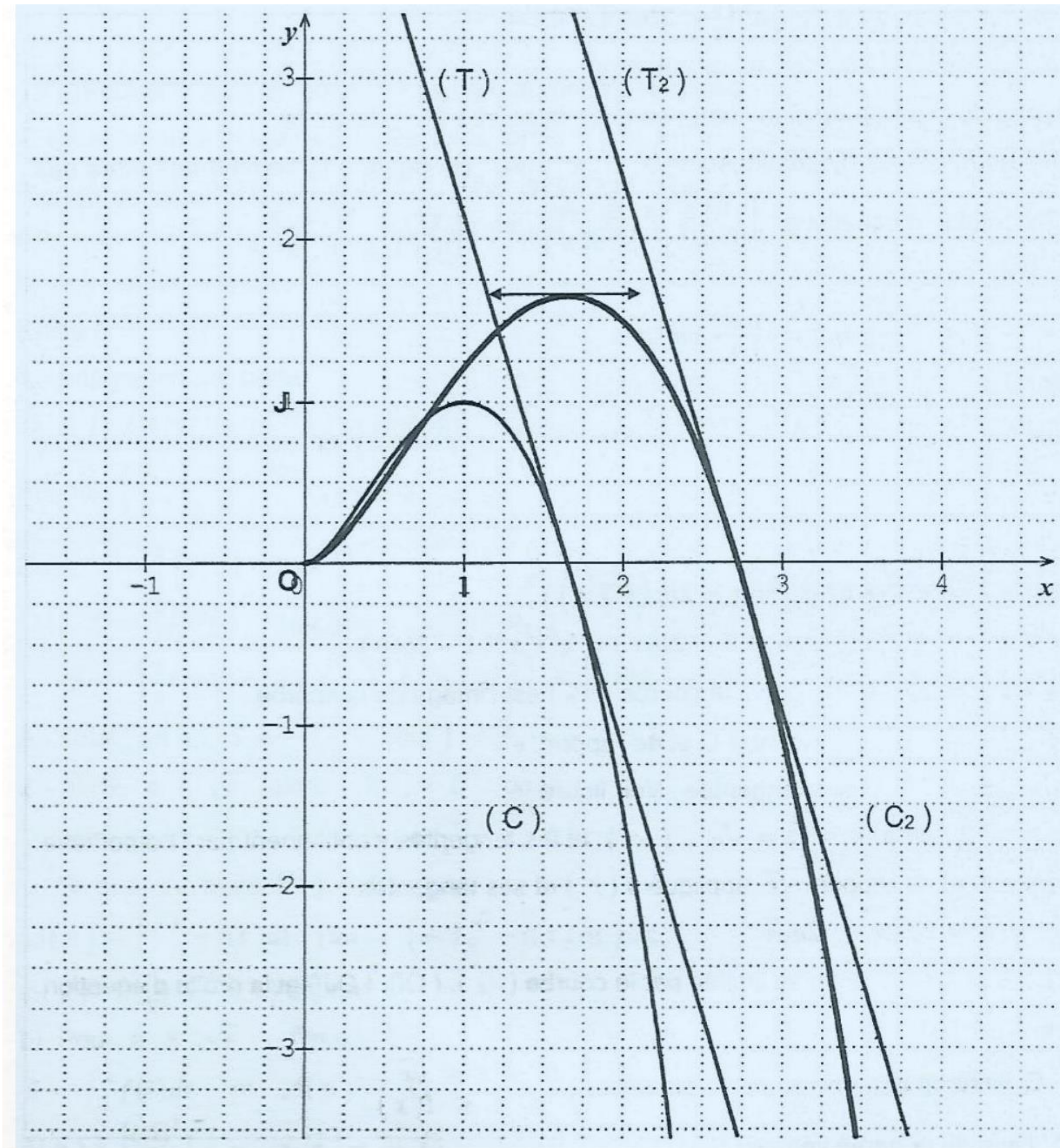
On $a: C' = k^2\mathrm{C}$ avec $k = \sqrt{\mathrm{e}}$ et $\mathrm{C} = \frac{8\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{9}$ donc $\mathrm{C}' = \frac{8\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}}{9}\ \mathrm{cm}^2$

3-L'aire de la partie du plan comprise entre ($/2$), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{4}{3}}$.

Soit 'aire demandée.

On a : $t' = \mathrm{k}^2.\,\mathcal{H}'$, avec $\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{e}}$ et $/\hbar' = \frac{16\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{9}\ \mathrm{cm}^2$

Donc l'aire $\mathcal{H}'$ 'est: $\mathcal{H}' = \frac{16\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}}{9}\ \mathrm{cm}^2$


y
x
(T)
(T2)
(C)
(C2)
O
J
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3

CORRECTION SESSION NORMALE 2013 Série C

EXERCICE 1

1.a. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in N, U_{n+1} = \sqrt{1 + a{U_n}^2} \end{cases}$

i) Démontrons par récurrence que : $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}, 0 \leq \mathrm{U_n} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}}$

Soit la proposition $\mathrm{P_n}$ définie par : $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}, 0 \leq \mathrm{U_n} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}}$

- Vérifions que P_0 est vraie.

On a : $U_0 = 0$ d'où $0 \leq U_0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ donc P_0 est vraie.

- Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $\forall n \in N, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$
- Démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}, 0 \leq \mathrm{U_n} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}} \Rightarrow 0 \leq \mathrm{U_n^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}}\right)^2 \Rightarrow 0 \leq \mathrm{U_n^2} \leq \frac{1}{1-\mathrm{a}} \Rightarrow$$
$$0 \leq \mathrm{aU_n^2} \leq \frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}} \Rightarrow 1 \leq 1 + \mathrm{aU_n^2} \leq 1 + \frac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}} \Rightarrow 1 \leq 1 + \mathrm{aU_n^2} \leq \frac{1}{1-\mathrm{a}} \Rightarrow$$
$$1 \leq \sqrt{1 + \mathrm{aU_n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}} \Rightarrow 1 \leq \mathrm{U_{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}}$$

donc $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N},\ 0 \leq \mathrm{U_{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}}$

Au total, P_{n+1} est vraie, donc P_n est vraie.

En conclusion, $\forall n \in N, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ii) Démontrons que la suite U_n est croissante.

Calculons $U_{n+1} - U_n$

On a : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{1 + aU_n^2} - U_n = \sqrt{U_n^2\left(\frac{1}{U_n^2} + a\right)} - U_n = U_n\left(\sqrt{\frac{1}{U_n^2} + a} - 1\right)$

Encadrons $U_{n+1} - U_n$

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{U}_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{a}}} \Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{U}_n^2 \leq \frac{1}{1-\mathrm{a}} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{U}_n^2} \geq 1 - \mathrm{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{U}_n^2} + \mathrm{a} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\mathrm{U}_n^2} + \mathrm{a}} - 1 \geq 0$. D'où $\mathrm{U}_n\left(\sqrt{\frac{1}{\mathrm{U}_n^2} + \mathrm{a}} - 1\right) \geq 0$

Ce qui donne $\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n \geq 0$. Par conséquent $\mathrm{U}_{n+1} \geq \mathrm{U}_n$.

Au total, la suite (U_n) est croissante
b) Démontrons que la suite (U_n) est convergente.

La suite (U_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$; donc elle est convergente.

Par conséquent: $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

2-a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique .

On a: $V_n = (U_{n+1})^2 - (U_n)^2$ d'où

$$V_{n+1} = (U_{n+2})^2 - (U_{n+1})^2 = (1 + aU_{n+1}^2) - (1 + aU_n^2)$$
$$\Rightarrow V_{n+1} = a[U_{n+1}^2 - U_n^2] \Rightarrow V_{n+1} = aV_n$$

Donc la suite V_n est une suite géométrique de raison a et de premier terme :

$\mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_1^2 - \mathrm{U}_0^2 = 1$

b) Expression de V_n en fonction de n

On a :

$V_n = V_p \times q^{n-p} \Rightarrow V_n = 1 \times a^n$; or $V_n = (U_{n+1})^2 - (U_n)^2$

donc $(U_{n+1})^2 - (U_n)^2 = a^n$

c) Calculons la somme des n premiers termes de la suite V_n

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots \dots \dots \dots + a^{n-1} \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \dots \dots \dots + V_{n-1} \\ &= V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$
$S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$ avec $V_0 = 1$

d) En déduire que: $\forall n \in N, U_n = \sqrt{S_n}$

On a :

$\mathrm{U}_1^2 - \mathrm{U}_0^2 = \mathrm{a}^0$

$U_2^2 - U_1^2 = a^1$

$\mathrm{U}_3^2 - \mathrm{U}_2^2 = \mathrm{a}^2$

$\mathrm{U}_4^2 - \mathrm{U}_3^2 = \mathrm{a}^3$

$\mathrm{U}_\mathrm{n}^2 - \mathrm{U}_{\mathrm{n}-1}^2 = \mathrm{a}^{\mathrm{n}-1}$

En additionnant membre à membre chaque membre de l'égalité, on obtient:

$U_n^2 - U_0^2 = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a^{n-1} \Rightarrow$

$\mathrm{U_n^2 - U_0^2 = S_n}$

$U_n^2 = S_n$ car $U_0 = 0$

donc $U_n = \sqrt{S_n}$

EXERCICE 2

1- a)Coordonnées des autres sommets de l'ellipse.

- A' est le deuxième sommet sur l'axe focal (OI)

I est le milieu de [AA'] d'où

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_I - x_A \Rightarrow x_{A'} = 9 \\ y_I = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_I - y_A \Rightarrow y_{A'} = 0 \end{cases}$$

Donc $A'(9; 0)$

- B et B' sont les sommets de l'ellipse sur l'axe non focal

En posant $IA = a$ et $IF = c$ où F est un foyer, on a :

IA $= \sqrt{(-1-4)^2 + (0-0)^2} = 5$ et $\mathrm{IF} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = 4$

d'où on a I $A = a = 5$ et $IF = c = 4$

la valeur de b est: $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ donc $b = 3$

On obtient $B(4; 3)$ et $B'(4; -3)$

b) Calculons l'excentricité e: $\mathrm{e} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ d'où $\mathrm{e} = \frac{4}{5}$

c) Déterminons une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) :

l'équation est de la forme $x = -\frac{a^2}{c}$ dans le repère $(I, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, c'est-à-dire $x = -\frac{25}{4}$

.L'équation est de la forme

$$x - x_1 = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{c} + x_1 \Rightarrow x = -\frac{25}{4} + 4$$
$$\Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

dans le repère $(0; \overrightarrow{\mathrm{e_1}}; \overrightarrow{\mathrm{e_2}})$

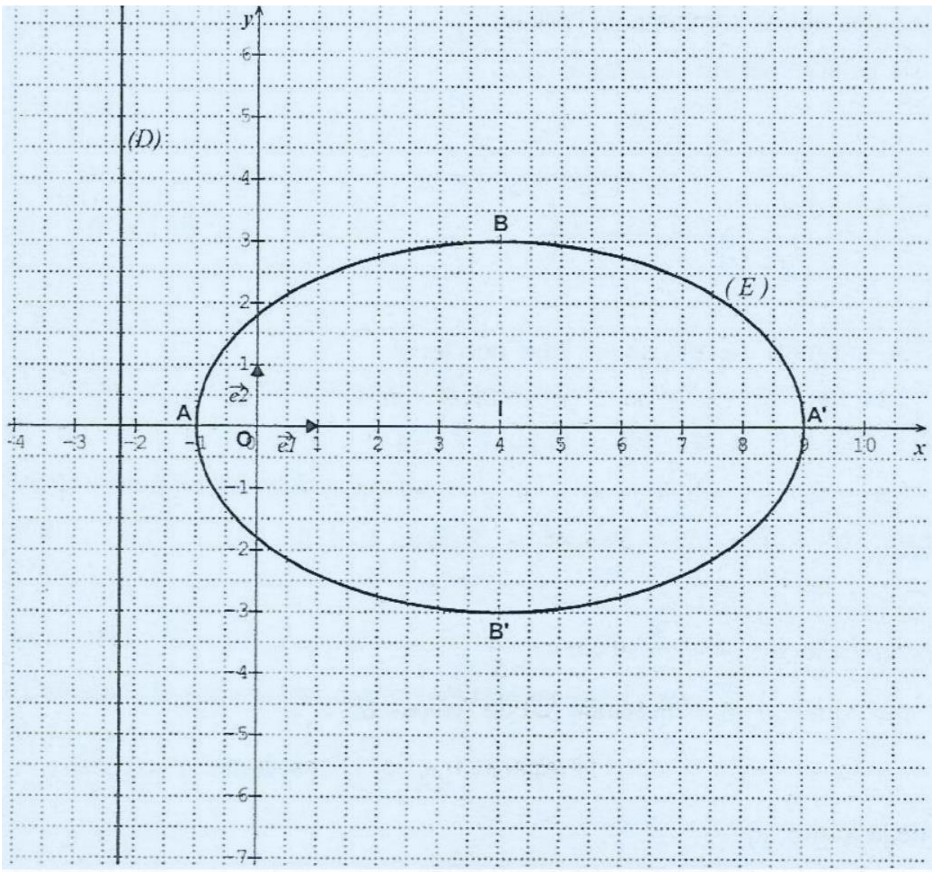
2 -a) Déterminons une équation de (E) dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

(E) : dans le repère $(I, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$

(E) : dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$$

b) construction de (E)



3-a) $(E_a): z^2 - 2(4+5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(4+5\cos\alpha)]^2 - 4(4\cos\alpha+5)^2$

$= 4(16 + 40\cos\alpha + 25\cos^2\alpha) - 4(16\cos^2\alpha + 40\cos\alpha + 25)$

$= 36\cos^2\alpha - 36$

$= -36(1-\cos^2\alpha)$ or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ d'où $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Delta = i^2 6^2 \sin^2\alpha$

b) Résolution de l'équation (E_α)

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(4+5\cos\alpha)+(6i\sin\alpha)}{2} = 4 + 5\cos\alpha + 3i\sin\alpha$$

$$z_2 = \frac{-\mathrm{b}-\sqrt{\Delta}}{2(4+5\cos\alpha)-(6i\sin\alpha)} = 4 + 5\cos\alpha - 3i\sin\alpha$$

c) Montrons que M_1 appartient à (E)

Remplaçons x et y de (E) par l'abscisse et l'ordonnée de M_1 puis de M_2.

Les coordonnées de M_1 sont: $M_1\begin{pmatrix}4+5\cos\alpha\\3i\sin\alpha\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}&=\frac{(4+5\cos\alpha-4)^2}{25}+\frac{(3\sin\alpha)^2}{9}\\&=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\\&=1\end{aligned}$$

donc M_1 appartient à (E)

Montrons que M_2 appartient à (E)

Les coordonnées de M_2 sont : $M_2\begin{pmatrix}4+5\cos\alpha\\-3\sin\alpha\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}&=\frac{(4+5\cos\alpha-4)^2}{25}+\frac{(-3\sin\alpha)^2}{9}\\&=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\\&=1\end{aligned}$$

donc M_2 appartient à (E)

PROBLEME

Partie A

1-1- Calculons la limite de $\mathrm{u(x)}$ en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to0}u(x)=\lim_{x\to0}(1+x^2-2x^2\ln x)=\lim_{x\to0}(1+x^2-2x\cdot x\ln x)=1$$

car $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)=1$ et $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x^2-2x^2\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln x=-\infty$

2 - a) Sens de variation de $u(x)$

- dérivée de $u(x)$

$u(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

$u'(x)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$

- signe de $u'(x)$

$u'(x) = 0 \Rightarrow -4x\ln x = 0 \Rightarrow -4x = 0$ ou $\ln x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$	|	$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$U'(x)$		$+$	0	$-$	

D'où

$\forall x \in]0;1[, u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[, u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

- Tableau de variation de $u(x)$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$U(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b) Démontrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α u est strictement croissante sur $]0;1[$. On a u $(]0;1[) =]1;2[$; or $0 \notin]1;2[$, donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution .

u est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

On a : $u(]1;+\infty[l =]-\infty;2[$; or $0 \in]-\infty;2[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α.

Au total , $\forall x \in]0;+\infty[$, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α

c) Démontrons que $1,89 < \alpha < 1,9$

u est strictement décroissante sur] 1; +∞ [, en particulier sur] 1,89; 1,9[.

On a : $u(1,89) = 1 + 1,89^2 - 2(1,89)^2\ln(1,89) = 0,024$

$u(1,9) = 1 + 1,9^2 - 2(1,9)^2\ln(1,9) = -0,024$

d'où $u(1,89) \cdot u(1,9) < 0$ donc $1,89 < \alpha < 1,9$

d) signe de $u(x)$

$\forall x \in]0; 1[$, u est continue et strictement croissante sur $]0; 1[$

On a $u(]0; 1[) =]1; 2[$, d'où $u(x) > 0$

$\forall x \in]1; \alpha[$, u est continue et strictement décroissante sur $]1; \alpha[$.

On a: $u(]1; \alpha[) =]0; 2[$; d'où $u(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, u est continue et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

On a : u $(]\alpha; +\infty[) =]-\infty; 0[$, d'où $u(x) < 0$

Au total : $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, u(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) < 0 \end{cases}$

II - 1 - Calculons la limite de f en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0}(1 + x^2) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x^2} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

2 - a) Déterminons la dérivée de f

$$\forall x \in]0; +\infty\left[, f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}\right.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2} \text{ avec } u(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x$$

b) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

On a $f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$; or $u(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2\ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

d'où $f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}$ donc $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

c) sens de variation de f

- signe de f':

x	0		α		$+\infty$
u(x)		+		-	
x		+		+	
$(1+x^2)^2$		+		+	
f '(x)		+	0	-	

$\forall x \in]0;\alpha[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ $\forall x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2\alpha^2}$	↘	0

3.a) Coordonnées du point d'intersection de (C) et (OI)

$(\mathrm{OI}): y = 0$ et $(C): f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

donc le point d'intersection de (C) et (OI) est $\mathrm{I}(1;0)$

b) Signe de $f(x)$

$\forall x \in]0;1[$, f est strictement croissante. On a : $f(]0;1[) =]-\infty;0[$, d'où $f(x) < 0$

$\forall x \in]1;\alpha[$, f est strictement croissante. On a $f(]1;\alpha[) =]0;\frac{1}{2\alpha^2}[$

d'où $f(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[$, f est strictement décroissante. On a: $f(]\alpha;+\infty[) =]0;\frac{1}{2\alpha^2}[$; d'où $f(x) > 0$.

Au total : $\begin{cases} \forall x \in]0;1[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

4- Tracé de (C) (voir papier millimétré)

Partie B

1-a) Déterminons le signe de F

Le signe de $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ est celui de $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ dans $[1;+\infty[$.

Or $\forall x \in]0;1], f(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[, f(x) \geq 0$

Donc si $x > 1$ alors $\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt \geq 0$ (Observer les bornes de l'intégrale)

En conclusion: pour tout $x \in]0; +\infty[, F(x) \geq 0$

b) Calculons $F'(x)$

On a $\forall x \in]0; +\infty\Big[, F'(x) = f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
2-a) Démontrons que pour tout x élément de $\Big[0; +\infty\Big[, \varphi'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\varphi'(\mathrm{x}) = \frac{1}{(\varphi^{-1})' \circ \varphi(\mathrm{x})} = \frac{1}{(\varphi^{-1})'[\varphi(\mathrm{x})]}$

Or $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ et $\varphi^{-1}(x) = \tan x$, d'où on a :

$\varphi'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\tan'[\varphi(\mathrm{x})]} = \frac{1}{1+\tan^2[\varphi(\mathrm{x})]} = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$

donc $\varphi'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$

b) Démontrons que h est continue en 0 .

$D_h = [0; +\infty[$. $0 \in D_h$, d'où h est définie en 0 .

$\lim_{x \to 0} \mathrm{h}(\mathrm{x}) = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = \frac{\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(0)}{\mathrm{x} - 0} = \varphi'(0) = \frac{1}{1+\tan^2(0)} = 1;$

d'où $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1$, donc h est continue en 0 .

3-a) Intégration par partie de $F(x)$

$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_1^{\mathrm{x}} \frac{\ln \mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2} \mathrm{dt}$. Posons $\mathrm{U} = \ln \mathrm{t}$ $\quad \mathrm{V}' = \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}$

$\mathrm{U}' = \frac{1}{\mathrm{t}} \quad \mathrm{V} = \varphi(\mathrm{t})$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt &= [\varphi(\mathrm{t}) \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \varphi(t) dt \\
&= [\varphi(\mathrm{t}) \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&= [\varphi(\mathrm{t}) \ln t]_1^x - \int_1^x h(t) dt \\
&= \varphi(\mathrm{x}) \ln x - \varphi(1) \ln 1 - \int_1^x h(t) dt \\
&= \varphi(\mathrm{x}) \ln x - \int_1^x \mathrm{h}(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \text{ car } \ln 1 = 0
\end{aligned}$$

donc $F(x) = \varphi(x) \ln x - \int_1^x h(t) dt$

b) Calculons la limite de $\varphi(\mathrm{x}) \ln \mathrm{n}$ lorsque x tend vers 0

$\forall \mathrm{x} \in]0; +\infty[, \varphi(\mathrm{x}) \ln \mathrm{x} = \mathrm{xh}(\mathrm{x}) \ln \mathrm{x}$

$\mathrm{car}\, \mathrm{h}(\mathrm{x}) = \frac{\varphi(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} \Rightarrow \varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{xh}(\mathrm{x})$

D'où on a :

$\lim_{x\to 0}\varphi(x)\ln x = \lim_{x\to 0} xh(x)\ln x = \lim_{x\to 0} h(x)x\ln x = 0$

car $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

4-a) Démontrons que $\lim_{x\to +\infty} G(x) = \ell$

On a :

$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{G(x)} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{F(x)} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$

En posant $X = \frac{1}{x}$; on a quand $x \to +\infty \quad X \to 0$

On obtient: $\lim_{x\to +\infty} G(x) = \lim_{x\to 0} F(X) = \lim_{X\to 0} G(X)$ car $F(x) = F(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = G(0) = \ell$

b) Le sens de variation de G sur $[0; +\infty[$

- Dérivée de G

$\forall x \in [0; +\infty[, G(x) = F(x)$ d'où $G'(x) = F'(x)$ or $F'(x) = f(x)$

donc $G'(x) = f(x)$

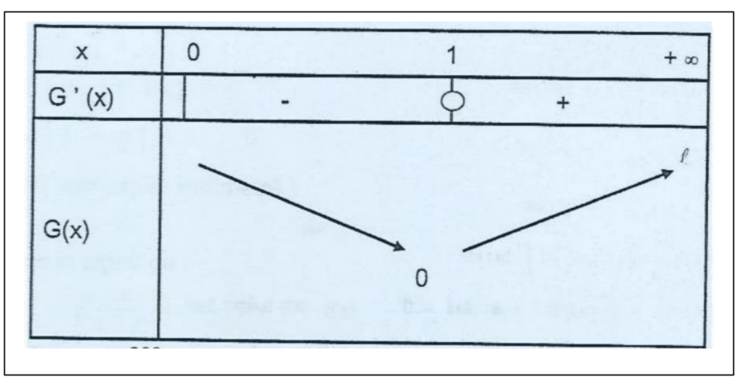
Le signe de $G'(x)$ est celui de $f(x)$.

En conclusion :

$\forall \mathrm{x} \in]0; 1[, \mathrm{G}'(\mathrm{x}) < 0$, donc G est strictement décroissante sur $]\,0; 1\,[$.

$\forall \mathrm{x} \in]1; +\infty[, \mathrm{G}'(\mathrm{x}) > 0$ donc G est strictement croissante sur $]\,1; +\infty[$.

- Tableau de variation de G



5-a) Justifions que $v_2 = \frac{209}{225}$

On a :

$\forall n \in \mathrm{N}, V_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

$V_2 = \frac{(-1)^0}{(2\times0+1)^2} + \frac{(-1)^1}{(2\times1+1)^2} + \frac{(-1)^2}{(2\times2+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{8}{9} + \frac{1}{25}$

$V_2 = \frac{209}{225}$

b) Déterminons le plus petit entier naturel n :

$\frac{1}{(2n+3)^2} < 25 \cdot 10^{-3} \Rightarrow (2n+3)^2 > \frac{1}{25\cdot10^{-3}} \Rightarrow (2n+3)^2 > 40$

$\Rightarrow 2\ln(2n+3) > \ln(40) \Rightarrow \ln(2n+3) > \frac{1}{2}\ln(40)$

$\Rightarrow \ln(2n+3) > \ln\sqrt{40} \Rightarrow 2n+3 > \sqrt{40} \Rightarrow 2n > \sqrt{40} - 3$

$\Rightarrow n > \frac{\sqrt{40}-3}{2} \Rightarrow n > 1{,}66228$

donc le plus petit entier naturel est $n_0 = 2$

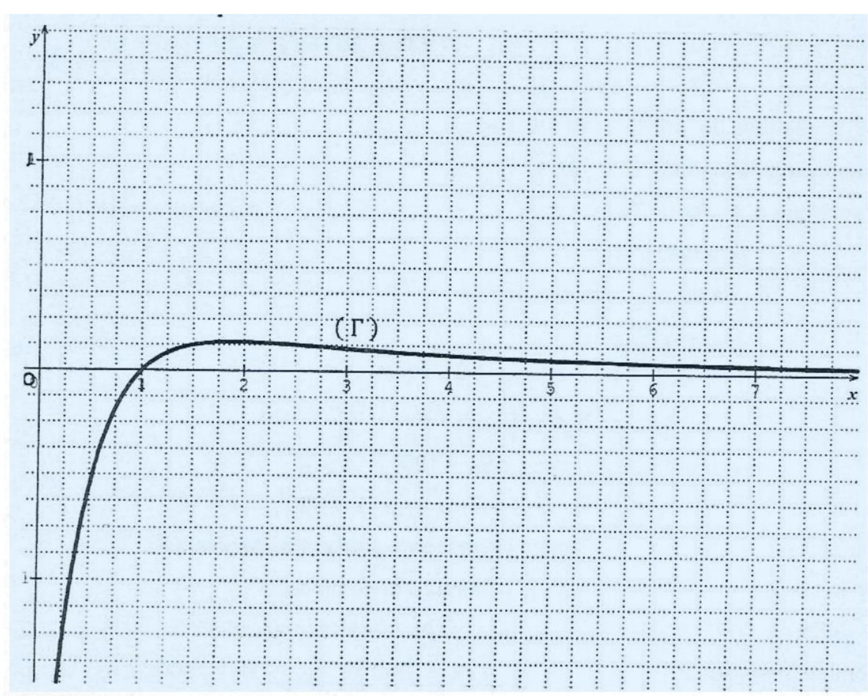
c) Un valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près est :

$|\ell - V_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$. Or $\frac{1}{(2n+3)^2} \leq 25.10^{-3}$ d'où $|\ell - V_n| \leq 25.10^{-3}$

On a obtenu $n_0 = 2$, donc $|\ell - V_2| \leq 25.10^{-3}$

Au total une valeur approchée de ℓ à 25.10^{-3} près est $\ell = V_2$

d) Allure de (Γ) : voir le repère (O, I, J)



CORRECTION SESSION NORMALE 2012 Série C

EXERCICE 1

1. a) Démontrons que $2x \equiv 1[7]$

$9x + 7y = 1 \Leftrightarrow 2x + 7x + 7y = 1$
$\Leftrightarrow 2x + 7(x + y) = 1$
$\Leftrightarrow 2x - 1 = -7(x + y)$
$\Leftrightarrow 2x \equiv 1[7]$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $2x \equiv 1[7]$

Soit le tableau de congruence modulo 7 suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5

D'où $2x \equiv 1[7] \Leftrightarrow x \equiv 4[7]$ donc $x = 7k + 4, k \in \mathbb{Z}$

$S = \{7k + 4, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Déterminons l'ensemble des solutions de (E).

En remplaçant x par $7k + 4$, on obtient :

$9x + 7y = 1 \Leftrightarrow 9(7k + 4) + 7y = 1 \Leftrightarrow 63k + 36 + 7y = 1$
$\Leftrightarrow 7y = -63k - 35 \Leftrightarrow y = -9k - 5$

Donc l'ensemble de solutions de (E) est: $S = \{(7k + 4; -9k - 5), k \in \mathbb{Z}\}$

2. Résolvons l'équation (E') : $9x + 7y = 200$

On remarque que : $9x + 7y = 1 \times 200$ d'où la solution particulière de l'équation

(E) : $(4; -5)$ sera multipliée par 200 .

Donc la solution particulière de (E') est $(x_0; y_0) = (800; -1000)$.

On a : $9x + 7y = 200$

$\frac{-(9x_0+7y_0=200)}{9(x-x_0)+7(y-y_0)} = 0 \Leftrightarrow -9(x - x_0) = 7(y - y_0)$

$\Leftrightarrow x = 7k + 800$; de même $y = -9k - 1000$

Donc l'ensemble des solutions de (E') est : $S = \{(7k + 800; -9k - 1000); k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

Soit x le nombre d'hommes et soit y le nombre de femmes.

On $a{:}\, 900x + 700y = 20000$; d'où on obtient, après simplification $9x + 7y = 200$. L'ensemble des solutions de (E') est $x = 7k + 800$ et $y = -9k - 1000$; avec $k \in \mathbb{Z}$

On $a{:}\, x > 0, y > 0$ et $x > y$, d'où $7k + 800 > 0; -9k - 1000 > 0$

$7k + 800 > -9k - 1000$

On a : $k > -114{,}286; k < -111{,}111$ et $k > -112{,}5$, après intersection, on obtient donc $\mathrm{k} = -112$

En conclusion, il y a dans cette association, $\mathrm{x} = 7(-112) + 800 = 16$ hommes et $y = -9(-112) - 1000 = 8$ femmes

EXERCICE 2

1- Justifions que (Γ) est une ellipse

$(\Gamma){:}\, 3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + x) + 4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x+1)^2 + 4(y-0)^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-0)^2}{3} = 1$ donc (Γ) est une ellipse de centre $\Omega(-1; 0)$

2-a) Les coordonnées de F et F' dans le repère $(K, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}){:}\, F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Les coordonnées de F et F' dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$: $F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

b) Les coordonnées de A, A', B et B' dans le repère $(K, \vec{e_1}, \vec{e_2})$:
$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}; A'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}; B\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Les coordonnées de A, A', B et B' dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:
$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; A'\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}; B\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

c) Construction de (Γ) : voir courbe

3-a) Construction de N et P. Voir figure

b) Déterminons le rapport r et l'angle θ de la similitude S

$S(M) = P \iff r = \frac{KP}{KM}$ et $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\mathrm{KM}', \overrightarrow{KP}}\right) = \theta$

KMN est un triangle rectangle isocèle en N.

D'après la propriété de Pythagore, on $\mathrm{a}{:}\, \mathrm{KM}^2 = \mathrm{KN}^2 + \mathrm{NM}^2 \Rightarrow \mathrm{KM} = \mathrm{a}\sqrt{2}$

P étant le symétrique de K par rapport à N d'où $KN = NP$ donc $KP = 2a$

Au total , le rapport de $S, r = \frac{KP}{KM} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

Le triangle KMN est un triangle rectangle isocèle en N, d'où

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{KM}}, \overrightarrow{\mathrm{KN}}}) = \mathrm{Mes}(\widehat{\mathrm{MN}, \mathrm{MK}}) = -\frac{\pi}{4}$ donc l'angle de la similitude S est :

$\Theta = \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{KM}}, \overrightarrow{\mathrm{KP}}}) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

c) Etant donné que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature, alors l'ensemble (C), image de (Γ), est une ellipse .

Construction de (C) : voir figure

4-a) L'écriture complexe de la similitude directe S est de la forme $z' = az + b$ ou bien $z' = r^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

On sait que : le centre de S est $\mathrm{K}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, le rapport est $\mathrm{r} = \sqrt{2}$ et l'angle est $\theta = -\frac{\pi}{4}$ D'où on a :

$$z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+1) - 1 \Rightarrow z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)(z+1) - 1$$
$$z' = (1-i)(z+1) - 1 \Rightarrow z' = (1-i)z - i$$

Donc l'écriture complexe de S est $z' = (1-i)z - i$

b) Déterminons les coordonnées de G et G' dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

On a: $S(F) = G \Rightarrow z_\mathrm{G} = (1-\mathrm{i})z_\mathrm{F} - \mathrm{i} \Rightarrow z_\mathrm{G} = -\mathrm{i}$ donc $\mathrm{G}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

On a: $S(F') = G' \Rightarrow z_{G'} = (1-i)z_F - i \Rightarrow z_{G'} = -2 + i$ donc $G'\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

c) Equation cartésienne de (C) dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

- Déterminons l'expression analytique de S

$$z' = (1-i)z - i \Rightarrow x' + iy' = (1-i)(x+iy) - i$$
$$\Rightarrow x' + iy' = (x+y) + (-x+y-1)i$$

Donc on $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

- Tirons x et y par addition et soustraction de x ' et y '

On obtient: $x = \frac{x'-y'-1}{2}$ et $y = \frac{x'+y'+1}{2}$

En remplaçant x et y de l'équation de (Γ), on obtient l'équation de $(C\ )$

On a: $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow$

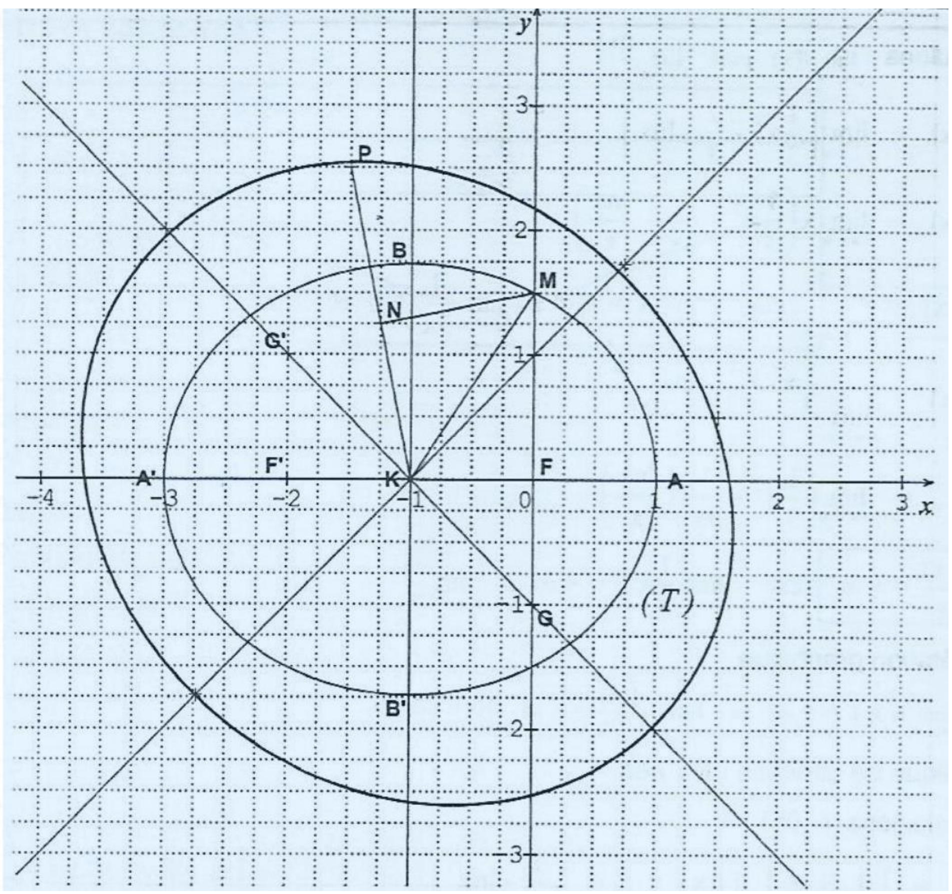
$$3\left(\frac{x'-y'-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x'+y'+1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{x'-y'-1}{2}\right) - 9 = 0 \Rightarrow$$

$\frac{3}{4}(x' - y' - 1)^2 + (x' + y' + 1)^2 + 3(x' - y' - 1) - 9 = 0 \Rightarrow$

$7x'^2 + 7y'^2 + 2x'y' + 14x' + 2y' - 41 = 0$

Donc une équation cartésienne de (C) dans le repère $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :

$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$



PROBLEME
PARTIE A

1-a) Montrons que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe (C))

On a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$ et $D_f =]0; +\infty[$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x\right)$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\ln x = +\infty$

d'où, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ ou (OJ) est une asymptote verticale à (/) .

b) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Interprétation graphique

On a $\lim_{x\to+x} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (γ) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

2-a) Calculons f' (x)

$\forall x \in]0;+\infty\left[, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x\right.$

$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{x^3-1}{x}$

$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$

b) Sens de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	-	0	+	
x^2+x+1		+		+	
x		+		+	
f'(x)	||	-	0	+	

$\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

$\forall x \in]0;1[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0;1[$

c) Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3- Construction de ($\mathcal{C}$) : voir à la fin

PARTIE B

1 - Intégration par parties .

Posons $\begin{matrix} U & = \ln t & & V' = 1 \\ U' & = \frac{1}{t} & V & = t \end{matrix}$

D'où

$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t dt = [t\ln t]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1 dt$

$= [t\ln t]_{\frac{1}{n}}^{1} - [t]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t dt = [t\ln t - t]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$= (1\ln 1 - 1) - \left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$

$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t dt = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - 1$

2 - a) Interprétation graphique de $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

A_n est l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe (1), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{1}{n}$.

b) Vérifions que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$

$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} - \ln t\right) dt$

$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\right) dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t dt$

$= \left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{n} - 1\right)$

$A_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^4} + \frac{1}{3n} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{n} + 1$

$A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln n}{n}$

c) Calculons $\lim_{x\to+\infty} A_n$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{3}{4}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3n} = 0; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{12n^4} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3 -a) Pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a $t \in [0;1]$ et fest décroissante sur] 0;1], donc:

$\frac{k}{n} \leq \mathrm{t} \leq \frac{\mathrm{k+1}}{\mathrm{n}}$ d'où $\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{k+1}}{\mathrm{n}}\right) \leq \mathrm{f(t)} \leq \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right) \Rightarrow$

$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \;\Rightarrow$

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \Rightarrow$

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) [t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) [t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \Rightarrow$

donc on obtient: $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) On a :

$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t) dt$

$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt + \cdots \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t) dt$

d'où $\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

En additionnant membre à membre l'inégalité; on obtient:

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots \cdot + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

4-a) Démontrons que: : $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

On a :

$S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$
$\quad = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$

d'où $S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + A_n$

Pour $t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]$ d'où $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, or f est strictement décroissante d'où

$\mathrm{f(t)} \leq \mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{1} \mathrm{f(t)dt} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \mathrm{dt}$ d'où $\mathrm{A_n} \leq \frac{1}{\mathrm{n}} \mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$

Les relations (1) et (2) donnent: $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

b) D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \frac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

PARTIE C

1 - Démonstration par récurrence.

Soit P_n la proposition suivante : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- Vérifions que P_1 est vraie

On a: $1^3 = 1$ et $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$, d'où $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$

Donc P_1 est vraie .

Supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- Démontrons que P_{n+1} est vraie .

On a :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] \\
&= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

En conclusion, pour tout entier naturel non nul, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2-a) On a : $\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}{n \times n \times n \times \ldots\ldots n}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

b) $\forall n \geq 2$, on a: $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[\mathrm{f}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{f}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots .. + \mathrm{f}\left(\frac{n}{n}\right)\right]$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n}\right)^3 - \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3n^3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{3}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{3n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}n\right) - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right]$$

Donc $S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

c) On sait que $S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right]$; on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{3}\right] - \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$, car $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{12n^4}[n(n+1)^2]\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{12n^4} = \frac{1}{12}$

3 -a) Justification

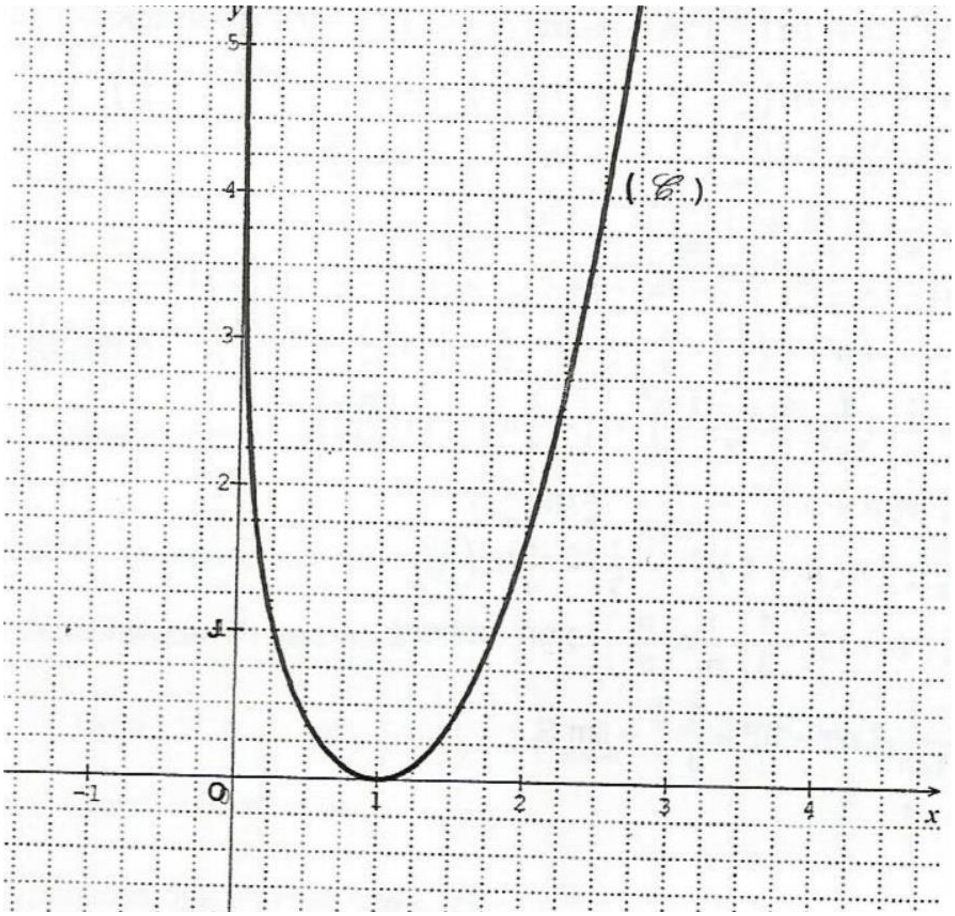
$$\ln(U_n) = \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right) = \ln(\sqrt[n]{n!}) - \ln(n) = \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n)$$

$\ln(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{n}[\ln(n!) - n\ln(n)]$; donc $\ln(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

b) Calculons la limite de U_n

On sait que : $\lim_{n\to+\infty}\ln(U_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$, d'où on obtient:

$\lim_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$. Au total $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{e}$



y
5
4
3
2
1
O
-1
1
2
3
4
x
(𝒞)

CORRECTION SESSION NORMALE 2011 Série C

EXERCICE 1

1- Calculons les coordonnées $(x';y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ de M.

On a : $z' = z^2 - 4z \Leftrightarrow x' + iy' = (x+iy)^2 - 4(x+iy)$

$\Leftrightarrow x' + iy' = x^2 + 2xyi - y^2 - 4x - 4iy$
$\Leftrightarrow x' + iy' = (x^2 - y^2 - 4x) + (2xy - 4y)i$

Donc $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 4x \\ y' = 2xy - 4y \end{cases}$

2- a) Démontrons que l'ensemble (H) des points M du plan est une hyperbole.

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - y^2 = 4$
$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

Donc l'ensemble (H) est une hyperbole d'équation : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) Dans le repère $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$,

- les coordonnées du centre $\Omega(2;0)$ avec $a = 2$;
- les sommets de l'hyperbole sont: $A(0;0)$ et $A'(4;0)$;
- les asymptotes de (H) ont pour équations (D) : $y = x - 2$ et (D'): $y = -x + 2$

c) Construction de (H). (voir courbe)

3- Déterminons les points M du plan tels que OMM'P soit un parallélogramme.

OMM'P est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PM} \Leftrightarrow z - z_0 = z' - z_p$

$\Leftrightarrow z - 0 = z^2 - 4z + \frac{5}{2} + 2i \Leftrightarrow z = z^2 - 4z + \frac{5}{2} + 2i$
$\Leftrightarrow z^2 - 5z + \frac{5}{2} + 2i = 0$

Equation du second degré d'où on a : $\Delta = 5^2 - 4\left(\frac{5}{2} + 2i\right) \Leftrightarrow \Delta = 15 - 8\mathrm{i}$

Les racines carrées de Δ sont : $\begin{cases} x^2 + y^2 = |15 - 8i| \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 1 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$

Donc les racines carrées de Δ sont : 4 - i et - 4 + i.

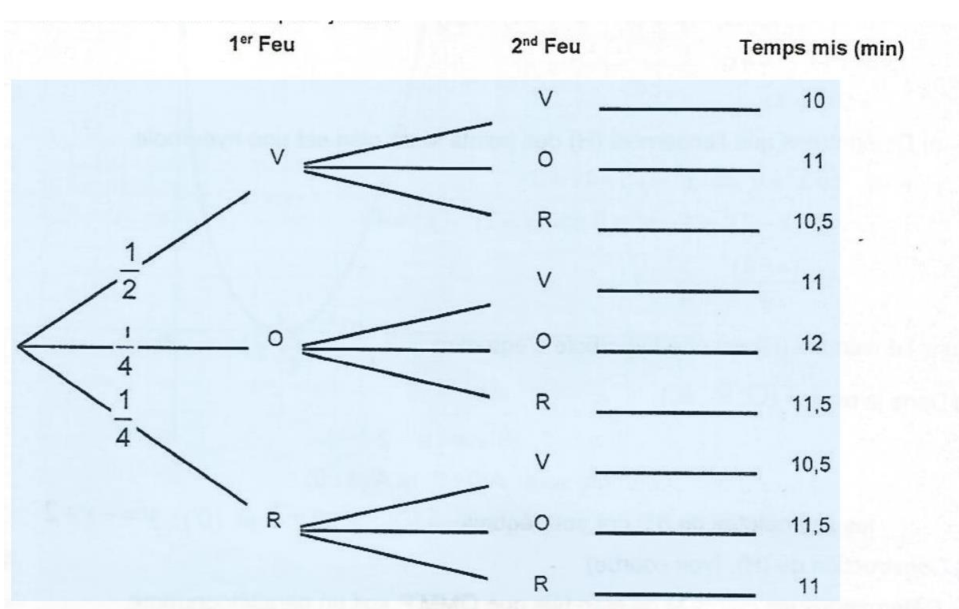
Les solutions de l'équation sont:

$z_1 = \frac{5-(4-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{5+(4-i)}{2} = \frac{9-i}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$

Donc les points M ont pour affixes : $M\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et $M\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

EXERCICE 2

1- a) Justifions que l'ensemble des valeurs prises par X est : $\{10; 10{,}5; 11; 11{,}5; 12\}$. Utilisons un arbre de choix pour justifier



Donc l'ensemble des variables aléatoires est : $X(\Omega) = \{10; 10{,}5; 11; 11{,}5; 12\}$.

b) Justifions que $P(X = 11) = \frac{5}{16}$.

La probabilité d'avoir $X = 11$ est: $P(X = 11) = P_V P_0 + P_O P_V + P_R P_R$

Avec: P_v = probabilité d'être vert;

P_0 = probabilité d'être orange ;

P_R = probabilité d'être rouge ;

$$P(X = 11) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(X = 11) = \frac{5}{16}$$

C) Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(X = 10) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $P(X = 10{,}5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$P(X = 11) = \frac{5}{16}$ $P(X = 11{,}5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ $P(X = 12) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Donc la loi de probabilité de X est :

X	10	10,5	11	11,5	12	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

2- Calculons l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 10 \times \frac{1}{4} + 10{,}5 \times \frac{1}{4} + 11 \times \frac{5}{16} + 11{,}5 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{16}$$

$$E(X) = \frac{43}{4} = 10{,}75$$

Interprétation :

Le temps moyen (ou la durée moyenne) mis par le livreur est de $10{,}75\text{mn}$ ou $10\text{mn}45\text{ s}$. Il est donc en retard.

3- Le livreur part à $19\text{ h}49$ min de la boulangerie.

a) Calculons la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

Le livreur part à $19\text{ h}49\text{ min}$ de la boulangerie et arrive à 20 heures précises chez le client ; donc le temps mis est de 11 min; d'où la probabilité cherchée est $P(X = 11)$ donc $P(X = 11) = \frac{5}{16}$

b) Calculons la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

Pour qu'il arrive en retard chez le client, le temps mis est $11{,}5\text{ min}$ ou 12 min, donc la probabilité est $P(X > 11)$

$P(X > 11) = P(X = 11{,}5) + P(X = 12) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ $P(X > 11) = \frac{3}{16}$

4-. Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.

a) Probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises.

Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli :

- La probabilité qu'il livre le pain à 20 h est $p = \frac{5}{16}$;
- La probabilité qu'il ne livre pas le pain à 20 h est $\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} = \frac{11}{16}$;

Le livreur répète cette expérience 7 fois :'c'est une loi binomiale.

La probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois est :

$P(X=3)=C_7^3(p)^3(q)^4=C_7^3\left(\frac{5}{16}\right)^3\left(\frac{11}{16}\right)^4$ $P(X=3)=35\times\left(\frac{125}{4096}\right)\times\left(\frac{14641}{65536}\right)$

$\mathrm{P(X=3)}\approx 0{,}239$

b) Probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises.

La probabilité de ne pas livré le pain à $20\ \mathrm{h}$ est :

$P(X=0)=C_7^0(p)^0(q)^7=C_7^0\left(\frac{5}{16}\right)^0\left(\frac{11}{16}\right)^7$ $P(X=0)=\left(\frac{11}{16}\right)^7$

Donc la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine est :

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{11}{16}\right)^7$

$\mathrm{P(X\geq 1)}\approx 0{,}927$

PROBLEME
Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
1 - Etudions le sens de variations de h.

$\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=x+e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=1+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2- Calculons les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x+\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=-\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$

- $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x+\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{2}}=+\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{2}}=+\infty$

3- a) Démontrons que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; on $\mathrm{a}: 0\in\mathrm{h}(\mathbb{R})$

Donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution $\alpha\in\mathbb{R}$. On a aussi :

$$h(-0{,}71)=-0{,}71+e^{\frac{-0.71}{2}}=-0{,}0088$$
$$h(-0{,}70)+e^{\frac{-0.70}{2}}=0{,}046$$

D'où $h(-0{,}70)\times h(-0{,}71)<0$ donc $-0{,}71<\alpha<-0{,}70$.

b) Déduisons que $\forall x \in]-\infty;\alpha[h(x) < 0$

$\forall x \in]-\infty;\alpha[$ h est strictement croissante d'où on a : $x < \alpha \Rightarrow h(x) < h(\alpha)$

Or $h(\alpha) = 0$ d'où $h(x) < 0$ donc $\forall x \in]-\infty;\propto, h(x) < 0$

Déduisons que $\forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0.$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[h$ est strictement croissante d'où on $a: x > \alpha \Rightarrow h(x) > h(\alpha)$

Or $h(\alpha) = 0$ d'où $h(x) > 0$ donc $\forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0.$

En conclusion : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, h(x) < 0$

$$\forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0$$

Partie B: Etude de la fonction f_1.

Pour tout nombre réel $x: f_1(x) = (2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x.$

1- a) Démontrons que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}.$

$f_1(x) = (2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x \Rightarrow f_1(\alpha) = (2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha$

Or $h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + e^{\frac{\alpha}{2}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = -\alpha$

D'où $f_1(\alpha) = (2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha$

$$f_1(\alpha) = \frac{2\alpha+4}{e^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha}$$

$f_1(\alpha) = \frac{2\alpha+4}{-\alpha} - \alpha$

$$f_1(\alpha) = -2 - \frac{4}{\alpha} - \alpha$$

Donc $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$

b) Déduisons un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1 .

On a : $-0{,}71 < \alpha < -0{,}70$ et $-0{,}71 < \alpha < -0{,}70$

$-\frac{1}{0{,}70} < \frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{0{,}71}$ et $0{,}70 < -\alpha < 0{,}71$

$\frac{1}{0{,}71} < -\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0{,}70}$ et $-2 + 0{,}70 < -2 - \alpha < -2 - 0{,}71$

$\frac{4}{0{,}71} < -\frac{4}{\alpha} < \frac{4}{0{,}70}$ (1) et $-1{,}30 < -2 - \alpha < -1{,}29$

Les relations (1) et (2) donnent :

$-1{,}30+\dfrac{4}{0{,}71}<-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}<-1{,}29+\dfrac{4}{0{,}70}$ $4{,}33<-2-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}<4{,}42$

Donc on a : $4{,}3<f_1(\alpha)<4{,}4$

2 -a) Pour tout réel x, calculons $f_1'(x)$ et démontrons que $f_1'(x)=-h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f_1(x)=(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=2e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}(2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x)=2e^{-\frac{x}{2}}-(x+2)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=(2-x-2)e^{-\frac{x}{2}}-1$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1'(x)=-xe^{-\frac{x}{2}}-1$

On a : $f_1'(x)=-xe^{-\frac{x}{2}}-1$

$f_1'(x)=-\dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}}-1$ $\quad f_1'(x)=\dfrac{-x-e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}$ $\quad f_1'(x)=\dfrac{-\left(x-e^{\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}}$

$f_1'(x)=\dfrac{-h(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f_1'(x)=-h(x)e^{-\frac{x}{2}}$

b) Déduisons les variations de f_1.

$\forall x\in\mathbb{R}, e^{-\frac{x}{2}}>0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $-h(x)$

D'où: $\forall x\in]-\infty;\alpha[, f_1'(x)>0$ donc f_1 est strictement croissante sur] - ; α[$\forall x\in]\alpha;+\infty[, f_1'(x)<0.$ donc f_1 est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

3 -a) Calculons la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$,

$\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}}-x\right)$

$\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{2x+4}{x}e^{-\frac{x}{2}}-1\right)\Leftrightarrow\ \lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[\left(2+\dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]$

$\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=-\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\left[\left(2+\frac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]=+\infty$

Calculons la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(2+\frac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}-1\right]=+\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{4}{x}\right)e^{-\frac{x}{2}}=+\infty$

Interprétons graphiquement ces résultats.

On a: $\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=+\infty$

Donc la courbe $(\mathcal{C}_1)$ admet une branche parabolique de direction (OJ)

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x\right)$ $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2xe^{-\frac{x}{2}} + 4e^{-\frac{x}{2}} - x\right)$

Posons $X = -x$. Quand $x \to +\infty, X \to -\infty$

on a: $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{X\to-\infty} \left(-2Xe^{\frac{x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} + X\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$ car $\lim_{X\to-\infty} \left(-2Xe^{\frac{x}{2}}\right) = 0; \lim_{X\to-\infty} 4e^{\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim_{X\to-\infty} X = -\infty$

c) Démontrons que (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_1)$ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} \left((2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x + x\right)$

$\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) - y] = \lim_{x\to+\infty} \left[2xe^{-\frac{x}{2}} + 4e^{-\frac{x}{2}}\right]$ d'où $\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) - y] = 0$

car $\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{X\to-\infty} -2Xe^{\frac{x}{2}} = 0; \lim_{x\to+\infty} 4e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{X\to-\infty} 4e^{\frac{x}{2}} = 0$

On a : $\lim_{x\to+\infty} [f_1(x) - y] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $(\zeta, 1)$ en $+\infty$

4- a) Dressons le tableau de variation de f_1.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_1(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

b) Construisons la droite (D) et $(\mathcal{C}_1)$ dans le plan muni du repère (O, I, J). voir courbe

5-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculons pour tout nombre réel x : $\mathrm{I}(x)$

$\mathrm{I}(x) = \int_0^x (2t+4)e^{\frac{-t}{2}} dt$

Posons $U = 2t + 4$ et $V' = e^{\frac{-t}{2}}$

$U' = 2$ et $\mathrm{V} = -2e^{\frac{-1}{2}}$

$\mathrm{I}(x) = \left[-2(2t+4)e^{\frac{-1}{2}}\right]_0^x - \int_0^x 2\left(-2e^{\frac{-t}{2}}\right) dt$ $\mathrm{I}(x) = \left[(-4t-8)e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x + \int_0^x 4e^{\frac{-t}{2}} dt$

$I(x) = \left[(-4t-8)e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x + \left[-8e^{\frac{-t}{2}}\right]_0^x$ $\mathrm{I}(x) = (-4x-8)e^{\frac{-2}{2}}$

$\mathrm{I}(x) = (-4x-16)e^{\frac{-x}{2}} + 16 \Rightarrow \mathrm{I}(x) = 16 - (4x+16)e^{\frac{-x}{2}}$

b) Déduisons en cm^2 l'aire $\mathcal{A}_1$.

$A_1 = \int_0^2 \ (f_1(x) - y)dx = \int_0^2 \ (2x+4)e^{\frac{-x}{2}}dx$

$A_1 = \mathrm{I}(2)u \cdot a\mathcal{A}_1 = 4 \times \mathrm{I}(2)\mathrm{cm}^2$

$\mathcal{A}_1 =[64 - 96e^{-1}]\mathrm{cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_1 = \left[64 - \frac{96}{e}\right]\mathrm{cm}^2$

Partie C : Etude de la fonction f_k.

1- a) Démontrons que pour tout nombre réel x: $f_k'(x) = -h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$ s $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = (2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}} - x$

$f_k'(x) = 2e^{\frac{-x}{2k}} - \frac{1}{2k}(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}} - 1$ $f_k'(x) = 2e^{\frac{-x}{2k}} - \left(\frac{x}{k}+2\right)e^{\frac{-x}{2k}} - 1$

$f_k'(x) = \left(2 - \frac{x}{k} - 2\right)e^{\frac{-x}{2k}} - 1$ $f_k'(x) = -\frac{x}{k}e^{\frac{-x}{2k}} - 1$

$f_k'(x) = \frac{-\frac{x}{k} - e^{\frac{x}{2k}}}{e^{\frac{x}{2k}}} \Rightarrow f_k'(x) = \frac{-\left(\frac{x}{k} + e^{\frac{x}{2k}}\right)}{e^{\frac{x}{2k}}}$

Or $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$ d'où $h\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{x}{k} + e^{\frac{x}{2k}}$

Donc $f_k'(x) = \frac{-h\left(\frac{x}{k}\right)}{e^{\frac{x}{2k}}} = -h\left(\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{2k}} \Leftrightarrow f_k'(x) = -h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$

b) En utilisant la partie A, étudions les variations de f_k suivant le signe de k.

On a : $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R},\ e^{-\frac{2x}{2k'}} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $-h\left(\frac{x}{k}\right)$

Pour $k > 0$, à partir de la partie A du problème, on a :

- sur $]-\infty; k\alpha\left[, -h\left(\frac{x}{k}\right) > 0\right.$ d'où $f_k'(x) > 0$ donc f_k est strictement croissante;
- sur $]k\alpha; +\infty\left[, -h\left(\frac{x}{k}\right) < 0\right.$ d'où $f_k'(x) < 0$ donc f_k est strictement décroissante ;

Pour $k < 0$,

- sur $]-\infty; k\alpha\left[, -h\left(\frac{x}{k}\right) < 0\right.$ d'où $f_k'(x) < 0$ donc f_k est strictement décroissante sur $]-\infty; k\alpha[$;
- sur $]k\alpha; +\infty\left[, -h\left(\frac{x}{k}\right) > 0\right.$ d'où $f_k'(x) > 0$ donc f_k est strictement croissante sur $]k\alpha; +\infty[$.

c) Vérifions que $f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)$.

On a: $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ d'où $kf_1(\alpha) = k\left(-2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}\right)$ (1)

On a: $f_k(k\alpha) = (2k\alpha + 4k)e^{\frac{-\alpha}{2}} - k\alpha$ or $h(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = -\alpha$ d'où $f_k(k\alpha) = \frac{2k\alpha + 4k}{e^{\frac{\alpha}{2}}} - k\alpha$

$$f_k(k\alpha) = \frac{2k\alpha + 4k}{-\alpha} - k\alpha$$

$$f_k(k\alpha) = -2k - \frac{4k}{\alpha} - k\alpha$$

$$f_k(k\alpha) = k\left(-2 - \frac{4}{\alpha} - \alpha\right)$$

$$f_k(k\alpha) = k\left(-2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}\right)$$

Les relations (1) et (2) donnent $f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)$

d) Dressons le tableau de variation de f_k suivant le signe de k.

Pour $k > 0$, on a :

x	$-\infty$		$k\alpha$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	$f_k(k\alpha)$	$\searrow$	

Pour $k < 0$, on a :

x	$-\infty$		$k\alpha$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		$\searrow$	$f_k(k\alpha)$	$\nearrow$	

2- a) Démontrons que $(\mathcal{C}_k) = \mathcal{H}(\mathcal{C}_1)$.

1 ère méthode

Exprimons f_k en fonction de f_1

On a : $f_1(x) = (2x+4)e^{\frac{-x}{2}} - x$ D'où $f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{2x}{k} + 4\right)e^{\frac{-x}{2k}} - \frac{x}{k}$

$$f_1\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{2x+4k}{k}\right)e^{\frac{-x}{2k}} - \frac{x}{k}$$

$f_1\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{1}{k}\left[(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}-x\right]$ Or $f_k(x)=(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}-x$

Donc $f_1\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{1}{k}f_k(x)\Rightarrow f_k(x)=kf_1\left(\frac{x}{k}\right)$

En conclusion, $(\mathcal{C}_k)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.

$2^{\text{ème}}$ **méthode**

$$f_k(kx)=(2kx+4k)e^{\frac{-x}{2}}-kx$$
$$f_k(kx)=k\left((2x+4)e^{\frac{-x}{2}}-x\right)\Rightarrow f_k(kx)=kf_1(x)$$

Donc $(\mathcal{Y}_k)$ est l'image de $(\mathcal{Y}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k.

b) Déduisons la construction de $\left(\mathcal{C}_2\frac{1}{2}\right.$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.

$\left(\mathcal{C}_2,\frac{1}{2}\right)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre 0 et de rapport $-\frac{1}{2}$. Voir courbe 3 -Déterminons en $\mathrm{cm}^2\mathcal{A}_{\mathrm{k}}$ en fonction de k.

$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=\int_0^{2k}(f_k(x)-y)dx=\int_0^{2k}(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}dx$

Posons: $U=2x+4k$ et $V'=e^{\frac{-x}{2k}}$

$U'=2$ et $V=-2ke^{\frac{-x}{2k}}$

D'où . A k $=\left[-2k(2x+4k)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}+\int_0^{2k}4ke^{\frac{-x}{2k}}dx$

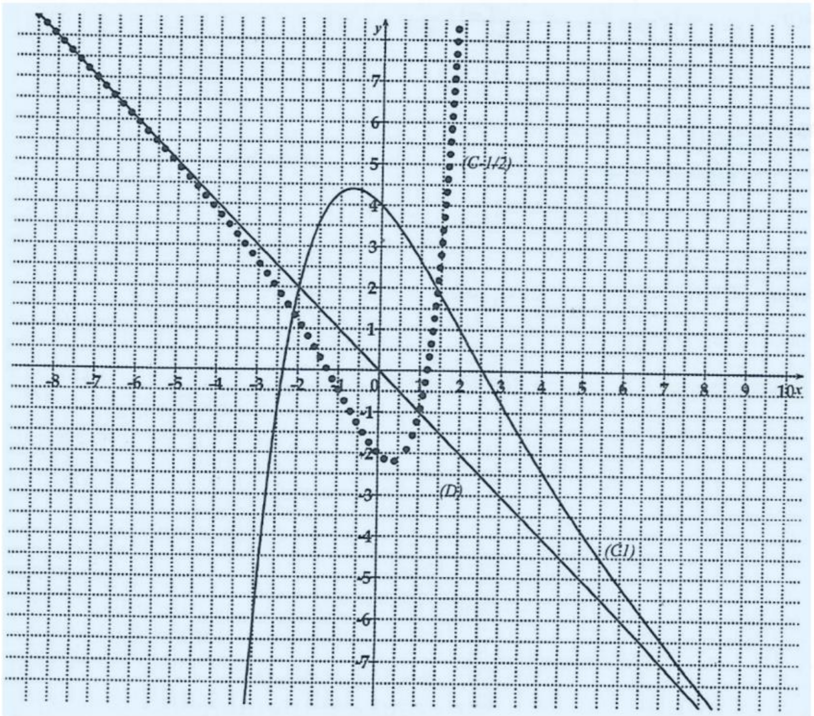
$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=\left[(-4kx-8k^2)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}+\left[-8k^2e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}$

$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=\left[(-4kx-8k^2)e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}+\left[-8k^2e^{\frac{-x}{2k}}\right]_0^{2k}$

$\mathcal{A}_k=(-8k^2-8k^2)e^{-1}-(-8k^2)+(-8k^2e_0^{-1}+8k^2)$

$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=(-24k^2e^{-1}+16k^2)u\cdot a$
$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=\left(16k^2-\frac{24k^2}{e}\right)u\cdot a$
$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=4\times\left(16k^2-\frac{24k^2}{e}\right)\mathrm{cm}^2$
$\mathcal{A}_{\mathrm{k}}=\left(64k^2-\frac{96k^2}{e}\right)\mathrm{cm}^2$
$\mathcal{A}_k=4k^2\mathrm{I}(2)$ avec $\mathrm{I}(2)=16-\frac{24}{e}$

CONSTRUCTION DE LA COURBE



CORRECTION SESSION NORMALE 2010

EXERCICE 1

1. Justifions que: $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

On a : $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$ Posons : $t = e^{-x}$

$$e^{-x} - \frac{(e^{-x})^2}{2} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x} \Rightarrow e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x}$$

Or $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ donc $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2. Démontrons que la suite (U_n) est strictement croissante.

on a: $U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{e^{n+1}}$

Or $e^{n+1} > 0$ d'où $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$

Donc la suite (U_n) est strictement croissante.

3. Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

Soit la proposition (P_n): $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

- Vérifions que (P_1) est vraie.

on a: $U_1 = 1 + \frac{1}{e} = 1 + e^{-1} \Rightarrow \ln(U_1) = \ln(1+e^{-1}) = f(1)$ car $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

Donc (P_1) est vraie.

- Supposons que (P_k) est vraie c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(U_k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$.

Démontrons que (P_{k+1}) est vraie.

On a: $U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) U_n$

Si $n = k$ alors $U_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right) U_k$

$$\ln U_{k+1} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right) U_k\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{k+1}}\right) + \ln U_k = \ln\left(1 + e^{-(k+1)}\right) + \ln U_k$$

Or $\ln(U_k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$

Donc $\ln U_{k+1} = \ln\left(1 + e^{-(k+1)}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = f(k+1) + f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$

$\ln U_{k+1} = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + f(k+1)$

Donc (P_{k+1}) est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

4. On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots \frac{1}{e^{2n}}$

a. Démontrons que: $a_n - \frac{1}{2} b_n < \ln(U_n) < a_n$

Soit l'encadrement: $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

Posons $x = n$ avec $n \geq 1$

On a: $e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} < f(n) < e^{-n}$

Pour $n = 1,2,3,4, \ldots, n$

Ona:

$$e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2} < f(1) < e^{-1}$$

$$e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2} < f(2) < e^{-2}$$

$$e^{-3} - \frac{e^{-6}}{2} < f(3) < e^{-3}$$

$$e^{-4} - \frac{e^{-8}}{2} < f(4) < e^{-4}$$

$$e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} < f(n) < e^{-n}$$

La somme membre à membre donne:

$(e^{-1} + e^{-2} + \cdots + e^{-n}) - \frac{1}{2}(e^{-2} + e^{-4} + \cdots + e^{-2n}) < f(1) + f(2) + \cdots + f(n) < e^{-1} + e^{-2} + \cdots + e^{-n}$ donc $a_n - \frac{1}{2} b_n < \ln(U_n) < a_n$

b. Justifions que: $\forall n \in \mathbb{N} *, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

On a : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

(a_n) est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme $\frac{1}{e}$.

D'où $\forall n \geq 1 \ a_n = a_1 + \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{e} + \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{e}\right)} \Rightarrow a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c. Démontrons que la suite (U_n) est majorée.

On a: $a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

$n \geq 1 \Leftrightarrow -n \leq -1 \Leftrightarrow e^{-n} \leq e^{-1} \Leftrightarrow -e^{-n} \geq -e^{-1} \Leftrightarrow 1 > 1 - e^{-n} \geq 1 - e^{-1}$

D'où $1-e^{-n}<1$

$(1-e^{-n})\times\frac{1}{e-1}<1\times\frac{1}{e-1}\Leftrightarrow\frac{1-e^{-n}}{e-1}<\frac{1}{e-1}$ Donc $a_n<\frac{1}{e-1}$

Or

$a_n-\frac{1}{2}b_n<\ln(U_n)<a_n$

$U_n<\bar{e}a_n$

D'où $U_n<e^{\frac{1}{e-1}}$

En conclusion, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $e^{\frac{1}{e-1}}$

En déduisons que la suite (U_n) est convergente.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc (U_n) est une suite convergente.

d. On note ℓ la limite de la suite (U_n).

Démontrons que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)}\leq\ln\ell\leq\frac{1}{e-1}$

On a: $b_n=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^4}+\cdots+\frac{1}{e^{2n}}$

(b_n) est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e^2}$ et de premier terme $\frac{1}{e^2}$

d'où : $b_n=b_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$ avec $n\geq 1$

$$b_n=\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e^2}\right)^n}{1-\frac{1}{e^2}}\Leftrightarrow b_n=\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}$$

Or $1-e^{-2n}<1$ d'où $b_n<\frac{1}{e^2-1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(b_n)=\frac{1}{e^2-1}$ et $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\frac{1}{e\ \ -1}$.

Au total, $a_n-\frac{1}{2}b_n<\ln\mathrm{U_n}<a_n$

Déduisons une valeur approchée de l à 0,1 près.

$$\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\leq\ln l\leq\frac{1}{e-1}\Leftrightarrow\frac{2(e^2-1)-(e-1)}{2(e-1)(e^2-1)}\leq\ln l\leq\frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2e^2-e-1}{2(e-1)(e^2-1)}\leq\ln l\leq\frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(e+\frac{1}{2}\right)(e-1)}{2(e^2-1)(e-1)}\leq\ln l\leq\frac{1}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2e+1}{2(e^2-1)}\leq\ln l\leq\frac{1}{e-1}$$

$\ln l = \frac{1}{e-1} \Rightarrow l = e^{\frac{1}{e-1}}$

$l \simeq e^{0,582}$

$l \simeq 1,79$

EXERCICE 2

1. Démontrons que la probabilité d'obtenir 3 chiffres identiques est $\frac{1}{36}$.

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ l'ensemble des éléments du dé.

Obtenir trois chiffres d'éléments de E est un 3-uplets de cet élément de E.

Donc $\text{Card}\,\Omega = 6^3 = 216$.

La probabilité d'obtenir trois chiffres identiques est :

Soit A l'évènement:

$A = \{111; 222; 333; 444; 555; 666\}$

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

2. Calculons la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6 .

Soit B l'évènement. On a :

$B = \{114; 141; 411; 123; 132; 213; 231; 312; 321; 222\}$

$$P(B) = \frac{\text{CardB}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{10}{6^3}$$

$$P(B) = \frac{5}{108}$$

3. Démontrons que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$. Soit C l'évènement. On a :

112 121 211… …

113 131 311… …

114 141 411

115 151 511

116161611

donc $P(C) = \frac{\text{CardC}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{5\times3\times6}{6^3} = \frac{15}{36}$ $P(C) = \frac{5}{12}$

4. Le droit de participation au jeu est de 3000 francs.

- si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs;
- s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs;
- s'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.

On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise.

a. Déterminons les valeurs prises par X.

$X = \{-3000; 0; 2000\}$

b. Déterminons la loi de probabilité de X.

$$P(X = -3000) = P(C) = \frac{5}{12}$$
$$P(X = 2000) = P(A) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 0) = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Donc la probabilité de X est :

X_i	-3000	0	2000	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c. Déterminons le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable? Le gain moyen au cours d'une partie est :

$$E(X) = -3000 \times \frac{5}{12} + 0 \times \frac{20}{36} + 2000 \times \frac{1}{36} = -\frac{10750}{9}$$
$$E(X) = -1194{,}44$$

Le jeu n'est pas équitable.

PROBLÈME

PARTIE A

1. a. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{3} + \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{3} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-5x + 4x\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x\left(-5 + 4\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-5 + 4\sqrt{1+\frac{15}{x^2}}\right) = -1$

b. Démontrons que (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x) - y = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) - \left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{5x}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} + \frac{1}{3}x$$

$$= -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15} = \frac{\left(-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)\left(-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)}{-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}}$$

$$f(x) - y = \frac{\left(-\frac{4}{3}x\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}\right)^2}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}} = \frac{\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{9}(x^2+15)}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}} = \frac{\frac{-80}{3}}{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+15}}$$

$$f(x) - y = \frac{80}{4x+4\sqrt{x^2+15}} = \frac{20}{x+\sqrt{x^2+15}}$$

On a: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{20}{x+\sqrt{x^2+15}} = 0$

car $\lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+15} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 20 = 20$

On a : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = 0$ donc (Δ): $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
c. Justifions que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ).

$$f(x) - y = \frac{20}{x+\sqrt{x^2+15}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2+15} > 0$ donc $f(x) - y > 0 \Rightarrow f(x) > y$

En conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, (C)$ est au dessus de la droite (Δ).

2. a. Calculons $f'(x)$ pour tout réel x.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(-5 + \frac{4\times 2x}{2x\sqrt{x^2+15}}\right) = \frac{1}{3}\left(-5 + \frac{4x}{\sqrt{x^2+15}}\right)$$

b. Démontrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dressons son tableau de variation. On a : $\frac{4x}{\sqrt{x^2+15}} < 5 \Leftrightarrow -5 + \frac{4x}{\sqrt{x^2+15}} < 0$ D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. Déterminons les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes (OI) et (OJ). - Pour (C) avec (OI)

On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -5x + 4\sqrt{x^2 + 15} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + 15} = 5x \Leftrightarrow 16(x^2 + 15) = 25x^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 = 240 \ \Leftrightarrow \ x^2 = \dfrac{80}{3}$

$x = \sqrt{\frac{80}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{80}{3}}$

$x = \frac{4\sqrt{15}}{3}$ ou $x = -\frac{4\sqrt{15}}{3}$

f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc le point d'intersection de (C) avec (OI) est le point de coordonnées: $\left(\frac{4\sqrt{15}}{3}; 0\right)$ avec $f(0) > 0$.

- Pour (C) avec (OJ).

On a: $x = 0$ d'où $f(0) = \frac{1}{3}(0 + 4\sqrt{0 + 15}) = \frac{4\sqrt{16}}{3}$

Donc le point d'intersection de (C) avec (OJ) est le point de coordonnées : $\left(0; \frac{4\sqrt{15}}{3}\right)$

4. a. Construction de $(\Delta), (\Delta')$ et la courbe (C) (Voir feuille annexe)

b. Démontrons que (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre O .

On a : $f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$

$$\begin{aligned}\forall -x \in \mathbb{R}, f(-x) &= \frac{1}{3}\left(-5(-x) + 4\sqrt{(-x)^2 + 15}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right) = -\frac{1}{3}\left(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15}\right)\end{aligned}$$

D'où $f(-x) = -g(x)$ Donc (C') est l'image de (C) par la symétrie de centre 0.

c. Construisons la courbe (C') dans le même repère que (C). (Voir feuille annexe)

PARTIE B

1. Démontrons que $(H) = (C) \cup (C')$.

$M(x;y) \in (C) \cup (C') \Leftrightarrow y = f(x)$ ou $y = g(x)$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right)$

$\Leftrightarrow 3y = -5x + 4\sqrt{x^2+15} \Leftrightarrow 3y + 5x = 4\sqrt{x^2+15}$

$\Leftrightarrow (3y+5x)^2 = 16(x^2+15) \Leftrightarrow 9y^2 + 30xy + 25x^2 = 16x^2 + 240$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 16x^2 + 9y^2 + 30xy + 240 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy + 80 = 0$

$y = g(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2+15}\right) \Leftrightarrow 3y = -5x + 4\sqrt{x^2+15}$

$\Leftrightarrow 3y + 5x = 4\sqrt{x^2+15} \Leftrightarrow (3y+5x)^2 = 16(x^2+15)$

$\Leftrightarrow 9y^2 + 30xy + 25x^2 = 16x^2 + 240$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$

Donc $(H) = (C) \cup (C')$

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminons l'écriture complexe de s.

$z' = az + b$

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + b$ avec $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

or $z_0 = \frac{b}{1-a} \Rightarrow 0 = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = 0$

Donc l'écriture complexe de sest $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$

b. Justifions que $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-x+y)$.

On a: $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)(x+iy)$

$z' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}yi - \dfrac{1}{2}ix + \dfrac{1}{2}y = \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y\right) + \left(\dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x\right)i$

$\Rightarrow x' + iy' = \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y\right) + \left(\dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x\right)i$

Donc $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ x' = \frac{1}{2}(-x+y) \end{cases}$

c. Déduisons que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x^2 - y^2 = 20$.

On a $M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$

Or $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = y \\ x' - y' = x \end{cases}$

En remplaçant x et y dans (H), on a :

$$3(x'-y')^2 + 3(x'+y')^2 + 10(x'-y')(x'+y') - 80 = 0$$
$$3(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 3(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 10(x'^2 - y'^2) - 80 = 0$$
$$3x'^2 + 3y'^2 + 3x'^2 + 3y'^2 + 10x'^2 - 10y'^2 - 80 = 0$$
$$16x'^2 - 4y'^2 - 80 = 0$$
$$4x'^2 - y'^2 - 20 = 0$$
$$4x'^2 - y'^2 = 20$$

Donc $M \in (H) \Leftrightarrow M' \in (\Gamma)$

3. a. Justifions que (Γ) est une hyperbole puis déterminons les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.

On a : $4x^2 - y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{20} - \frac{y^2}{20} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ est l'équation d'une hyperbole d'axe focal $(0, \vec{\imath})$.

On a : $a^2 = 5$ et $b^2 = 20$

Les sommets sont : $A(\sqrt{5}; 0)$ et $A'(-\sqrt{5}; 0)$

Les foyers, on a: $C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 20} = 5$ donc $F(5; 0)$ et $F'(-5; 0)$

b. Déterminons l'excentricité de (Γ).

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

c. Construisons (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H).

(On utilisera deux couleurs différentes pour (H) et (Γ)).

Les asymptotes de (Γ) : (Voir annexe)

$$(D): y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \Leftrightarrow (D): y = 2x$$
$$(D'): y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}x = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \Leftrightarrow (D'): y = -2x$$

4. Déduisons des questions précédentes que (H) est une hyperbole et précisons les foyers et les sommets.

(Γ) est l'image de (H) par la similitude S, donc (H) est l'image réciproque de (Γ) par la similitude S.

(H) est donc une hyperbole.

- Déterminons les foyers $F_H, F_H{}'$ de (H)

$S(H) = (\Gamma) \Rightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z \Rightarrow z_{F_H}{}' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z_{F_H}$

$5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z_{F_H} \Rightarrow z_{F_H} = \frac{5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \Rightarrow z_{F_H} = \frac{10}{1 - i} \Rightarrow z_{F_H} = 5(1 + i)$

Donc $F_H(5; 5)$ et $F'_H(-5; -5)$

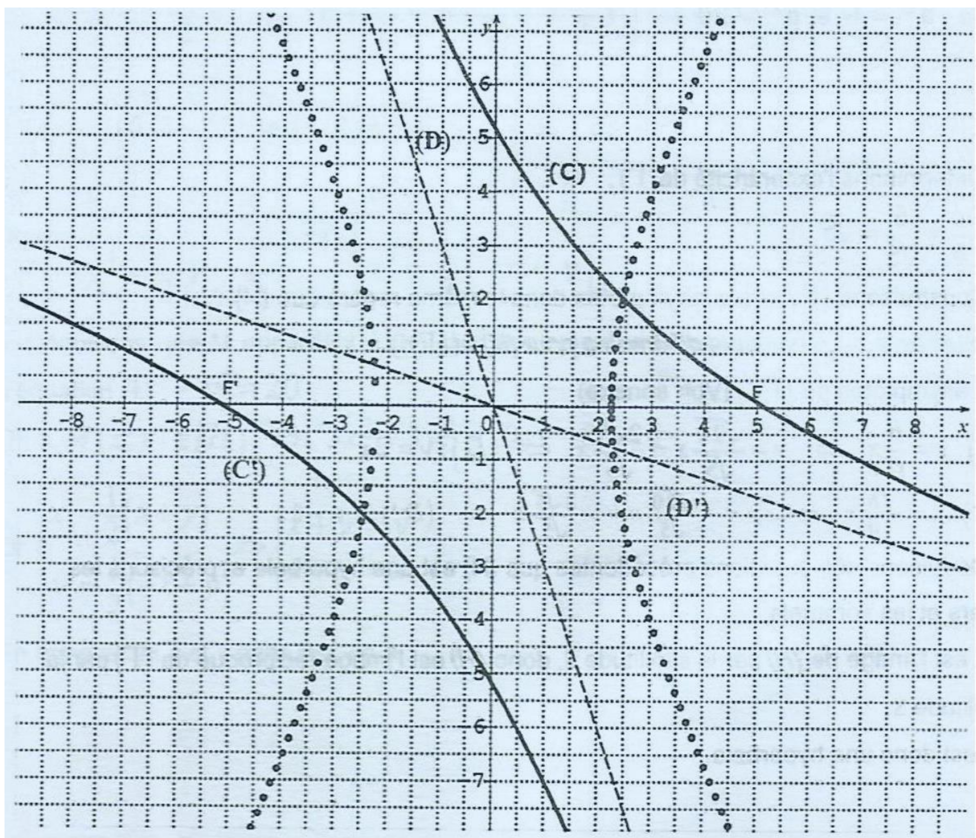
- Déterminons les sommets A_H et A'_H

$z'_{A_H} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z_{A_H} \Leftrightarrow \sqrt{5} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z_{A_H} \Leftrightarrow z_{A_H} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \Leftrightarrow z_{A_H} = \frac{2\sqrt{5}}{1 - i}$

$\Leftrightarrow z_{A_H} = \sqrt{5}(1 + i) \Leftrightarrow z_{A_H} = \sqrt{5} + i\sqrt{5}$

Donc $A_H(\sqrt{5}; \sqrt{5})$ d'où $A'_{H\ H}(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$

FEUILLE ANNEXE



CORRECTION SESSION NORMALE 2009 Série C

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Exprimons d^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique.

$a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow a^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow a^6 = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow a^6 = -8i$$

$b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow b = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow b^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{4}}$

$$\Leftrightarrow b^6 = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow b^6 = -8i$$

$c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow c^6 = 8e^{i2\pi} \Leftrightarrow c^6 = 8e^{i0} \Leftrightarrow c^6 = 8$$

2. En déduisons une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^6 = -8i$ $z^6 = -8i \Rightarrow z^6 = b^6 \Rightarrow z = b$ Donc b est une solution de (E).

3. Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a. Vérifions que $j^3 = 1$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow j^3 = e^{i0} \Leftrightarrow j^3 = 1$

b. Démontrons que jb et jb sont aussi des solutions de (E).

On a: $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où $jb = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{4}} \Leftrightarrow jb = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Vérifions que jb est une solution de (E).

On a : $(jb)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{11\pi}{12}\times 6} \Rightarrow (jb)^6 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8(-i) = -8i$

Donc jb est une solution de (E)

- On a : $j^2b = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}} \Rightarrow j^2b = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

Vérifions que j^2b est solutions de (E)

On a: $(j^2b)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{-i\frac{5\pi}{12}\times 6}$

$(j^2b)^6 = 8e^{-i\frac{5\pi}{2}} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = 8(-i) \Rightarrow (j^2b)^6 = -8i$

Donc j^2b est une solution de (E).

c. En déduisons toutes les solutions de (E) puis écrivons les sous forme algébrique. $b; jb; j^2b; -b; -jb$ et $-j^2b$

- Forme algébrique des solutions

$b=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow b=1+i \Leftrightarrow -b=-1-i$

$jb=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$jb=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow -jb=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

$j^2b=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(1+i)=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

$\Leftrightarrow -j^2b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

PARTIE B

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$

II existe deux entiers u et v tel que $x=6u+0$ et $x=4v+3$

D'où on obtient : $6u=4v+3 \Rightarrow 6u-4v=3$ est une équation du type $ax+by=c$.

- Déterminons $PGCD(6;4)$

On a: $6=2\times 3$ et $4=2^2$ donc $\mathrm{PGCD}(6;4)=2$

3 n'est pas un multiple de 2 donc $S=\emptyset$

2. Déterminons tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel
- b^n est un imaginaire pur.

$\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $a_n=(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ et $b_n=(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

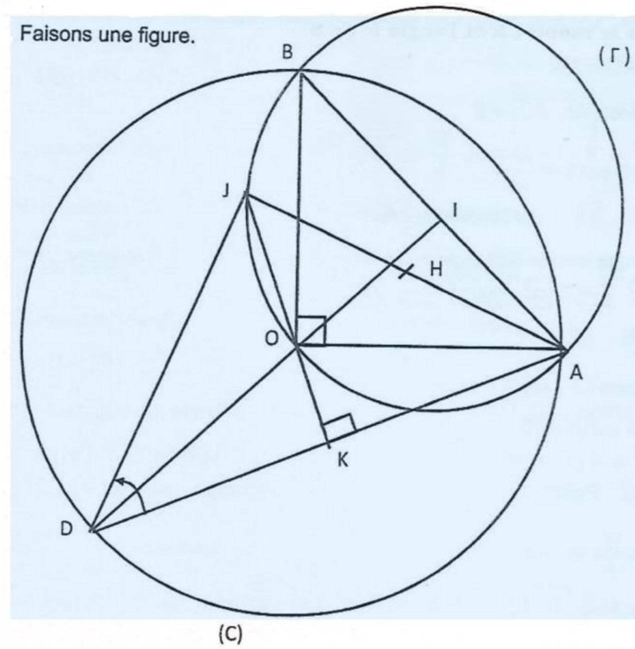
$\begin{cases} a^n \in \mathbb{R} \\ a^n \in i\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0[6] \\ n \equiv 2[4] \end{cases}$

$6u-4v=2$ avec $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$

Or $\mathrm{PGCD}(6;4)=2$ est un multiple de 2 donc l'équation admet une solution $S=\{12k+6; \mathrm{k}\in\mathbb{N}\}$

EXERCICE 2

1. a. Faisons une figure.



b. Justifions que $\text{Mes}(\overrightarrow{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$.

(C) est le cercle de centre O et de rayon $OA. D \in (C)$

L'angle ($\widehat{BDA}$) est un angle inscrit à (C) et l'angle ($\widehat{BOA}$) est un angle au centre.

Ils interceptent le même arc AB. Donc on a:

$$\text{Mes}(\overrightarrow{\text{DA}; \overrightarrow{\text{DB}}}) = \frac{1}{2}\text{Mes}(\overrightarrow{\text{OA}; \overrightarrow{\text{OB}}}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc Mes $(\overrightarrow{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$

c. Démontrons que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.

$J \in (\Gamma)$ et $[AB]$ est un diamètre de (Γ) donc le triangle BAJ est rectangle en J.

D'où $(JA) \perp (JB)$ or $D \in (JB)$; donc le triangle DAJ est rectangle en J et de sens direct.

DAJ est un triangle isocèle en J car ayant deux angles de même mesure.

Donc DAJ est un triangle isocèle rectangle en J.

Démontrons que la droite (OJ) est la médiatrice du segment [AD].

On a : $DO = OA$ et $DJ = JA$ donc (OJ) est la médiatrice de $[AD]$.

2. Soit S la similitude directe de centre A telle que $\mathbf{S}(1) = 0$.

a. Déterminons le rapport k et l'angle θ de $\mathbf{S}$.

$S(I) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AO = kAI \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\overline{AI}, \overline{AO}}) = \theta \end{cases}$

- le rapport k de S est $k = \frac{AO}{A!}$

On a: $AI = \frac{1}{2}AB$ (1): car I milieu de $[AB]$

- OAB est un triangle isocèle rectangle en O. D'après la propriété de Pythagore

$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 2AO^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}OA$

d'où $OA = \frac{1}{\sqrt{2}}AB$

Partant des relations (1) et (2), on a: $k = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}AB}{\frac{1}{2}AB} = \sqrt{2}$

Donc le rapport k est : $k = \sqrt{2}$

- l'angle θ de S

$\text{Mes}\,\overline{\overline{Al}, \overline{AO}} = \theta$ Puisque AOB est un triangle rectangle isocèle en O donc

$\text{Mes}\,\overline{\overline{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$

Or $l \in [AB]$ donc Mes $\overline{(\overline{AI}, \overline{AO})} = \frac{\pi}{4}$

Donc l'angle θ de S est égale à $\frac{\pi}{4}$

b. Démontrons que $S(H) = K$

$S(H) = K \Leftrightarrow \begin{cases} AK = kAH \\ \text{Mes}(\widehat{\widehat{AH}, \widehat{AK}}) = \theta \end{cases}$

- Calculons le rapport k et l'angle θ

On a : $k = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AH}}$

H est le milieu de $[AJ] \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AJ$

(OJ) est la médiatrice de $[AD]$ donc $K \in (OJ)$ est équidistant de A et B d'où $AK = AD$.

JKA est donc un triangle rectangle isocèle en k.

JKA est un triangle rectangle isocèle en K d'où d'après la propriété de Pythagore, on a :

$JA^2 = JK^2 + KA^2 \Leftrightarrow JA^2 = 2KA^2 \Leftrightarrow JA = \sqrt{2}KA$

Or $k = \frac{AK}{AH} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}JA}{\frac{1}{2}JA}$ Donc le rapport est: $k = \sqrt{2}$

- le triangle JKA est un triangle rectangle isocèle en K donc Mes $\overline{(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})} = \frac{\pi}{4}$

D'où Mes $\overline{\overline{AH}, \overrightarrow{AK})} = \frac{\pi}{4}$

En conclusion : $k = \sqrt{2}$ et $\text{Mes}\,\overline{\overline{AH}, \overline{AK}} = \frac{\pi}{4}$ donc $S(H) = K$

c. Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{KI, \overline{KJ}}$

(JK) est la médiatrice de $[AD]$ et $k \in [AD]$ donc Mes $\overline{\overline{KA}, \overline{KJ}} = \frac{\pi}{2}$

Considérons le triangle AJB. I milieu de $[AB]$ et H milieu de $[AJ]$

D'où $(HI)/I(JB)$

Dans le triangle AJD, H milieu de $[AJ]$ et K milieu de $[AD]$ donc $(KH)/(JD)$.

Comme $(HI)/(JB)$ et $(KH)I(JD)$ cela montre que les points $H; K$ et I sont alignés et $(KI)!!\,(DB)$.

La droite (AD) forme avec (KI) et (DB) deux angles dont les mesures sont :

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KJ}}) = \frac{\pi}{2}$ D'où :

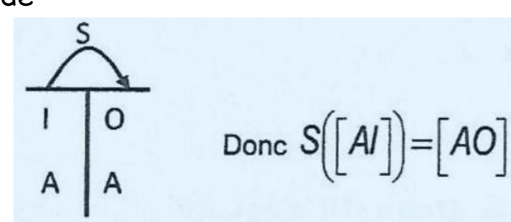
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KJ}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{Kl}, \overrightarrow{KJ}})$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KJ}}\right) - \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}) = \frac{\pi}{4}$

3. Déterminons l'image du cercle (Γ) par S.

Soit S la similitude



L'image du cercle (Γ) par S est le cercle (C) de centre O et de rayon AO.

PROBLEME
PARTIE A

1. Etudions les variations de $\mathcal{U}$.

$u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$

$D_U =]0; +\infty[$

$$u'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x} = \frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$$

Sens de variation

$\forall x \in]0; \sqrt{2}[, u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]\ 0; \sqrt{2}\ [$.

$\forall x \in]\sqrt{2}; +\infty[, u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

Tableau de variation de U

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
u'(x)		-	0	+	
u(x)		↘	6 – 2ln2	↗	

2. Justifions que: $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[, u(x)$ admet un minimum relatif qui est $6 - 2\ln 2 > 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) > 0$

PARTIE B

1. Calculons la limite de f en 0 et interprétons graphiquement le résultat.

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = -1$ et $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right) = -\infty$

On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite (OJ) est une asymptote verticale à (C_f).

2. a. Calculer la limite de f en $+\propto$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\propto$.

3. a. Vérifions que: $\forall x \in]0; +\infty\Big[, f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x\frac{1}{x} \cdot x - 2\ln x}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 4 - 4\ln x}{2x^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$

avec $U(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$

b. En déduisons le sens de variation de f et dressons son tableau de variation.

On sait que $\forall x \in]0; +\infty[, \mathrm{u(x)} > 0$ et $2\mathrm{x}^2 > 0$, donc $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$Au total f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	+c

4. a. Démontrons que $f(x) = 0$ admet une solution α tel que $1 < \alpha < e$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f$ est continue est strictement croissante ; On a $\mathrm{f}(10; +\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

On a : $f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{2\ln 1}{1} = -\frac{1}{2}$ et $f(e) = \frac{1}{2}e - 1 + \frac{2}{e} = 1{,}09$

D'où $f(1) \times f(e) < 0$ donc $\alpha \in]1; e[$

b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

Méthode de balayage

- Encadrement d'ordre 0

$1 < \alpha < e$

x	1	2	e
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

D'où on $\mathrm{a}: 1 < \alpha < 2$

- Encadrement d'ordre 1

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+

Donc on obtient: $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$

5. a. Démontrons qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

Le coefficient directeur de la tangente (T) est $f'(a)$ et celle de la droite (D) est $\frac{1}{2}$

$(D)//(T) \Leftrightarrow f'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+4-4\ln a}{2a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$ Il existe un point A où (D) ∥ (T)

b. Donnons les coordonnées du point A.

$$f(a) = f(e) \Leftrightarrow f(a) = \frac{1}{2}e - 1 + \frac{2\ln e}{2e} \Leftrightarrow f(e) = \frac{e^2 - 2e + 4}{2e} \Rightarrow A\left(e; \frac{e^2 - 2e + 4}{2e}\right)$$

6 a. Etudions la position relative de (D) par rapport à (C).

$$f(x) - y = \left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}\right) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

$$f(x) - y = \frac{2\ln x}{x}$$

$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$, donc (C) est en dessous de (D)

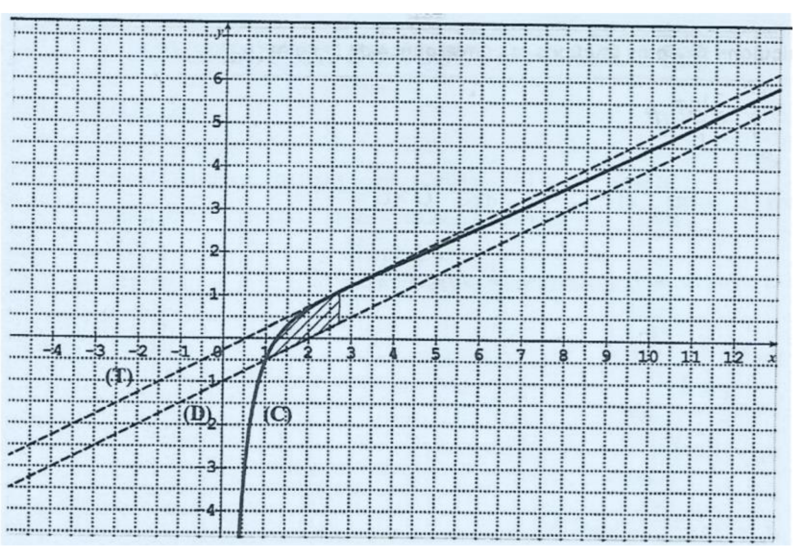
$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$, donc (C) est au dessus de (D)

Pour $x = 1 \Rightarrow f(x) - y = 0$, donc (C) et (D) coïncident

6 b. Construisons (T), (D) et (C).

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$y = f'(e)(x - e) + f(e)$$
$$y = \frac{1}{2}(x - e) + \frac{1}{2}e - 1 + \frac{2}{e}$$

$$(T): y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{e}$$



PARTIE C

1. a. Hachurons sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est a_1

$$a_1 = \int_{e^0}^{e^1} \frac{2\ln t}{t} dt = \int_1^e \frac{2\ln t}{t} dt$$

or $f(t) - y = \frac{2\ln t}{t}$ donc a_1 est l'aire (en u.a) du domaine comprise entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, la courbe (C) et la droite (D). (Noir courbe).

b. Interprétons graphiquement le nombre a_n.

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{n} \frac{2\ln t}{t} dt$$

On a : $f(t) - y = \frac{2\ln t}{t}$

donc a_n est l'aire (en u.a) du domaine délimité par les droites d'équations $x = e^{n-1}$; $x = e^n$, la courbe (C) et la droite (D)

c. Calculons a_n puis étudions la convergence de la suite (a_n).

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{n} \frac{2\ln t}{t} dt$$

Posons $U = \ln t$ et $U' = \frac{1}{t}$ d'où $U' \times U = \frac{\ln t}{t}$

Donc la primitive de $U' \times U$ est $F(x) = \frac{2(\ln x)^2}{2} = (\ln x)^2$

D'où $a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$

$$a_n = [(\ln t)^2]_{e^{n-1}}^{e^n}$$
$$a_n = (\ln e^n)^2 - (\ln e^{n-1})^2 = n^2 - (n-1)^2$$
$$a_n = 2n - 1$$

Convergence de a_n

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (2n - 1) = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$$

Donc la suite a_n diverge vers $+\infty$

2. Justifions que: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \int_1^{e^1} \frac{2\ln t}{t} dt + \int_e^{e^2} \frac{2\ln t}{t} dt + \cdots. + \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$$

D'après la relation de Chasles

Donc $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \int_1^{e^n} \frac{2\ln t}{t} dt$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = [(\ln t)^2]_1^{e^n}$$
$$= (\ln e^n)^2 - (\ln 1)^2 = n^2 - 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2$$

CORRECTION SESSION NORMALE 2008 Série C

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.
On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A; 1), (8; 1)$ et $(C; -1)$.

Pour la figure, prendre comme unité de longueur le centimètre et $AB = 6$.

Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrons que le quadrilatère ACBG est un losange.

$G = \text{bar}$

A	B	C
1	1	-1

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \quad (1)$$

ABC est un triangle équilatéral d'où $\mathrm{CA} = \mathrm{CB}(2)$

Les relations (1) et (2) montrent que $ACBG$ est un losange.

2. a. On appelle O le centre du losange ACBG.

E est le symétrique de O par rapport à B.

Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

Construisons les points E et F.

(Voir figure sur feuille annexe)

b. Démontrons que $\mathbf{F}$ est l'image de $\mathbf{G}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

$t_{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}(0) = \mathrm{F} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ et $S_O(B) = E \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE}$

On a : AGBC est un parallélogramme

D'où : AOFG est un parallélogramme

Donc $\overline{BE} = \bar{G}\vec{F} \Rightarrow t_{\overline{BE}}(G) = F$

En conclusion : F est l'image de G par la translation du vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note: $t = t_{\overline{BE}} \circ t_{\overline{CB}}$

a. Déterminons les images des points A et C par t.

${}^{t-t}BE\,{}^{\circ t}CB$

$t(C) = {}_{BE}{}^{\circ t}{}_{CB}$

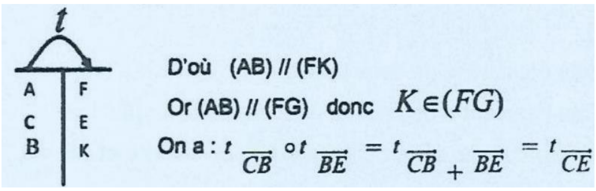
$t(A) = {}_{BE}{}^{\circ t}{}_{CB}{}^{(A)}$

$t(A) = t_{BE^{(G)}}$

$t(C) = t_{BE}(B)$
$t(A) = F$
$t(C) = E$

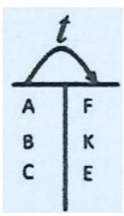
b. $\mathbb{K}$ est l'image de $\mathbf{B}$ par t.

Démontrons que le point K appartient à la droite (GF) puis construisons K.



Construction de K (voir figure)

c. Déterminons l'image du triangle ABC par t.



Donc l'image du triangle ABC par t est le triangle FKE

4. On note: $f = t \circ S_{(OC)}$, où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC).

a. Déterminons l'image du triangle ABC par f.

$f(A) = t \circ S_{(OC)}(A) = t(B) \Rightarrow f(A) = \mathrm{K}$
$f(B) = t \circ S_{(OC)}(B) = t(A) \Rightarrow f(B) = F$
$f(C) = t \circ S_{(OC)}(C) = t(C) \Rightarrow f(C) = E$

Donc l'image du triangle ABC par f est le triangle KFE

b. Démontrons que f est une symétrie glissée.

$f = t \circ S_{(OC)}$ est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$ et de la symétrie orthogonale d'axe (OC).

De plus, le vecteur $\overrightarrow{CE}$ n'est pas normal à (OC) donc f est une symétrie glissée.

c. Soit $S_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF).

Démontrons que: $s_{(OC)} = t_{EO} \circ s_{(BF)}$

La droite (EO) $\perp (BF)$ donc $t_{\overline{EO}} o S_{(BE)}$ est une symétrie orthogonale d'axe.

$t_{\overline{\mathrm{EO}}} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{BF})}(0) = t_{\overline{\mathrm{EO}}}(E) = 0$

$t_{\widehat{EO}} \circ S_{(BF)}(C) = t_{\overrightarrow{EO}}(C') = C$

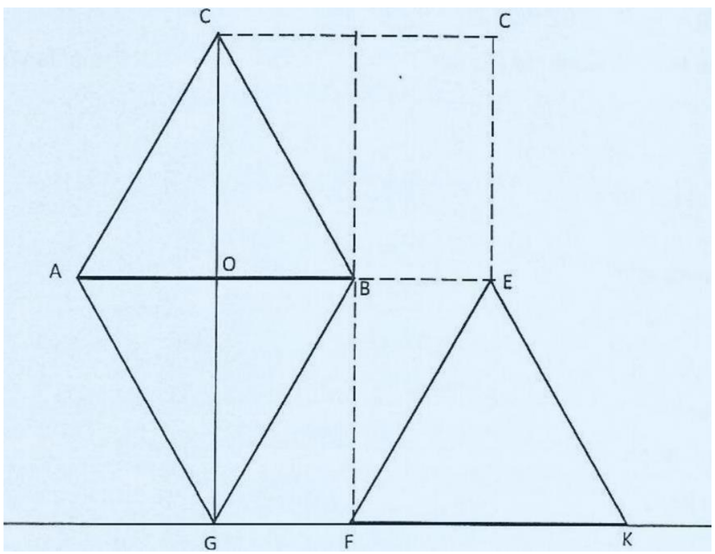
Donc les points O et C sont invariants

D'où $s_{(OC)} = t_{EO} \circ s_{(BF)}$
d. En déduisons les éléments caractéristiques de f.

$$f = t_{\overline{BE}} {}^{o} t_{CB} \cdot S_{(OC)}$$
$$= t_{CE} {}^{o} t_{\overline{EO}} o S_{(BF)}$$
$$f = t_{CO} o S_{(BF)}$$

De plus (CO) et (BF) sont parallèles donc f est la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{CO}$ et d'axe (BF).

Figure (feuille annexe)



EXERCICE 2

On considère l'équation (E) définie par : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$

1. a. Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 35 et 27.

Dividende	35	27	8	3	2
Diviseur	27	8	3	2	1
Reste	8	3	2	1	0

Donc PGCD $(35; 27) = 1$

b. En déduisons une solution de l'équation (E'): $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 1$

Solution particulière de (E')
On a : $35 = 27 \times 1 + 8$
$27 = 8 \times 3 + 3$

$8 = 3 \times 2 + 2$
$3 = 2 \times 1 + 1$

On a: $1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (8 - 3 \times 2) \times 1 = 3 - 8 \times 1 + 3 \times 2 = 3 \times 3 - 8 \times 1 = 3 \times (27 - 8 \times 3) - 8 \times 1$

$1 = 3 \times 27 - 8 \times 9 - 8 \times 1$
$1 = 3 \times 27 - 8 \times 10 = 3 \times 27 - (35 - 27) \times 1 \times 10 = 3 \times 27 - 35 \times 10 + 27 \times 10 = 27 \times 13 - 35 \times 10$
$1 = 35 \times (-10) - 27 \times (-13)$

Donc La solution particulière est : $(x_0, y_0) = (-10, -13)$

2. a. Vérifions que $(-20, -26)$ est une solution de (E).

On a : $35x - 27y = 2$

$35x(-20) - 27x(-26) = -700 + 702 = 2$. Donc $(-20, -26)$ est une solution de (E).

b. Démontrons que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant: $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ où k est un entier relatif.

On a: $35k - 27y = 2: (1)$ et $35(-20) - 27(-26) = 2$

La différence de (1) et (2) donne: $35(x + 20) - 27(y + 26) = 0 \Rightarrow$

$$35(x + 20) = 27(y + 26)$$

35 et 27 sont premiers entre eux d'après le théorème de GAUSS, on a :

$x + 20 = 27k$ d'où $x = 27k - 20$ de même $y - 35k = -26$, d'où $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $S = \{(27k - 20; 35k - 26)k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain « jour des génies» sachant qu'ils avaient adoré le génie N'Gouan 8 jours auparavant.

Soit n le nombre de jour d'adoration de "N'Gouan"

Et m le nombre de jour d'adoration de "Moayé" :

On a: $\begin{cases} n = 140x \text{ avec } x \in \mathbb{N} \\ m = 108y \\ m = n - 8 \end{cases}$

De ce qui précède : $108y = 140x - 8 \Rightarrow 140x - 108y = 8 \Rightarrow 35x - 27y = 2$

On obtient: $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26, k \in \mathbb{Z}$

Le plus petit entier k (tel que $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$) est : $k = 1$. On obtient donc $x = 7$ et $y = 9$

Ainsi, le nombre de jours qui séparent du "prochain jour des génies" est :

$n = 108 \times 9$

$n = 972$

PROBLEME

Partie A

1. a. Justifions que f est continue 0 .

$f(x) = -1 + x\ln x$

$D_f =]0;+\infty[$ et $f(0) = -1; f$ est définie en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(-1 + x\ln x) = \lim_{x\to 0}(-1) + \lim_{x\to 0} x\ln x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, car $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0\ x \to 0$

Car $\lim_{x\to 0} x\ln x$

On a : $\lim f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0 .

$x \to 0$

b. Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x}$ et Interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + x\ln x + 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = -\infty$$

Interprétation

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

Donc la courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0 .

2. a. Déterminons la limite de f en $+\propto$.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(-1 + x\ln x) \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Car $\lim_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$

b. Etudions les variations de f.

$f(x) = -1 + x\ln x$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

$\forall x \in]e^{-1};+\infty[; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]e^{-1};+\infty[$

$\forall x \in]0;e^{-1}[; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}[$

Tableau de variation de f

0	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| -1	$\searrow$	$-1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8 .

$\forall x \in]e^{-1}; +\infty[, f$ est continue et strictement croissante sur $]e^{-1}; +\infty[$.

On a : $0 \in f(]e^{-1}; +\infty[) =]-1-e^{-1}; +\infty[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique S.

On a : $\begin{cases} f(1{,}7) = -1 + 1{,}7\ln 1{,}7 = -0{,}09.. \\ f(1{,}8) = -1 + 1{,}8\ln 1{,}8 = 0{,}058 \end{cases}$

D'où $f(1{,}7) \times f(1{,}8) < 0$ donc $1{,}7 < s < 1{,}8$

Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de S.

b. Justifions que: $\begin{cases} \forall x \in]0; s[,\ f(x) < 0 \\ \forall x \in]s; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

D'après le tableau de variation de f, on a :

0	0		e^{-1}		s		$+\infty$
f(x)		$-$	$-1-e^{-1}$	$-$	0	$+$	

f est strictement décroissante sur $]0; e^{-1}[, f(]0; e^{-1}[) =]-1-e^{-1}; -1[$; d'où $f(x) < 0$ f est strictement croissante sur $]e^{-1}; s[; f(e^{-1}; s[) =]-1-e^{-1}; 0[$; d'où $f(x) < 0$ f est strictement croissante sur] s ; $+\infty[; f(]s; +\infty[) =]0; +\infty[$. D'où $\mathrm{f(x)} > 0$ En conclusion : $\begin{cases} \forall x \in]0; s[,\ f(x) < 0 \\ \forall x \in]s; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

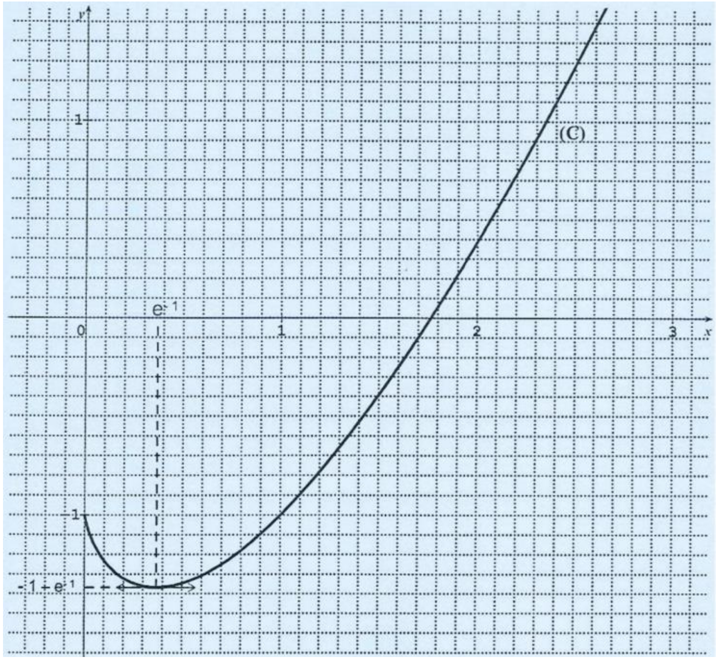
4. a. Justifions que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1 + x\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{x} + \ln x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

b. Traçons (C).



c. Calculons en fonction de s l'intégrale $I = \int_1^S f(x)dx$.

$I = \int_1^S f(x)dx$

$I = \int_1^S (-1 + x\ln x)dx$

$I = \int_1^s -1dx + \int_1^s x\ln x dx$

$I = [-x]_1^S + \int_1^s x\ln x dx$

Posons $I_1 = \int_1^s x\ln x dx$

$U = \ln x$

$U' = \frac{1}{x}$

$V' = x\ V = \frac{1}{2}x^2$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^S - \int_1^S \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^S - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^S$

$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^S$

Donc:

$I = [-x]_1^S + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^S$

$I = -s + 1 + \frac{1}{2}s^2 \ln s - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 \ln 1 + \frac{1}{4}1^2$

$I = -s + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)$

d. En déduisons une valeur approchée à $10-^2$ près de l'aire $\mathrm{A}(S)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $\mathrm{x} = 1$ et $\mathrm{x} = S$.

$A(s) = -\int_1^S f(x)dx \times 25\ \mathrm{cm}^2$

$A(s) = -\left[-s + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)\right] \times 25\ \mathrm{cm}^2$

$A(s) = 25s - \frac{125}{4} + \frac{25}{2}s^2\left(\frac{1}{2} - \ln s\right)\mathrm{cm}^2$

$A(s) = 10{,}19\ \mathrm{cm}$

Partie B

1. a. Démontrons que: $\forall x \in \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[, g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ $g(x) = s \Rightarrow \frac{1+x}{1+\ln x} = x \Rightarrow 1 + x = x(1 + \ln x) \Rightarrow$ $1 + x = x + x\ln x \Rightarrow x\ln x - 1 = 0$

Donc $f(x) = 0$

En conclusion : $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

b. En déduisons le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x$ et leur valeur.

L'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $s \simeq 1{,}8$

2. a. Démontrons que, $\forall x \in \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[, g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$

$g'(x) = \left(\frac{1+x}{1+\ln x}\right)' = \frac{(1+\ln x) - \frac{1}{x}(1+x)}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x - \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{x\ln x - 1}{x(1+\ln x)^2}$

$g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$ avec $f(x) = -1 + x\ln x$

b. Justifions que g est strictement croissante sur l'intervalle $[s, 2]$.

x	e^{-1}	s	$+\infty$
f(x)	-	0	+
x	+		+
$(1+\ln x)^2$	+		+
g'(x)	-	0	+

$\forall x \in]e^{-1}; s[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{s}[$.

$\forall x \in]s;+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]s;+\infty[$.

Au total on a: $[s;2] \subset [s;+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[s;2]$.

D'où $g([s;2]) = [g(s);g(2)[$

3. Démontrons que: $g([s,2]) \subset [s,2]$

g est strictement croissante sur $[s;2\,]$. D'où

$g([s;2]) = [g(s);g(2)[$

$g([s;2]) = \left[s;\dfrac{3}{1+\ln 2}\right[$

Or $\left[s;\frac{3}{1+\ln 2}\right[\subset [s;2[$ donc $g([s,2]) \subset [s,2]$

4. a. Démontrons que : $\forall x \in \left[1;+\infty\right[, \frac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

On a : $x \geq 1$ car $x \in [1;+\infty[, \ln x \geq \ln 1$

$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1+\ln x \geq 1 \Leftrightarrow (1+\ln x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

b. Démontrons que pour tout réel x élément de $[s,2], \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{3} f(2)$

$x \in [s,2] \Rightarrow s \leq x \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{s}$

$x \leq 2$, comme f est croissante sur $[s;+\infty[$, alors

$f(x) \leq f(2)$ d'où $\frac{1}{x} f(x) \leq \frac{1}{s} f(2)$ donc $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{3} f(2)$

On a: (1): $\frac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$ et $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{3} f(2)$

En déduisons que: $\forall x \in [s,2], |g'(x)| \leq 0{,}3$

En multipliant membre à membre les inégalités de (1), on obtient :

$$\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{(1+\ln x)^2} \leq \frac{2}{3} f\#(2)$$

Or , on sait que : $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$ d'où

$|g'(x)| \leq \dfrac{2}{3} f(2) \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \dfrac{2}{3}(-1+2\ln 2) \Leftrightarrow |g'(x)| \leq 0{,}2575 \Leftrightarrow |g'(x)| \leq 0{,}3$

Donc $\forall x \in [s,2], |g'(x)| \leq 0{,}3$

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrons que, pour tout entier naturel

$$n, U_n \in [s, 2]$$

Soit P_n la proposition $U_n \in [s, 2]$

- Vérifions que P_0 est vraie.

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2 \in [s, 2]$

Donc P_0 est vraie

- Supposons que P_n est vraie $\Rightarrow U_n \in [s; 2]$
- Démontrons que Pn+1 est vraie.

$s \leq U_n \leq 2$ d'où $\ln s \leq \ln \mathrm{U}_n \leq \ln 2$

$s + 1 \leq 1 + U_n \leq 2$: (1) et $1 + \ln s \leq 1 + \ln U_n \leq 1 + \ln 2$

$$\frac{1}{1 + \ln 2} \leq \frac{1}{1 + \ln \mathrm{U}_n} \leq \frac{1}{1 + \ln s} \#(2)$$

Les relations (1) et (2) donnent:

$$\frac{s + 1}{1 + \ln 2} \leq \frac{1 + \mathrm{U}_n}{1 + \ln \mathrm{U}_n} \leq \frac{2}{1 + \ln s} \Rightarrow \frac{s + 1}{1 + \ln 2} \leq \mathrm{U}_{n+1} \leq \frac{2}{1 + \ln S}$$

D'où $\frac{s+1}{1+\ln 2} \leq s \leq \mathrm{U}_{n+1} \leq \frac{2}{1+\ln s} \leq 2$

Par conséquent $s \leq U_{n+1} \leq 2$

La proposition P_{n+1} est vraie donc P_n est aussi vraie

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [s; 2]$

6. a. Utilisons l'inégalité des accroissements finis pour justifier que:

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - s| \leq 0{,}3 \times |U_n - s|$.

$|g'(x)| \leq 0{,}3$ d'où $|g'(U_n)| \leq 0{,}3$ donc en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur

$|U_n - s|$, on a $|g(U_n) - g(s)| \leq 0{,}3|U_n - s|$

Or $g(s) = s$ et $g(U_n) = U_{n+1}$ Donc $|U_{n+1} - s| \leq 0{,}3 \times |U_n - s|$

b. En déduisons que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - s| \leq \frac{(0{,}3)^n}{2}$

On a: $|U_{n+1} - s| \leq 0{,}3 \times |U_n - s|$ D'où $|U_{n+1} - s| \leq 0{,}3 \times |U_n - s|$

$|U_1 - s| \leq 0{,}3 \times |U_0 - s|$

$|U_2 - s| \leq 0{,}3 \times |U_1 - s|$

$|U_3 - s| \leq 0{,}3 \times |U_2 - s|$

$|U_n - s| \leq 0{,}3 \times |U_{n-1} - s|$

En multipliant membre à membre les égalités, on obtient :
$|U_n - s| \leq (0{,}3)^n |U_0 - s|$ Donc $|U_n - s| \leq \frac{(0{,}3)^n}{2}$

7. a. Justifions que U_n converge vers S.

On a : $\lim_{n\to+\infty}(U_n - s) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(0{,}3)^n}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - s) = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n\ln 0{,}3}}{2} = 0$$

Car $\lim_{n\to+\infty} n\ln 0{,}3 = -\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} e^n = 0$

En conclusion: $\lim_{n\to+\infty} U_n = s$ donc U_n converge vers S

b. À partir de quelle valeur de n, U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près?

On a : $\frac{(0{,}3)^n}{2} \leq 10^{-4}$

$$\begin{aligned}(0{,}3)^n \leq 2 \cdot 10^{-4} &\Rightarrow \ln(0{,}3)^n \geq \ln(2 \cdot 10^{-4})\\ &\Rightarrow n\ln(0{,}3) \geq \ln(2 \cdot 10^{-4})\\ &\Rightarrow n \geq \frac{\ln(2 \cdot 10^{-4})}{\ln(0{,}3)}\\ &\Rightarrow n \geq 7{,}1\end{aligned}$$

A partir de $n \geq 8, U_n$ est une valeur approchée de S à partir de 10^{-4} près.

CORRECTION SESSION NORMALE 2007 Série C

EXERCICE 1

1. Justifions que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025.

Soit G l'évènement "la personne choisie est un gaucher" et $\bar{G}$ l'évènement contraire.

On a : $P(G) = 0{,}3$ et $P(\bar{G}) = 0{,}7$

La probabilité pour qu'il ait un seul gaucher est :

$P(A) = C_6^1 P(G)^1 P(\bar{G})^5 = 6 \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)^5 \Rightarrow P(A) = 0{,}3025$

2. Calculons la probabilité pour qu'un groupe de 3 personnes choisies au hasard dans cette ville contienne:

a. Exactement 2 gauchers

Soit B l'évènement. La probabilité est :

$P(B) = C_6^2 P(G)^2 P(\bar{G})^4 = 15 \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)^4 \Rightarrow P(B) = 0{,}324135$

b. au moins un gaucher

Soit C l'évènement. $P(C) = 1 - P(\bar{C})$ avec $\bar{C}$ l'évènement les 6 personnes ne contiennent pas de gaucher.
La probabilité est :

$P(C) = 1 - P = 1 - (0{,}7)^6 \Rightarrow P(C) = 0{,}88235$

3. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a. Déterminons les valeurs prises par $\mathbf{X}$.

$X \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

b. Justifions que la probabilité pour que $\mathbf{X}$ prenne la valeur 2 est égale à 0,0007 .

$P(X = 2) = C_6^6 P(G) = 1 \times (0{,}3)^6 \Rightarrow P(X = 2) = 0{,}0007$

c. Calculons la probabilité pour que $\mathbf{X}$ prenne la valeur 6 .

$$P(X = 6) = C_6^1 P(G)^1 P(\bar{G})^5 + C_6^2 P(G)^2 P(\bar{G}) = 6 \times (0{,}3) \times (0{,}7)^5 + 15 \times (0{,}3)^2 \times (0{,}7)$$
$$\Rightarrow \; P(X = 6) = 0{,}302526 + 0{,}324135 = 0{,}626661$$

Donc $P(X = 6) = 0{,}6267$

EXERCICE 2

1. a. Construire le triangle ABC. (Voir figure)

b. Démontrons qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

Nous savons que le centre d'une rotation qui transforme un point M en un point M' est situé sur la médiatrice du segment [MM']. Puisque la rotation r doit transformer B en C et A en E, son centre doit être situé sur les médiatrices des segments $[\mathrm{BC}]$ et [AE]. Les droites (BC) et (AE) n'étant pas parallèles, il en résulte que les médiatrices des $[BC]$ et $[AE]$ se coupent effectivement en un point. Donc il existe une rotation r transformant B en C et A en E, et dont l'angle orienté est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}})$
c. Déterminons l'angle de la rotation r.

$$\left.\begin{array}{l}R(A)=E\\R(B)=C\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}})=\theta$$

On a : E milieu de $[AC]$ d'où $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où : $\mathrm{Mes}\overline{(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}})}=\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\Rightarrow \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EC}})=\frac{\pi}{3}$

Donc l'angle de la rotation est $\theta=\frac{\pi}{3}$

d. Construire son centre O. (Voir figure)

Soit H le milieu de $[AE]$ et soit H ' le milieu de $[BC]$.

Traçons les médiatrices de $[AE]$ et $[BC]$.

Elles se coupent au point O qui est le centre de la rotation r.

2. Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.

Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a. Déterminons l'angle et le rapport de S.

$$\left.\begin{array}{l}S(B)=E\\S(O)=O\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Mes}\overline{(\overline{OB},\overrightarrow{OE})}=\theta$$

On sait que $R_{\left(O;\frac{\pi}{3}|\right)}(A)=E\Rightarrow \mathrm{Mes}\overline{(\overline{OA};\overline{OE}]}=\frac{\pi}{3}$

Or le triangle ABC est rectangle en B d'où

$AB=AC\cdot\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow AB=\frac{1}{2}AC\Rightarrow AB=AE.$

Donc ABE est un triangle équilatéral.

La médiatrice de $[AE]$ passe par H,B et O

D'où

$$Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}\right)=Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OH}\right)+Mes\left(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OE}\right)=2Mes\left(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OE}\right)=2Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{Mes}\,\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Mes}\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})} = \dfrac{\pi}{6}$

Donc l'angle de la similitude S est $\theta = \frac{\pi}{6}$

Déterminons le rapport k de la similitude S

$\left.\begin{matrix} S(B) = E \\ S(O) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow OE = kOB \Rightarrow k = \dfrac{OE}{OB}$

Les triangles OAE et ABE sont équilatéraux d'où $OE = OA = AE$

$\mathrm{OB} = 2\mathrm{OH}$ et $OH = OA \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

Donc $k = \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{2OA\cos\frac{\pi}{6}} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. Démontrons que $S(A) = J$.

Montrons que $\mathrm{Mes}\overline{(\mathrm{OA};\mathrm{OJ}} = \frac{\pi}{6}$ et $k = \frac{OJ}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

J est le centre du cercle circonscrit au triangle OAE ; or OAE est un triangle équilatéral ; donc I est l'intersection des angles:

$\mathrm{Mes}(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{6}$ car $J \in (OB)$

F point d'intersection de la demi-droite $[EJ]$ avec $[OA]$.

Donc F est le milieu de $[OA] \Rightarrow OF = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OJ\cos\frac{\pi}{6}$

$OF = \frac{\sqrt{3}}{3}OJ$ et $OF = \frac{1}{2}OA$ donc $k = \frac{OJ}{OA} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}OA}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

En conclusion: $\mathrm{S(A) = J}$.

3. Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$

a. Construisons les points $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ pour $k = \frac{3}{2}$ (Voir figure)

b. Démontrons que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $(\mathrm{k}-1)$ et $(-\mathrm{k})$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. En introduisant le point M, on a: $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k(\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}})$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} + k\overrightarrow{\mathrm{MB}} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \mathrm{k}\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0}$

d'où $(k-1)\overrightarrow{\mathrm{MA}} - k\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0}$

Donc

$\mathrm{M} = \mathrm{bar}$

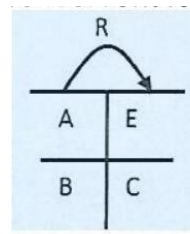
A	B
$k-1$	$-k$

c. Démontrons que $r(M) = M'$ et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

La rotation et les similitudes conservent les barycentres

$\mathrm{M} = \mathrm{bar}$

A	B
$k-1$	$-k$



D'où l'image de M sera le barycentre de l'image de A et B par R.

Donc $R(M) = M'$ avec $M' =$ bar

E	C
$k-1$	$-k$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \text{et Mes } (\overline{\overline{OM; OM'}}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

D'où le triangle OMM' est un triangle isocèle de sommet O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Donc le triangle OMM' est équilatéral.

d. Démontrons que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

$-M' \in [AE)$ et le triangle OAE est équilatéral donc Mes $(\overline{\overline{AO}; \overline{AM}}] = -\frac{\pi}{3}$.

- le triangle OMM' est équilatéral donc $\mathrm{Mes}\overline{(\overline{MO}; \overline{MM'})} = -\frac{\pi}{3}$

Au total $2\mathrm{Mes}\overline{(\overline{AO}; \overline{AM})} = 2\mathrm{Mes}\overline{(\overline{MO}; \overline{MM})}$ donc les points $\mathrm{O}; \mathrm{A}; \mathrm{M}$ et M'sont cycliques.

4. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a. Démontrons que $S(M) = N$.

$S(M) = N \Rightarrow \mathrm{Mes}\overline{(\mathrm{OM}; \overline{ON}} = \theta$ et $k = \frac{ON}{OM}$

Calculons θ et k

- N est le centre du cercle circonscrit au triangle OMM' équilatéral

D'où N appartient aux bissectrices des angles du triangle OMM'.

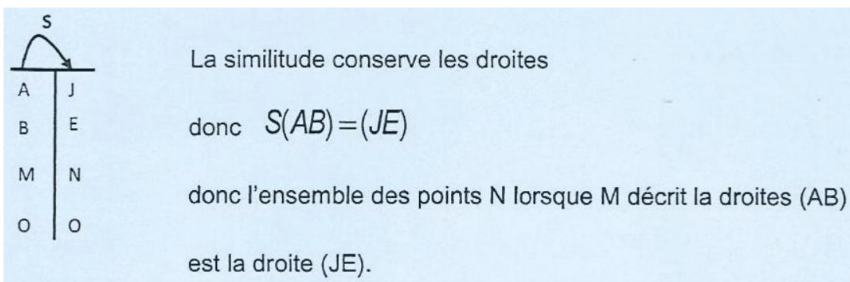
D'où Mes $\overline{\overline{OM};\overline{ON}} = \frac{\pi}{6}$ Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$

- K milieu de $[OM] \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OM$ et $OK = ON\cos\frac{\pi}{6}$

$OK = \frac{\sqrt{3}}{2}ON$ d'où $\frac{\sqrt{3}}{2}ON = \frac{1}{2}OM$

Donc $k = \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{\sqrt{3ON}} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

En conclusion : $\mathrm{S(M) = N}$.
b. Déterminons l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).


S

A	J
B	E
M	N
O	O

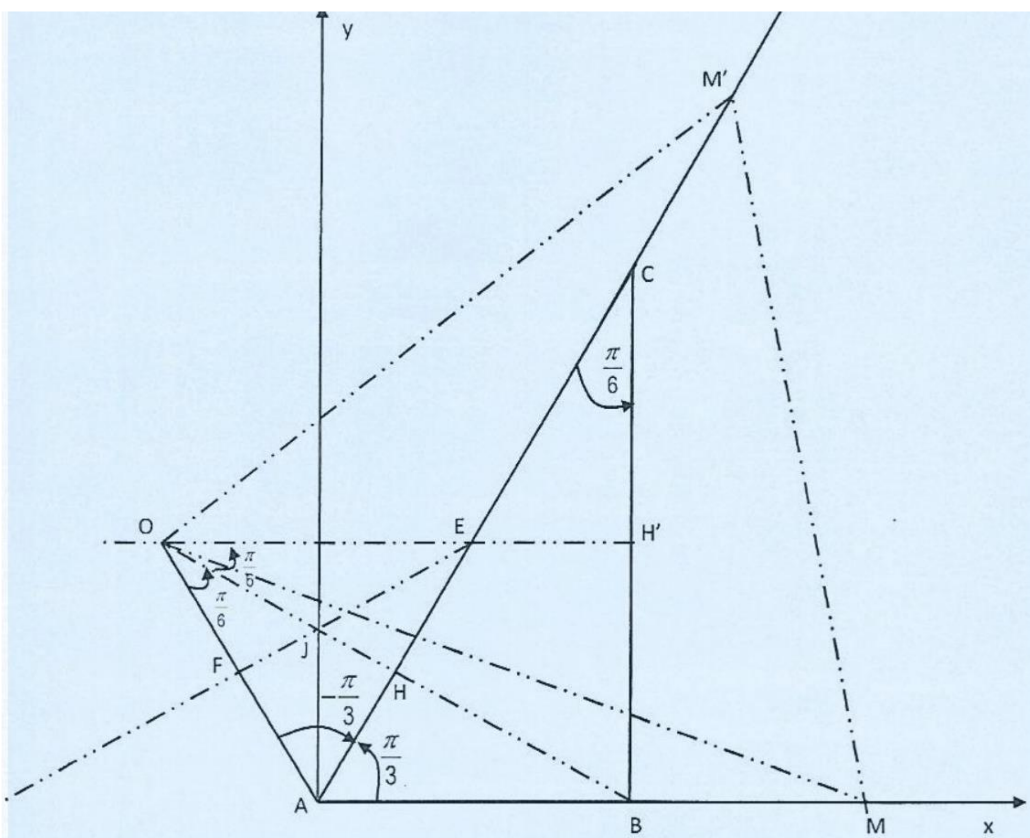
La similitude conserve les droites

donc $S(AB)=(JE)$

donc l'ensemble des points N lorsque M décrit la droites (AB)

est la droite (JE).

Figure



PROBLEME

PARTIE A

1. Calculons les limites de f en -1 et en 1 .

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On a: $\lim_{x\to-1} \frac{1+x}{1-x} = 0$ et $\lim_{X\to0} \ln X = -\infty$

Donc $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On a : $\lim_{x\to1} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln X = +\infty$

Interprétons graphiquement les résultats obtenus.

On a : $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C).

On a : $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $\mathrm{x} = 1$ est asymptote verticale à (C).

2. a. Démontrons que : $\forall x \in]-1;1\left[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\right.$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{1}{2}\times\frac{\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\times\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

D'où $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

b. En déduisons le tableau de variation de f.

$\forall x \in]-1;1[, 1-x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

X	-1		1
f'(x)		+	
f(x)	-∞	↗	+∞

c. Déterminons une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(0) = \frac{1}{1-0^2} = 1$

Donc $(\mathrm{T}): y = x$

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $g(x) = f(x) - x$

a. Déterminons le sens de variation de g.

$g(x) = f(x) - x$

$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

$\forall x \in]-1;1[,\ g'(x) > 0$

Donc g est strictement croissante sur $]-1;1[$

b. Calculons $g(0)$ et en déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(0) = f(0) - 0 \Rightarrow g(0) = 0$

- signe de $g(x)$

$\forall x \in]-1;1[, g$ est continue et strictement croissante sur] - $1;1$ [et $g(0) = 0$

Donc $\begin{cases} \forall x \in]-1;0[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]0;1[, & g(x) > 0 \end{cases}$

c. Déterminons la position de (C) par rapport à (T).

On a : $f(x) - y = f(x) - x$ or $g(x) = f(x) - x$

Donc $\forall x \in]-1;0[, f(x) - x < 0$ d'où $\forall x \in]-1;0[, f(x) < x$

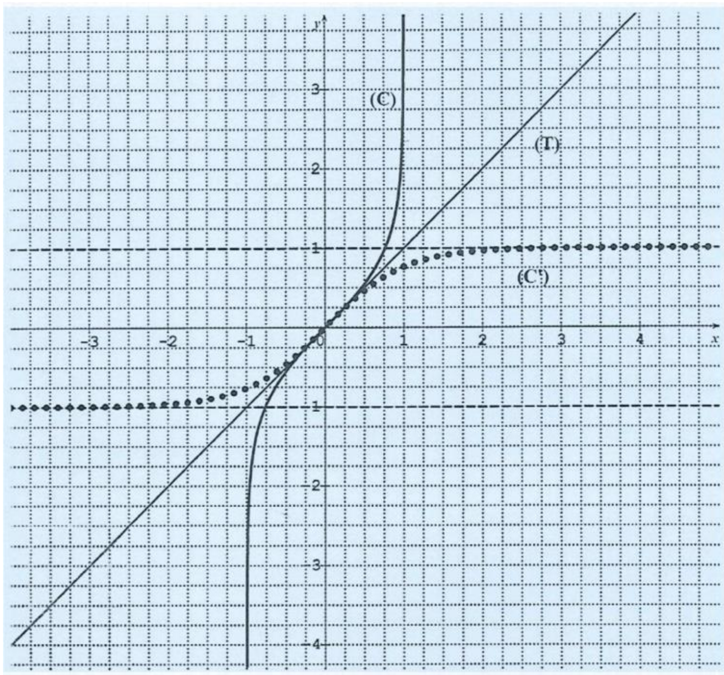
Donc (C) est en dessous de (T) sur] $-1;0$[.

$\forall x \in]0;1[,\ f(x) - x > 0$ d'où $f(x) > x$

Donc (C) est au dessus de (T) sur $]0;1[$.

Pour $x = 0$, (C) et (T) se coupent.

4. Construisons, dans le même repère, (C) et (T).



5.

a. Démontrons que f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$. f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$; elle réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $f(|-1;1|) = |\lim_{x\to-1} f(x); \lim_{x\to1} f(x)| = \mathbb{R}$

b. Construisons (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Pour construire (C'), on trace la droite d'équation $y = x$, puis on cherche le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$. (voir figure ci-dessus)

c. Démontrons que: $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = x \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y$

$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \Rightarrow 1 + x = (1-x)e^{2y} \Rightarrow 1 + x = e^{2y} - xe^{2y}$

$\Rightarrow x + xe^{2y} = e^{2y} - 1 \Rightarrow x(1 + e^{2y}) = e^{2y} - 1$

$$\Rightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

PARTIE B

1. Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à déterminer (x)),

a. Démontrons que $\phi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xf'(x)$ sur

$]-1;1[$.

Dérivons $\phi \circ f$

$(\phi \circ f)'(x) = f'(x) \times \phi'(f(x))$

Or $\phi'(x) = f^{-1}(x)$

D'où $(\phi \circ f)'(x) = f'(x) \times f^{-1}(f(x))$

$(\phi \circ f)'(x) = f'(x).x$ car $f^{-1}(f(x)) = x$

Donc $(\phi \circ f)'(x) = x.f'(x)$

Au total $\phi \circ f$ est une primitive de $x \cdot f'(x)$ sur $]-1;1[$

b. Démontrons que pour tous éléments a et b de $]-1;1[$,

$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi \circ f(b) - \phi \circ f(a)$

On a: $\phi'(x) = f^{-1}(x)$

D'où $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} \phi'(t)dt = [\phi(t)]_{f(a)}^{f(b)} = \phi(f(b)) - \phi(f(a))$

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi \circ f(b) - \phi \circ f(a)$
c. En déduisons que: $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

On a : $(\phi \circ f)'(x) = x \cdot f'(x)$

D'où $\int_a^b tf'(t)dt = \int_a^b (\phi \circ f) \cdot dt$

$\int_a^b f'(t)dt[\phi \circ f(t)]_a^b$

$\int_a^b f'(t)dt = \phi \circ f(b) - \phi \circ f(a)$

$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi \circ f(b) - \phi \circ f(a)$

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

d. Démontrons que pour tout élément x de $]-1;1\Big[: \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

On a : $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

Or $f(0) = 0$

Donc $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$ d'après B1. c

2. a. Démontrons que pour tout élément x de $]-1;1\Big[: \int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

$\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ d'après A2. a on a : $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

D'où : $\int_0^x tf'(t)dt = \int_0^x t\left(\frac{1}{1-t^2}\right)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt$

Posons $\mathrm{U} = 1 - \mathrm{t}^2$; On a $\begin{cases} \text{si } t = 0 & \Rightarrow \quad U = 1 \\ \text{si } t = x & \Rightarrow \quad U = 1 - x^2 \end{cases}$

D'où $d\mathrm{U} = -2tdt$

Donc $\frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{dU}{U}\right)$

Au total :

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^{1-x^2}\frac{dU}{U} = -\frac{1}{2}[\ln U]_1^{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln 1$$

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

b. En déduisons que, pour tout élément y de $\mathbb{R}, \int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ car $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = y.$

D'où $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

On sait que : $\int_0^y tf^{-1}(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Or: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$$\Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

D'où : $1 - x^2 = \frac{4}{(e^y+e^{-y})^2} \Leftrightarrow \ln(1-x^2) = \ln\left(\frac{4}{(e^y+e^{-y})^2}\right)$

Donc : $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

En conclusion : $\int_0^y f^{-1}(t) = \ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} = \mathbf{1}$.

Calculons A en unité d'aire.

$A = \int_0^1 f^{-1}(t)dt$.ua

$$A = \ln\left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2}\right) \cdot ua$$

4. a. Hachurons sur le graphique, l'ensemble D des points dont les cordonnées $(x; y)$,

vérifient: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ et $f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$

Il s'agit de la partie du plan comprise entre (C) et (C'), dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1 et dont l'ordonnée est comprise également entre 0 et 1 .

b. Calculons l'aire de D en cm^2.

$D = \int_0^1 (f(x) - f^{-1}(x))dx$.ua

$D = \int_0^1 f(x)dx.ua - \int_0^1 f^{-1}(x)dx.ua$

Or $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

Calculons $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\int_0^t f(x)dx = \lim_{t\to 1}\int_0^t f(x)dx$

$\int_0^t f(x)dx$ avec $t \in [0;1]$.

Posons: $U = f(x)$ et $V' = 1$

$U' = f'(x)$ et $V = x$

On a: $\int_0^t f(x)dx = [xf(x))\Big]_0^t - \int_0^t xf'(x)dx = [xf(x)]_0^t + \frac{1}{2}\ln(1-t^2)$

D'où: $\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2}t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{1}{2}\ln(1-t^2)$

$$\lim_{x\to 1}\int_0^t f(x)dx = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}t\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right) = \ln 2$$

Car $\lim_{x\to 1}(1+t)\ln(1+t) = 2\ln 2$ et $\lim_{x\to 1}(\ldots\ldots 1 + \cdots..\ln(1+t) = 0$

On a: $\mathrm{D} = \left(\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f^{-1}(x)dx\right)$ u.a

D'où $\mathrm{D} = \left(\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right) + \ln 2\right)$ u. a

Au total : $D = \left(\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right) + \ln 2\right) \times 4\ \mathrm{cm}^2$

CORRECTION SESSION NORMALE 2006 Série C

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On pose :

$A = n^2 - 2n + 2; B = n^2 + 2n + 2$ et $d = pgcd(A, B)$

1. a. Démontrons que tout diviseur commun à A et n divise 2 .

On a : $A = n^2 - 2n + 2$

$A = n(n-2) + 2$

$2 = A - n(n-2)$

Soit $q \in \mathbb{Z}$

Si $q \mid A$ et $q \mid n$ alors $q|^2$

b. Démontrons que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.

$B = n^2 + 2n + 2 = n^2 + 2n + 2 - 2n + 2n = n^2 - 2n + 2 + 4n$

Soit $q \in \mathbb{Z}$

Si $q \mid A$ et $q \mid B$ alors $q \mid 4n$

2. On suppose que n est impair.

a. Démontrons que A et B sont impairs.

On a :

$$A = n^2 - 2n + 2 = (2k+1)^2 - (2k+1) + 2$$
$$A = 4k^2 + 4k + 1 - 4k - 2 + 2 = 4k^2 + 1$$
$$A = 2 \times 2k^2 + 1 = 2(2k^2) + 1$$

Alors A est impair.

$$B = n^2 + 2n + 2 = (2k+1) + 2(2k+1) + 2$$
$$B = 4k^2 + 8k + 5 = 2(2k^2 + 4k + 2)$$
$$B = 2(2k^2 + 4k + 2) + 1 = 2K + 1$$

Avec $K = 2k^2 + 4k + 2$ donc B est impair.

En déduisons que d est impair.

$d = PGCD(A; B) \Rightarrow \frac{A}{d}$ et $\frac{B}{d}$ sont premiers entre eux donc d qui les divise sera impair.

b. Démontrons que d divise n.

$d = PGCD(A;B)$ d'où $d \mid A \Rightarrow A = kd$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En déduisons que divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

$n^2 - 2n + 2 = kd$

$n(n-2) + 2 = kd$

Donc d divise n

On a : $n(n-2) = kd$

D divise n et d divise 2 car d est impair et A et B sont premiers entre eux.

3. On suppose que n est pair.

a. Démontrons que 4 ne divise pas A.

n est pair d'où: $n = 2k$ avec $\mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$

$A = n^2 - 2n + 2$

$A = (2k)^2 - 2(2k) + 2$

$A = 4k^2 - 4k + 2$

$A = 4(k^2 - k) + 2$

si $4 \mid A$ alors $4 \mid 2$ ce qui est absurde. Donc 4 ne divise pas A.

b. Démontrons que d est égal à $2\mathrm{p}$ où p est un nombre entier impair.

$A = 4k^2 - 4k + 2$ et $B = 4k^2 + 4k + 2$ avec $n = 2k$.

$d = PGCD(4k^2 - 4k + 2; 4k^2 + 4k + 2)$

$d = PGCD\big(2(2k^2 - 2k + 1); 2(2k^2 + 2k + 1)\big)$

$d = 2PGCD(2k^2 - 2k + 1; 2k^2 + 2k + 1)$

$d = 2PGCD(2(k^2 - k) + 1; 2(k^2 + k) + 1)$

$d = 2 \times \mathrm{p}$ où $p = PGCD(2(k^2 - k) + 1; 2(k^2 + k) + 1)$

$2(k^2 - k) + 1$ et $2(k^2 + k) + 1$ sont impairs donc p est un nombre impair.

En conclusion: $d = 2p$ où p est impair

c. Démontrons que p divise n. En déduisons que d est égal à 2 .

- D'après la question 1.b.,on a: $d \mid 4n$ or $d = 2p$

D'où $2p | 4n \Rightarrow p | 2n$ et p impair donc $p \mid n$.

- D'après la question 1.a., on a:

$\begin{cases} p \mid A \\ p \mid n \end{cases} \Rightarrow p \Big| \; 2$

or $d = 2p$ et p est impair d'où $p = 1$ donc $d = 2$

4. On remarque que:

$197 = 15^2 - 2 \times 15 + 2$

$257 = 15^2 + 2 \times 15 + 2$

avec $n = 15$ est impair.

D'après la question 2., les nombres 257 et 197 sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

On considère quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques sont non alignés.

1. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow D = \mathrm{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

$D = \mathrm{bar}\{(A,1);(B,-1):(C,1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$$

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

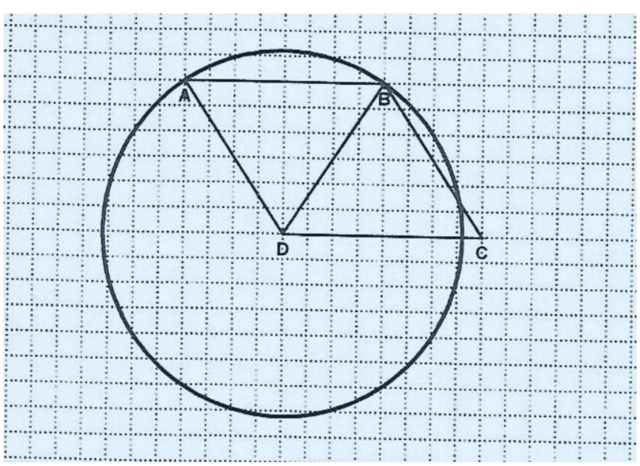
2. Déterminons puis construisons l'ensemble E_1 des points M du plan tels que:

$\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = BD$.

On a: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$

D'où: $\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = BD \Leftrightarrow \| \overrightarrow{MD} \| = BD \Leftrightarrow MD = BD$

Donc l'ensemble E_1 est le cercle de centre D et de rayon BD.



3. a. Démontrons que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$

On a: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2$

Calculons $DA^2; DB^2$ et DC^2

On a: $BC = AD$ et $AB = DC$ dans le rectangle.

D'après la propriété de Pythagore, si on considère le triangle BCD rectangle en C, On a: $DB^2 = DC^2 + BC^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow DC^2 + AD^2 - DB^2 = 0$

Donc: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$

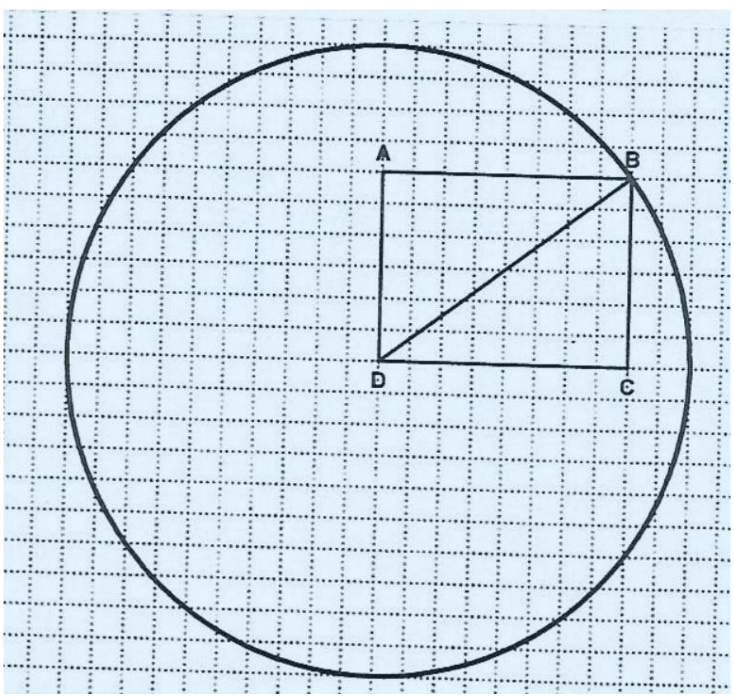
b. Déterminons puis construisons l'ensemble E_2 des points du plan tels que:

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

On a: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = MD^2$

D'où: $MD^2 = BD^2 \Rightarrow MD = BD$

Donc l'ensemble E_2 est le cercle de centre D et de rayon BD.



PROBLEME

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable et définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln|x| - \frac{x}{2}$

1. a. Démontrons que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$

- Si $x > 0$ alors $|x| = x$ et $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x} = \ln x - \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}$$

- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x} = \ln(-x) - \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$

b. Sens de variations de la fonction g

x	- ∞		-2		0		+∞∞
g(x)		−	0	+	‖	+	

$\forall x \in]-\infty; -2[,\ g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$

$\forall x \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[,\ g'(x) > 0$

g est donc strictement croissante sur $]-2; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation.

x	- ∞		-2		0		+∞
g'(x)		−	0	+	‖	+	
g(x)		↘	1+ln2	↗	‖	↗	

2. a. Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty; 0[$, g(x) admet un minimum relatif qui est $1 + \ln 2 > 0$;

donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; 0[$
$\forall x \in]0; +\infty[$, g est continue et strictemùent croissante sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $]1; +\infty[$. Elle realise donc une bijection de $]1; +\infty[$ dans $g(]1; +\infty[) =]-1; +\infty[$. Or $0 \in]-1; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; +\infty[$.

b. Démontrons que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; \alpha[, & g(x) < 0 \end{cases}$

- g est strictement décroissante sur] - α; 2 [.

On a : $g(]-\infty; -2[) =]1 + \ln 2; +\infty[$. D'où $g(x) > 0$

- g est strictement croissante sur]-2;0 [.

On a: $g(]-2: 0[) =]1 + \ln 2; +\infty[$. D'où $g(x) > 0$

- g est strictement croissante sur] 0 ; $+\infty$[.

On a: $g(]0; a[=]-\infty; 0[$. D'où $g(x) < 0$

- g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

On a: $g(]\alpha; +\infty[) =]0; +\infty[$. D'où $g(x) > 0$.

Au total, on a

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; \alpha[, & g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. a. Étudions la continuité de f en 0 .

$D_f = \mathbb{R}, f$ est définie en 0

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim_{x\to 0} (\ln|x|)^2 = +\infty$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim_{x\to 0} (\ln(-x))^2 = \lim_{X\to 0} (\ln(x))^2 = +\infty$

On a: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0 .
b. Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\propto$ puis donnons une interprétation graphique de chacun des résultats.

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{e^x + (\ln(-x))^2}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to -\infty} (\ln(-x))^2 = \lim_{X\to +\infty} (\ln(x))^2 = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{e^x + (\ln x)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{(\ln x)^2}{e^x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{(\ln x)^2}{e^x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{|\ln x|^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\ln x|^2}{x^2} \times \frac{x^2}{e^x} = 0$

Interprétation:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ 。

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2. a. Étudions la dérivabilité de f en 0 .

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{e^x}{e^x+(\ln|x|)^2}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x}{x(e^x+(\ln x)^2)} = \lim_{x\to0} \frac{e^x}{xe^x+x(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to0} e^x = 1; \lim_{x\to0} xe^x = 0$$

$$\text{et } \lim_{x\to0} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to0} (\sqrt{x}\ln x)^2 = 0$$

On a : $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 .

La courbe (C) admet donc une tangente verticale au point $O(0;0)$.

b. Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrons que: $f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2}$ avec $\varphi(x) = e^x \ln|x|$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+(\ln|x|)^2}\right)' = \frac{e^x(e^x+(\ln|x|)^2)-e^x(e^x+{}^2\ln|x|)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(\ln|x|)^2-x^2\ln|x|)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2} = \frac{e^x\ln|x|\left(\ln|x|-\frac{2}{x}\right)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2}$$

$f'(x) = \varphi(x)g(x)$ avec $\varphi(x) = e^x\ln|x|$ et $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x}$

$|e^x + (\ln|x|)^2|^2$

c. Démontrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+4e^{-\alpha}}$

$f(\alpha) = \frac{e^\alpha}{e^\alpha+(\ln|\alpha|)^2}$ or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln|\alpha| - \frac{2}{\alpha} = 0 \Rightarrow \ln|\alpha| = \frac{2}{\alpha}$

D'out: $f(\alpha) = \frac{e^\alpha}{e^\alpha+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha\left(1+e^{-\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\right)} = \frac{1}{1+e^{-\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2}$

$f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^4e^{-\alpha}} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+4e^{-\alpha}}$

En déduisons que : $0 \leq f(\alpha) \leq 1$.

On a: $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2e^{-\alpha}}$

Or $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} < 1 \Rightarrow \frac{4}{\alpha^2} < 4$

Et $\alpha > 1 \Rightarrow -\alpha < -1 \Rightarrow e^{-\alpha} < e^{-1}$

Les relations (1) et (2) donnent $\frac{4}{\alpha^2} < 4$ et $e^{-\alpha} < e^{-1}$

D'où $\frac{4}{\alpha^2}e^{-\alpha} < 4e^{-1} \Rightarrow 1 + \frac{4}{\alpha^2}e^{-\alpha} < 1 + 4e^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{4}{\alpha^2}e^{-\alpha}} > \frac{1}{1+4e^{-1}}$ donc $1 \geq f(\alpha) \geq 0$

d. Déterminons le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

$f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2}$ or $(e^x + (\ln|x|)^2)^2 > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x) \cdot g(x)$

On a: $\varphi(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot \ln|x| = 0$

$e^x > 0$ et $\ln|x| = 0 \Rightarrow \ln|x| = \ln 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Tableau de signe

X	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$g(x)$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$(e^x + (\ln\|x\|)^2)^2$		+	|	+	|	+	|	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	-	||	+	0	-	0	+	

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]\alpha;+\infty[, & f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-1;0[\cup]1;\alpha[. & f'(x) < 0 \end{cases}$

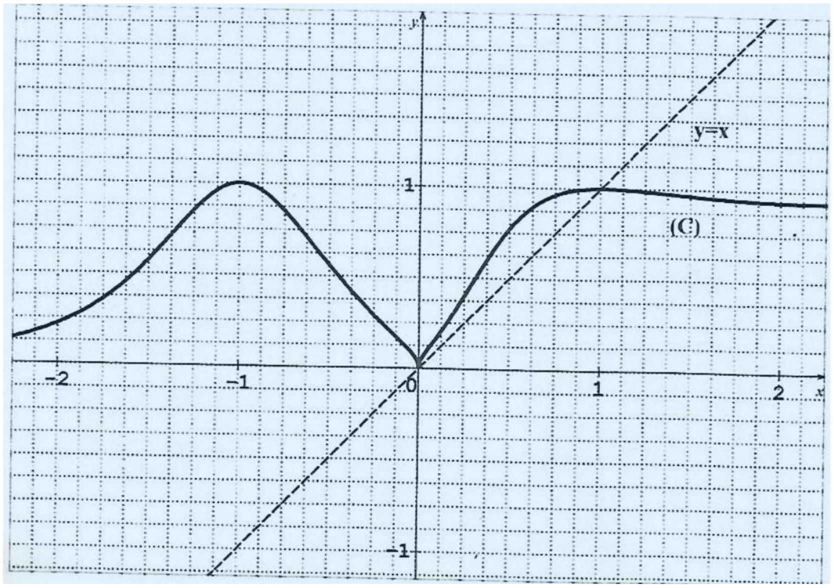
En déduisons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	1

3. Démontrons que: $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.

En observant le tableau de variation, on constate que f admet un maximum qui est 1 et un minimum qui est 0 . Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$

4. Tracé de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe (C).



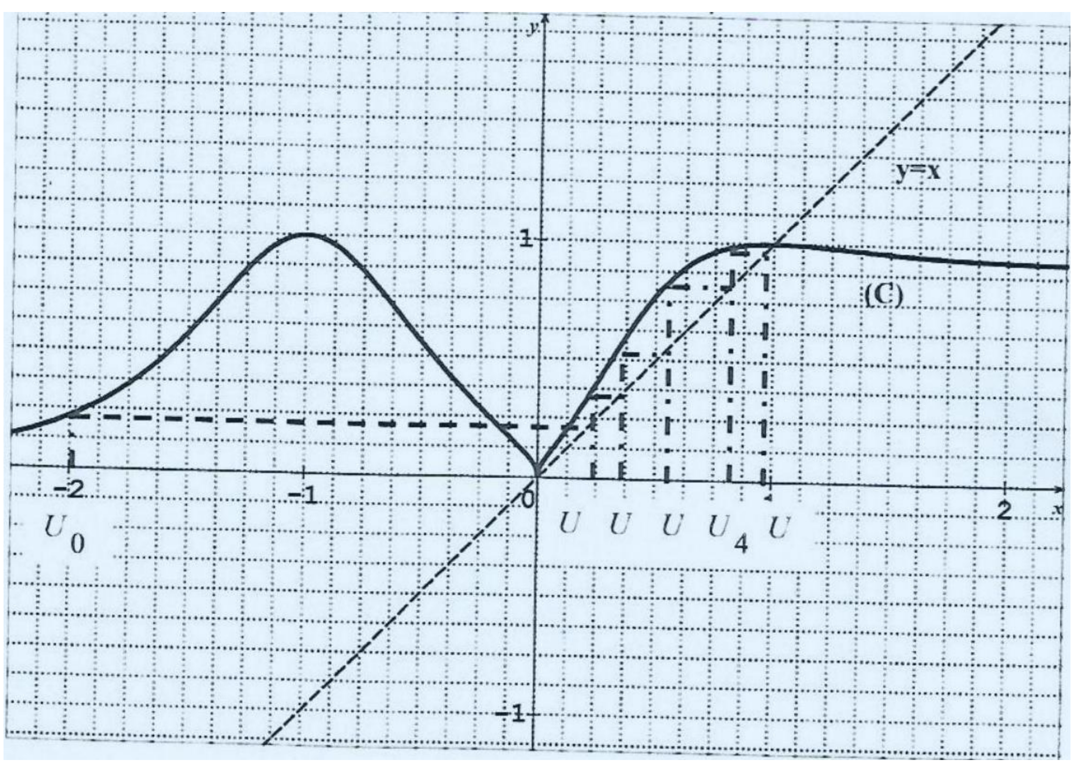
PARTIE C

1. Vérifions que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+(\ln|x|)^2}$ or $x = U_n \Rightarrow f(U_n) = \frac{e^{U_n}}{e^{U_n}+(\ln|U_n|)^2}$

or $U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{e^{U_n}+(\ln|U_n|)^2}$ donc $U_{n+1} = f(U_n)$

2. A l'aide de (C), représentons U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sur l'axe des abscisses.



3. Démontrons que pour tout entier naturel non nul $n, U_n \in [0;1]$

On a: $0 \leq f(x) \leq 1$ d'où $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

donc $U_{n+1} \in |0;1|$

Au total, comme (U_n) est une suite donc $U_n \in [0;1]$

4. a. Démontrons par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$U_0 \leq U_1$

On suppose que: $\forall k \in \mathbb{N}, U_{k-1} \leq U_k$

f étant croissante sur $[0;1$ |, $f(U_{k-1}) \leq f(U_k) \Rightarrow U_k \leq U_{k+1}$ donc (U_n) est strictement croissante.

b. Démontrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc (U_n) est convergente.

c. Démontrons que la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1 .

On a: $U_n \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+x} U_n = 1$

CORRECTION SESSION NORMALE 2005 Série C

EXERCICE 1

1. a) Construction des points G_1 et G_2.

G_1 est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3) \Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

G_2 est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Pour la construction, voir figure.

b. Ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9M^2 = 0$.

$\Rightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MA}})^2 - (3\overrightarrow{\mathrm{MB}})^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MB}})(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MB}}) = 0$

Or $\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} = -2\overrightarrow{\mathrm{MG2}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MG}}$

Donc on a: $(-2\overrightarrow{\mathrm{MG}}2)(4\overrightarrow{\mathrm{MG}}1) = 0 \Rightarrow -8\overrightarrow{\mathrm{MG}}1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{MG}}2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{MG}}1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{MG}}2 = 0$

Conclusion : l'ensemble (Γ) des points M est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

c. Construction de l'ensemble (E) des points M du plan tels que Mes $\left(\overline{\overline{\mathrm{MA}}, \overline{\mathrm{MB}}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

L'ensemble (E) des points M du plan tels que Mes $\left(\overline{\overline{\mathrm{MA}}, \overline{\mathrm{MB}}}\right) = \frac{\pi}{3}$ est l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ privé des points A et B. (voir figure)

2. a. Construction des points C et D.

$$R_{\left|\Lambda;\frac{2\pi}{3}\right|}(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ Mes\overline{(\overline{AB}, \overline{AC})} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$h_{\left|A;\frac{2}{3}\right|}(B) = D \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

Voir figure pour la construction.

b. Calculons le rapport de S.

$$S(A) = B \text{ ct } S(C) = D \Leftrightarrow \begin{cases} BD = kAC \\ \mathrm{Mes}\overline{(\overline{AC}, \overline{BD})} = \theta \end{cases}$$

On $a: k = \frac{BD}{AC}$ or $AC = AB$

et $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Rightarrow \mathrm{BD} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}$

Donc $k = \frac{\frac{1}{3}AB}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

c) Justifions qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$

$\theta = \text{Mes}(\overline{\text{AC}, \text{BD}}) = \text{Mes}\left(\overline{\text{AC}, \overline{\text{AB}}}\right) + \text{Mes}(\overline{\text{AB}, \text{BD}}) = \text{Mes}(\overline{\text{AC}, \text{AB}}) + \text{Mes}\left(\widehat{-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right)$

$\theta = \text{Mes}(\overline{\overline{\text{AC}}, \overline{\text{AB}}}) + \pi + \text{Mes}(\overline{\overline{\text{BA}}, \overline{\text{BD}}}) = -\frac{2\pi}{3} + \pi + 0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Conclusion : une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.

3. On note Ω le centre de S.

a. Démontrons que Ω appartient à (Γ) et (E) et plaçons Ω.

$$S(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega B = \dfrac{1}{3}\Omega A \\ \text{Mes}\,\overline{\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Or (E): $\text{Mes}\left(\overline{\overline{MA}, \overline{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

Si $\Omega = M$ on a : $\text{Mes}\,\overline{\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}}) = \frac{\pi}{3}$ donc $\Omega \in (E)$

(Γ) : $MA^2 - 9MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA = 3MB \Leftrightarrow MB = \frac{1}{3}MA$

Si $\text{M} = \Omega$, on a : $\Omega\text{B} = \frac{1}{3}\Omega\text{A}$ donc $\Omega \in (\Gamma)$

b. Démontrons que Mes $\overline{(\text{AC}, \text{AD})} = \frac{-2\pi}{3}$.

On a: $\text{Mes}(\overline{\overline{AC}, \overline{AD}}) = \text{Mes}(\overline{\overline{AC}, \overline{AB}}) \Rightarrow \text{Mes}(\overline{\overline{AC}, \overline{AB}}) = -\frac{2\pi}{3}$

c. Déduisons que les points $\text{A}, \text{C}, \text{D}$ et Ω appartiennent à un même cercle ($\mathcal{C}$).

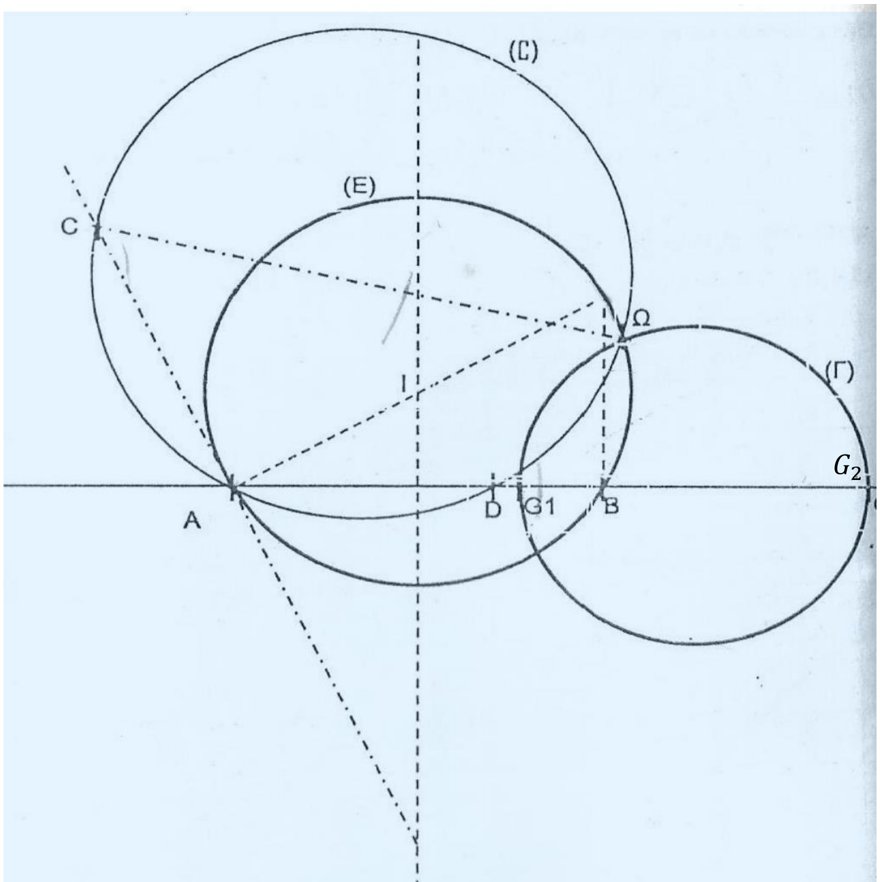
$\text{S(A)} = \text{B} \Leftrightarrow \text{Mes}\,\overline{\overline{\Omega\text{A}}, \overline{\Omega\text{B}}}) = \dfrac{\pi}{3}$

$\text{S(C)} = \text{D} \Leftrightarrow \text{Mes}\left(\overline{\overline{\Omega C}, \overline{\Omega\text{D}}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

D'où $2\text{Mes}\left(\overline{\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}}\right) = 2\text{Mes}\left(\overline{\overline{\Omega C}, \overline{\Omega D}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Comme A, C et D sont non alignés alors les points A, C, D et Ω sont cocycliques.

Construction de $(\mathcal{C})$.



EXERCICE 2

1. Calculons la probabilité pour qu'il touche sa cible :

a) cinq fois ?

La probabilité pour que le tireur touché sa cible est 0,7 .

La probabilité pour que le tireur ne touche pas sa cible est $1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Epreuve de Bernoulli et loi binomiale

La probabilité pour qu'il touche sa cible cinq fois est $p_1 = (0{,}7)^5 = 0{,}16807$

b) exactement deux fois ?

La probabilité pour qu'il touche sa cible exactement deux fois est :

$p_2 = C_5^2 0,7^2 0,3^3 = 10 \times 0,7^2 \times 0,3^3 = 0{,}343.$

c) au moins une fois ?

La probabilité pour qu'il touche sa cible au moins une fois est :
$= \mathrm{C}_5^1 0,7^1 0,3^4 + \mathrm{C}_5$

$C_5^2 0,7^2 0,3^3 + C_5^3 0,7^3 0,3^2 + C_5^4 0,7^4 0,3^1 + C_5^5 0,7^5$

Ou bien on détermine la probabilité de ne pas toucher la cible : $p' = (0,3)^5$.

Puis la probabilité de toucher au moins une fois est:

$p = 1 - p' = 1 - (0,3)^5 = 0,99757.$

2. Probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est $1 - (0,3)^n$.

La probabilité qu'il ne touche pas la cible n fois est : $p' = (0,3)^n$.

La probabilité pour qu'il touche la cible au moins un fois est : $p = 1 - p' = 1 - (0,3)^n$.

3. Le nombre de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois

$-(0,3)^n = 0,995 \Rightarrow (0,3)^n = 1 - 0,995 = 0,005 \Rightarrow \ln(0,3)^n = \ln(0,005)$

$$\Rightarrow \text{nn}(0,3) = \ln(0,005) \;\Rightarrow\; n = \frac{\ln(0,005)}{\ln(0,3)} = 4,4$$

Conclusion: le nombre de tirs au minimum est 4 .

Problème

Partie I: Etude de f

1. Soit Ψ la fonction dérivable sur R et définie par $\psi(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudions les variations de puis dressons son tableau de variation

'> Dérivée de $\Psi(x)$: $\Psi'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi'(x)$ est du signe de $1 + x$ car $e^x > 0$, donc on a

- $\forall x \in]$ - ;$-1[, \Psi'(x) < 0$ donc ψ est strictement décroissante.
- $\forall x \in]-1; +\infty[, \Psi'(x) > 0$ donc ψ est strictement croissante.

tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\Psi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Psi(x)$		$\searrow$	$1 - e^{-1}$	$\nearrow$	

b) Démontrons que pour tout nombre réel $x, \Psi(x) > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x)$ admet un minimum relatif qui est $1 - e^{-1} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) > 0$

c) Déduisons l'ensemble de définition de f.

$$f(x) = \frac{x}{1 + xe^x} = \frac{x}{\Psi(x)}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. Soit φ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\varphi(x) = 1 - x^2 e^x$.

a) Calculons les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim_{x \to \infty} (1 - x^2 e^x) = 1$ car $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$

$\mathbf{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - x^2 e^x\right) = -\infty}$ car $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty}$

b) Etudions les variations de φ puis dressons son tableau de variation.
$\varphi(x) = 1 - x^2 e^x \Rightarrow \varphi'(x) = -(2xe^x + x^2 e^x) = -2xe^x - x^2 e^x) = xe^x(-2 - x)$

- Tableau de signe de φ'

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$-2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[\varphi'(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante.
- $\forall x \in]-2; 0[, \varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante.

1. Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c) Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution comprise entre 0,7 et 0,71 .

$\forall x \in]0; +\infty[\varphi$ est continue strictement décroissante.

Elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $f(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$

Or 0ϵ] - ∞; 1 , donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

$\varphi(0{,}7) = 1 - (0{,}7)^2 e^{0.7} = 0{,}01326$

$\varphi(0{,}71) = 1 - (0{,}71)^2 e^{0{,}71} = -0{,}02533$

On a : $\varphi(0{,}71) \times \varphi(0{,}7) < 0$ donc $a \in]0{,}7; 0{,}71[$

d) Signe de φ.

On a $\varphi(\alpha) = 0$, comme φ est strictement décroissante sur $]0; +[$ alors :

Si $x \in]0; a[, \varphi(0) > \varphi(a)$ donc $\varphi(x) > 0$

Si $x \in]\alpha; +\infty[, \varphi(x) < 0$

En conclusion :

- $\forall x \in] -\infty; a[, \varphi(x) > 0,$
- $\forall x \in]a; +\infty[, \varphi(x) < 0,$

3. On admet que f est dérivable sur R.

a) Démontrons que: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$.

$$f(x) = \frac{x}{1 + xe^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 + xe^x) - (e^x + xe^x)x}{(1 + xe^x)^2} = \frac{1 + xe^x - xe^x - x^2e^x}{(1 + xe^x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2e^x}{(1 + xe^x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1 + xe^x)^2}$$

b) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+xe^x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty}(1 + xe^x) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\frac{1}{x} + e^x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + e^x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

c) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$>$ $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x) \mathrm{car} (1 + xe^x)^2 > 0$ donc :

- $\forall x \in] -\infty; a[f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.
- $\forall x \in]a; +\infty 0[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) Démontrons que (D) est asymptote à ($\mathcal{C}$) en - ∞.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1 + xe^x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1 + x - x - x^2e^x}{1 + xe^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1 - x^2e^x}{1 + xe^x} = 0$$

car $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à ($\mathcal{C}$) en - ∞

b) Etudions la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D)

$$f(x) - y = \frac{1 - x^2e^x}{1 + xe^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + xe^x = \psi(x) > 0$ donc $f(x) - y$ est du signe de $-x^2e^x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - y < 0 \Rightarrow f(x) < y$ doric ($\mathcal{C}$) en dessous de (D)

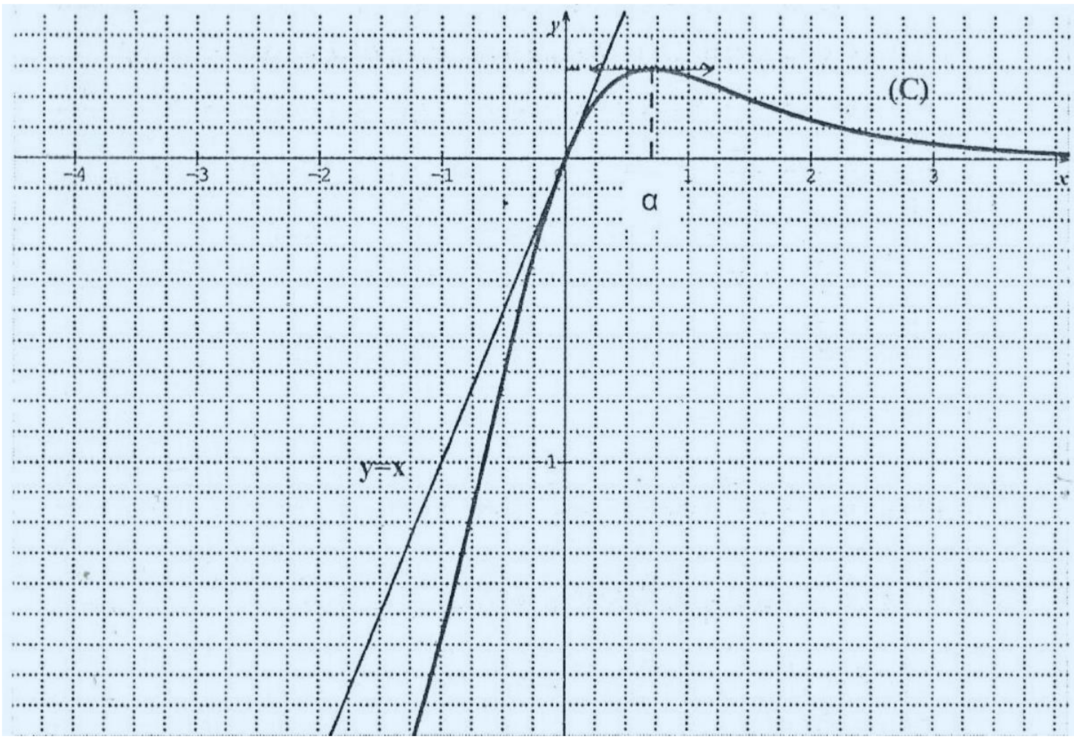
c) Démontrons que la droite (D) est tangente à ($\mathcal{C}_)$) au point d'abscisse 0 .

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ or } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+xe^x} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1+0\times e^0} = 0 \\ f'(x) = \frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1-0^2\times e^0}{(1+0xe^0)^2} = 1 \end{cases}$$

Donc $y = 1(x - 0) + 0 \Rightarrow y = x$.

En conclusion, la droite (D) est tangente à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 0

d) Traçons (D) et ($\mathcal{C}$)



Partie II: **Etude d'une suite**

1. a) Donnons une interprétation graphique sans calculer I_1.

$I_n = \int_1^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt \Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+te^t}dt = \int_0^1 f(t)dt$ avec $f(t) = \frac{t}{1+te^t}$

Or f est continue et positive sur $[0;1]$ donc l_1 est l'aire de la partie du plan délimitée par

(ɣ), l'axe (OI) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

b) Démontrons que la suite $(I_n)_{n\in N}$ est décrolssante.

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt \Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+te^t}dt$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+te^t}dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t}dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+te^t} - \frac{t^n}{1+te^t}\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+te^t}dt$$

On a $t \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$ et $\frac{t^n}{1+te^t} > 0$ donc $\frac{t^n(t-1)}{1+te^t} \leq 0$

On a $I_{n+1} - I_n \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite $(I_n)_{n\subset N}$ est décroissante.

c) Démontrons que la suite $(I_n)_{n\in N}$ converge.

On a $f(0)$ d'où I_n est décroissante et minorée par 0 donc la suite $(I_n)_{n\in N}$ converge.

2. a) Démontrons que : $\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{1+\mathrm{e}} \leq \frac{1}{1+\mathrm{te}} \leq 1$.

$\Psi(x) = 1 + xe^x$ donc Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^t \leq e^1 \Rightarrow 1 \leq e^t \leq e \Rightarrow 0 \times 1 \leq te^t \leq 1 \times e \Rightarrow 0 \leq te^t \leq e$

$\Rightarrow 0 + 1 \leq 1 + te^t \leq 1 + e \Rightarrow 1 \leq 1 + te^t \leq 1 + e \Rightarrow 1 \geq \dfrac{1}{1 + te^t} \geq \dfrac{1}{1 + e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1 + e} \leq \dfrac{1}{1 + e^t} \leq 1$

a) Déduisons que pour tout entier naturel $n, \frac{1}{(1+e)(n+1)} \leq \ln_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.

On a : $\frac{1}{14t} = \frac{1}{1+te^t} \leq 1$ et $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te} dt$

Donc $\frac{t^n}{1+e} \leq \frac{t^n}{1+te^t} \leq t^n$ car $t^n \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+e} dt \leq \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+e^1} dt \leq \int_0^1 t^n dt \Rightarrow \left[\dfrac{1}{1+e} \times \dfrac{t^{n+1}}{1+n}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\dfrac{t^{n+1}}{1+n}\right]_0^1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+e} \times \dfrac{1}{1+n} \leq I_n \leq \dfrac{1}{1+n} \Rightarrow \dfrac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n+1)}$

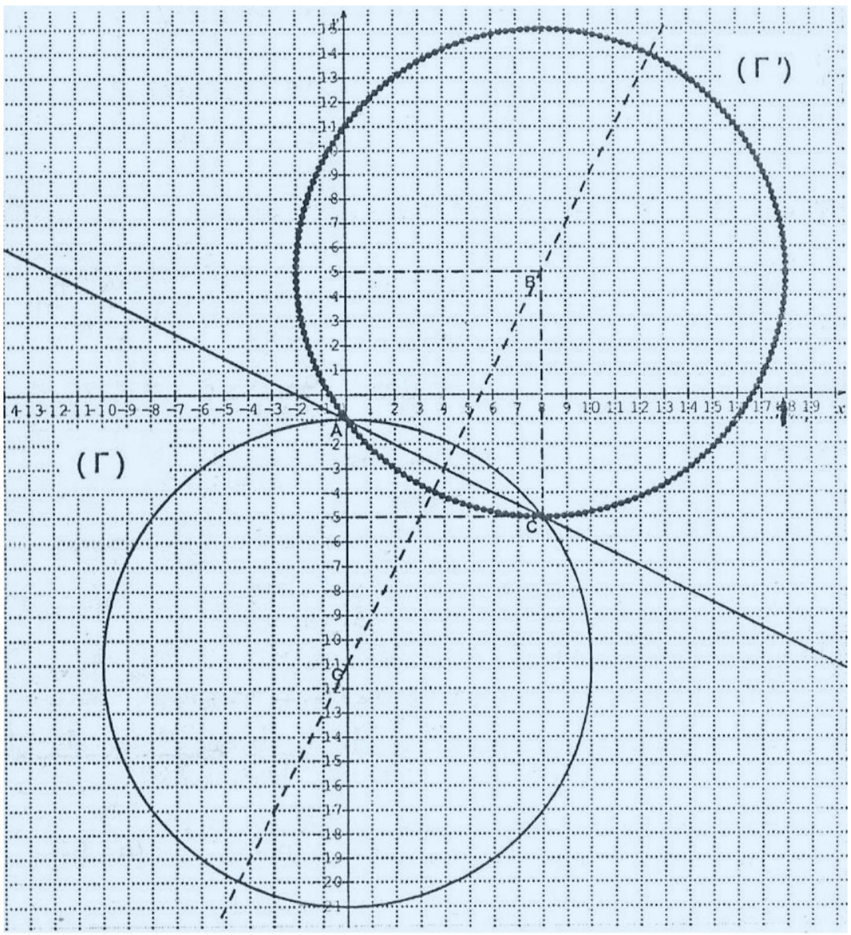
c) Déterminons la limite de $(i_n)_{n \in N}$.

$\lim_{x \to +\infty} I_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t} dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+n} = 0$ car $\frac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$

CORRECTION SESSION NORMALE 2004 Série C 2004

EXERCICE 1

1. Figure.



2. Démontrons que le triangle ABC est isocèle en B.

Calculons AB, AC et BC

$AB = |z_{AB}| = |z_B - z_A| = |8 + 5i + i| = |8 + 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$AC = |z_{AC}| = |z_C - z_A| = |8 - 5i + i| = |8 - 4i| = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$BC = |z_{BC}| = |z_C - z_B| = |8 - 5i - 8 - 5i| = |-10i| = \sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$

On remarque que : $AB = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B

3. Déterminons l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, -1), (B, 1)$ et $(C_1 - 1)$.

G est barycentre des points pondérés $(A, -1), (B, 1)$ et $(C, -1)$

Donc on a: $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$

$$AG' = BC \Rightarrow \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_G - x_A = x_C - x_B \Rightarrow x_G = x_C - x_B + x_A \\ y_G - y_A = y_C - y_B \Rightarrow y_G = y_C - y_B + y_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 8 - 8 + 0 = 0 \\ y_G = -5 - 5 - 1 = -11 \end{cases} \Rightarrow G(-11i)$$

4. Démontrons que: $\mathrm{GA} = \mathrm{GC}$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow AG^2 = BC^2 \Rightarrow AG = BC \Rightarrow AG = GA = 10$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow GC^2 = AB^2 \Rightarrow GC = AB \Rightarrow CG = 10$

En conclusion, $\mathrm{GA} = \mathrm{GC} = 10$

5. Considérons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20$

a) Démontrons que A et C appartiennent à (Γ)

$\Rightarrow$ Pour A, on a: $\mathrm{AA}^2 - A\ \mathrm{B}^2 + AC^2 = -\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = -10^2 + (4\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow AA^2 - AB^2 + AC^2 = -100 + 80 = -20$ Donc $A \in (\Gamma)$.

Pour C, on a: $\mathrm{CA}^2 - \mathrm{CB}^2 + \mathrm{CC}^2 = \mathrm{CA}^2 - \mathrm{CB}^2 = (4\sqrt{5})^2 - 10^2$

$\Rightarrow \mathrm{CA}^2 - \mathrm{CB}^2 + CC^2 = 80 - 100 = -20$ Donc $\mathrm{C} \in (\Gamma)$.

En conclusion, A et C appartiennent à (Γ).

b) Démontrons que (Γ) est le cercle de centre G et de rayon GA.

On a : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20$.

Or G est barycentre des points pondérés $(A,-1),(B,1)$ et $(C,-1)$; ce qui équivaut dire que G est aussi barycentre des points pondérés. $(A,1),(B,-1)$ et $(C,1)$.

Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G passant par A et C

D'où (Γ) est le cercie de centre G et de rayon GA.

Construction du symétrique (Γ') de (Γ) par rapport à (AC)

(Voir figure ci-dessus).

EXERCICE 2

1. Démontrons que la probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'Il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$.

- La probabilité pour qu'il réussisse un lancer donnée est $P_1 = \frac{2}{3}$.

> La probabilité pour qu'il échoue un lancer donnée est $q = \frac{1}{3}$.

> La probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est :
$p = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

2. Calculons la probabilité pour que Konaté réussisse deux sur les trois.

La probabilité pour que Konaté réussisse deux lancers sur les trois est :

$$\mathrm{p} = \mathrm{C}_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

3. Déterminons l'ensemble des variables aléatoires X.

Soit G le gain et P la perte

situation	GGG	PPP	GPG	GPP	GGP	PGP	PGG	PPG
gain	6	0	4	2	4	2	4	2

Donc $X = \{0; 2; 4; 6\}$.

4. Calculons la loi de probabilité X.

$$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}\ ;\ p(X = 2) = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{6}{27}$$

$$p(X = 4) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{27} = \frac{12}{27}; p(X = 6) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Donc la loi de probabilité de X est :

x_1	0	2	1	6	Total
$p(x = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

5. Démontrons que l'espérance mathématique de X est égale à 4 .

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{6}{27} + 4 \times \frac{12}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = \frac{108}{27} = 4$$

Donc, l'espérance mathématique de X est égale à 4

PROBLEME

Partie A

1. Calculons $f_n(0)$ et la limite de f_n en $+\infty$.

$* \ f_n(0) = e^{-n0^2} = e^0 = 1$

- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-nx^2} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}(-nx^2) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2. Calculons $f_n{}'(x)$ puis dressons le tableau de variation de f_n.

. Dérivée de $f_n(x)$: $f_n(x) = e^{-nx^2} \Rightarrow f_n'(x) = -2nxe^{-nx^2}$.

Signe de $f_n'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
- 2nx		+	0	−	
e^{-nx^2}		+	0	+	
$f_n'(x)$		+	0	−	

- Tableau de variation de f_n

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	1	↘	0

3. Encadrons $f_n(x)$ par deux entiers consécutifs.

D'après le tableau de variation, fn admet un maximum relatif qui est 1 et un minimum relatif 0 , donc on a : $0 \le f_n(x) \le 1$.

4. Démontrons que f_n " s'annule pour une unique valeur positive a_n égale à $\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

$f_n'(x) = -2nxe^{-nx^2} \Rightarrow f_n''(x) = -2ne^{-nx^2} - 2nx\left(-2nxe^{-nx^2}\right) \Rightarrow f_n''(x) = 2ne^{-nx^2}(-1 + 2nx^2)$

$f_n''(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2nx^2 = 0$ d'où $x^2 = \frac{1}{2n} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{2n}}$ car $2ne^{-nx^2} > 0$

$-\sqrt{\frac{1}{2n}} \notin [0; +\infty[$ donc $x = \sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Conclusion : la dérivée seconde f_n " de f_n s'annule pour $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

5. Soit A_n le point de ($\mathcal{C}$) d'abscisse a_n.

a) Equation de la tangente (T_n) à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point d'abscisse a_n

Pour (T_n), on $a: y = f_n{}'(a_n)(x - a_n) + f_n(a_n)$

$$y = f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

On a: $\begin{cases} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \\ f_n'a_n = f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

Donc, on a: $\begin{cases} y = -2n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)e^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{4n^2}{2ne}}x + \sqrt{\frac{4n^2}{4n^2e}} + e^{-\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}} \end{cases}$

b) Coordonnées du point fixe.

$$(T_n): y_1 = -\sqrt{\frac{2n}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$(T_{n+1}): y_2 = -\sqrt{\frac{2n+2}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

On $a: y_1 = y_2$ donc $x = 0$ et $y = \frac{2}{\sqrt{e}}$ donc $A\left(0; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ est le point fixe.

6. Soit h la fonction définie sur $\left[0; +\infty\right[par: h(x) = e^{-\pi x^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}$.

a) Calculons $h(a_n)$.

$$h(a_n) = h\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}} \times \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{2}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{2}{\sqrt{e}} \Rightarrow h(a_n) = 0$$

b) Trouvons le signe de $h'(x)$ et dressons le tableau de variation de h.

> Signe de $h'(x)$

Dérivée $h'(x)$ de $h: h'(x) = -2nxe^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}$

Dérivée $h''(x)$ de $h: h''(x) = -2ne^{-nx^2} - 2nx\left(-2nxe^{-nx^2}\right) = 2ne^{-nx^2} - 1 + 2nx^2$

On remarque que : $h''(x) = f_n{}''(x)$

Tableau de variation de h **'.**

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
h''(x)		−	0	+	
h'(x)		↘	1 0	↗	

Donc $\forall x \in [0; +\infty[\, , h'(x) > 0$

Tableau de variation de h

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
h'(x)		+	0	+	
h(x)	$1-\frac{2}{\sqrt{e}}$	↗	0	↗	$+\infty$

c) Position relative de (C_n) par rapport à (T_n).

$$h(x) = e^{-nx^2} + \sqrt{\frac{2n}{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}} = h_n(x) - y$$

$\forall x \in \left[1 - \frac{2}{\sqrt{e}}; \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[, h(x) < 0$ d'où $f_n(x) < y$ donc (C_n) est en dessous de (T_n).

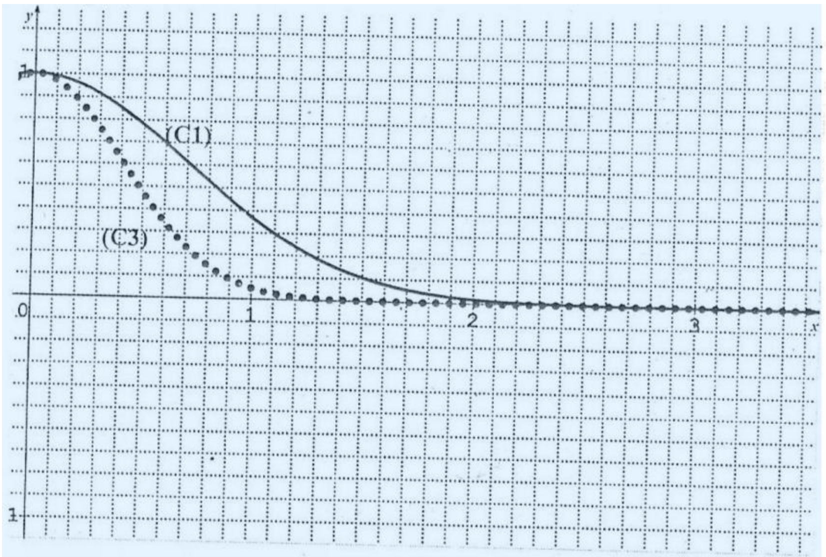
$\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2n}}; +\infty\right[$, $h(x) > 0$ d'où $f_n(x) > y$ donc $(\mathcal{C}_n)$ est au dessus de (T_n).

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}, h(x) = 0$ d'où $f_n(x) = y$ donc (C_n) coupe (T_n) au point $B\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}; 0\right)$.

7. Construction de (φ_1) et (φ_3).

(C_1): $f_1(x) = e^{-x^2}$

(C_3): $f_3(x) = e^{-3x^2}$



Partie

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. Etudions le sens de variation de la suite (U_n).

On a: $U_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$, donc $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)dx$

Or $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-(n+1)x^2} - e^{-nx^2} = e^{-nx^2}\left(e^{-x^2} - 1\right)$

Signe de $\mathrm{f}_{n+1}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$:

On a: $e^{-nx^2} > 0$ d'où $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est du signe de $e^{-x^2} - 1$

On a: $e^{-x^2} - 1 > 0 \Rightarrow e^{-x^2} > e^{\ln 1} \Rightarrow -x^2 > \ln 1 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$

Donc $Vx \in]-\infty; 0[, f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$

Au total, $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$ donc la suite (U_n) est décroissante
2. Démontrons que la suite (U_n) est convergente.

On a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$, d'où (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc (U_n) est convergente.

3. Démontrons que : $\int^{\frac{1}{n(n)}} e^{-nx^2}dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$.

On a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} f_n(x)dx \leq \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} dx \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2}dx \leq [x]_0^{\frac{1}{\ln(n)}} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nx^2}dx \leq \frac{1}{\ln(n)}$

4. Démontrons que : $\forall x \in \left[\frac{1}{\ln(n)};1\right], 0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

$$x \in \left[\frac{1}{\ln(n)};1\right] \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)^2} \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{\ln(n)^2} \leq nx^2 \leq n$$

$$\Rightarrow -n \leq -nx^2 \leq -\frac{n}{\ln(n)^2} \Rightarrow 0 \leq e^{-n} < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} \Rightarrow 0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$$

5. Démontrons que : $0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq \left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right)e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}$.

$$0 < e^{-nx^2} \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}dx \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq \left[e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}x\right]_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}\left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right) \Rightarrow 0 < \int_{\frac{1}{\ln(n)}}^{1} e^{-nx^2}dx \leq \left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right)e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}}.$$

6. Calculons la limite de la suite (U_n).

$\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln(n)}\right)e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-n}{(\ln(n))^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

CORRECTION SESSION NORMALE 2003 Série C

EXERCICE 1

1. Justifions que le nombre de dispositions possibles des 4 jetons est égal à 303605 .

Placer les 4 lettres du mot MATH sur ce damier de 25 cases est un arrangement des 4 parmi 25. Donc le nombre de dispositions possibles est :

$N = A_2{}_5^4 = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \Rightarrow N = 303600.$

2.

a) Probabilité pour que les 4 jetons soient disposés sur une même ligne.

Soit A l'événement:

$$p(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{5 \times A_5^4}{A_{25}^4} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{506}$$

b) Probabilité pour qu'on puisse lire le mot MATH sur une ligne ou une colonne.

Soit B l'événement :

$$p(B) = \frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_5^1 + C_5^1 \times C_5^1}{A_{25}^4} = \frac{5 \times 5 + 5 \times 5}{303600} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{6072}$$

3. Probabilité pour que deux jetons ne soient jamais placés sur une même ligne.

Soit C l'événement :

$$p(C) = \frac{25 \times 20 + 15 \times 10}{303600} \Rightarrow p(C) = \frac{125}{506}$$

4. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de jetons placés sur la première ligne. $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

a) Etablissons la loi de probabilité de X.

$$p(X = k) = \frac{C_4^k \times A_{20}^{4-k} \times A_5^k}{A_{25}^4}$$

x_i	0	1	2	3	4	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{969}{2530}$	$\frac{114}{253}$	$\frac{38}{253}$	$\frac{4}{253}$	$\frac{1}{2530}$	1

b) Démontrons que l'espérance mathématique de X est égale à 0,8 .

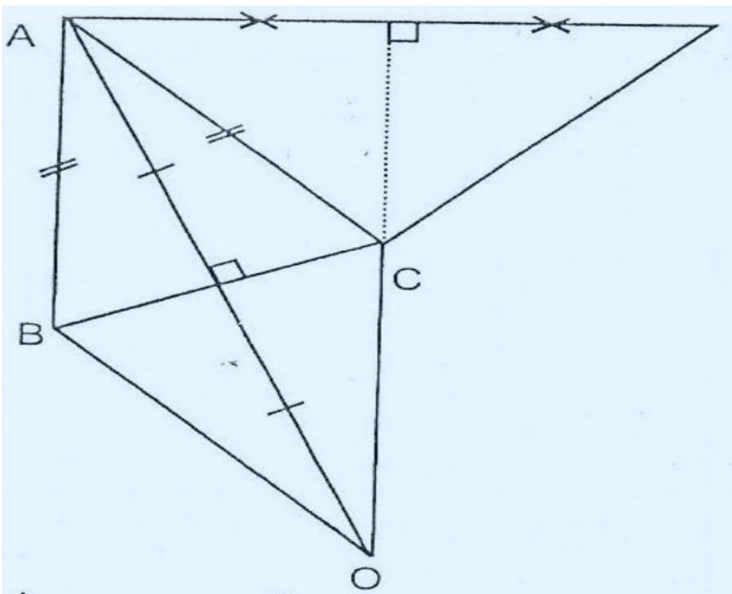
$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i p(X = x_i)$

$E(X) = 0 \times \frac{969}{2530} + 1 \times \frac{1140}{2530} + 2 \times \frac{380}{2530} + 3 \times \frac{40}{2530} + 4 \times \frac{1}{2530}$

$E(X) = \frac{2024}{2530} = \frac{4}{5} \Rightarrow E(X) = 0{,}8$

EXERCICE 2

1. Figure. On prendra $B = 5$ cm.



2. On pose $f = r_c \circ r_A$.

a) Déterminons les images respectives des points A et B par f.

$f(A) = r_C\ 0 r_\wedge(A) = r_A(A) = 1$

$f(B) = r_c \dot{\circ}\, r_A(B) = r_A(C) = C$

b) Démontrons que f est une rotation et précisons son angle.

On a $\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \neq 0$ donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. Démontrons que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{2}$.

$\text{Mes}(\overline{\overline{AB}, AI}) = \overline{(\overline{AB}, AC)} + ((\overline{\overline{AC}, \overline{Al}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Mes}(\overline{\overline{AB}, \overrightarrow{Al}}) = \frac{\pi}{2}$

4. On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

a) Démontrons que le quadrilatère $ABOC$ est un losange.

On a $BA = BO; CA = CO$ et $AB = AC$ donc $BO = OC = CA = AB$.

O est le symétrique de A par rapport à (BC) donc (AO) est perpendiculaire à (BC), En conclusion, $ABOC$ est un losange.

b) Démontrons que O appartient à la médiatrice du segment [AI].

On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{Al}$ sont orthogonaux. (OC) est donc la hauteur issue de C du triangle ACl isocèle en C. $\text{D}' \circ \text{Ou}(\text{OC}$) est la médiatrice de [AI].

5. Démontrons que O est le centre de la rotation f.

O appartient à la médiatrice de $[BC]$ et à la médiatrice de $[A]$]. D'autre part $f(A) = 1$ et $f(B) = C$ donc le centre de rotation f appartient aux médiatrice de $[A]]$ et $[BC]$.

D'où O est le centre de f.

PROBLEME

I. Etude de la fonction *f*

1.

a) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ef $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{-2x+1}$

Posons $x = -2x + 4$ donc $x = \frac{1}{2}x + 2$. Ainsi quand $x \to +\infty$ alors $x \to -\infty$.

On a: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-1 + \frac{1}{2}x\right) e^x = \lim_{x\to-\infty} \left(-e^x + \frac{1}{2}xe^x\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \text{Car } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^{-2x+4} = \lim_{x\to-\infty} (1-x) \times \lim_{x\to-\infty} e^{-2x+4} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} (1-x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$

Car: $: \lim_{x\to-\infty} (-2x+4) = \lim_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

b) Calculons : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)e^{-2x+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} \times \lim_{x\to-\infty} e^{-2x+4} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x+4} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

c) Interprétons graphiquement les résultats précédents.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction (OIJ).

2)

a) Calculons $f(x)$ et dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = (1-x)e^{-2x+4}$

donc $f'(x) = e^{-2x+4} - 2e^{-2x+1}(1-x) = e^{-2x+4}(-1-2+2x) = e^{-2x+4}(-3+2x)$

d'où $f'(x) = e^{-2x+4}(-3+2x)$.

$\forall x \in R, e^{-2x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-3+2x)$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{439}{323}$	$\nearrow$	0

b) Démontrons que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α dans $]1;\frac{5}{4}[$.

$\forall x \in]1;\frac{5}{4}[\subset]-\infty;\frac{3}{2}[$, f est continue et strictement décroissante; elle réalise une

bijection de $]1;\frac{5}{4}[$ dans $f(]1;\frac{5}{4}[) = \left]-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}};0\right[$.

Or $-1 \in]-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}};0[$ donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique $\alpha \in]1;\frac{5}{4}[$.

c) Démontrons que : $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{2^{\alpha}-4}$.

On a : $f(\alpha) = (1-\alpha)e^{-2\alpha+4}$

Or $f(\alpha) = -1$ d'où on a: $(1-\alpha)e^{-2a+4} = -1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2a+4} - \alpha\mathrm{e}^{-2a+4} = -1 \Leftrightarrow -\alpha\mathrm{e}^{-2a+4} = -1 - \mathrm{e}^{-2a+4}$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1-e^{-2a+4}}{-e^{-2a+4}}\frac{1}{e^{-2a+4}} + \frac{e^{-2a+4}}{e^{-2a+4}} = e^{-(-2a+4)} + 1 \Rightarrow a = 1 + e^{2a-4)}$$

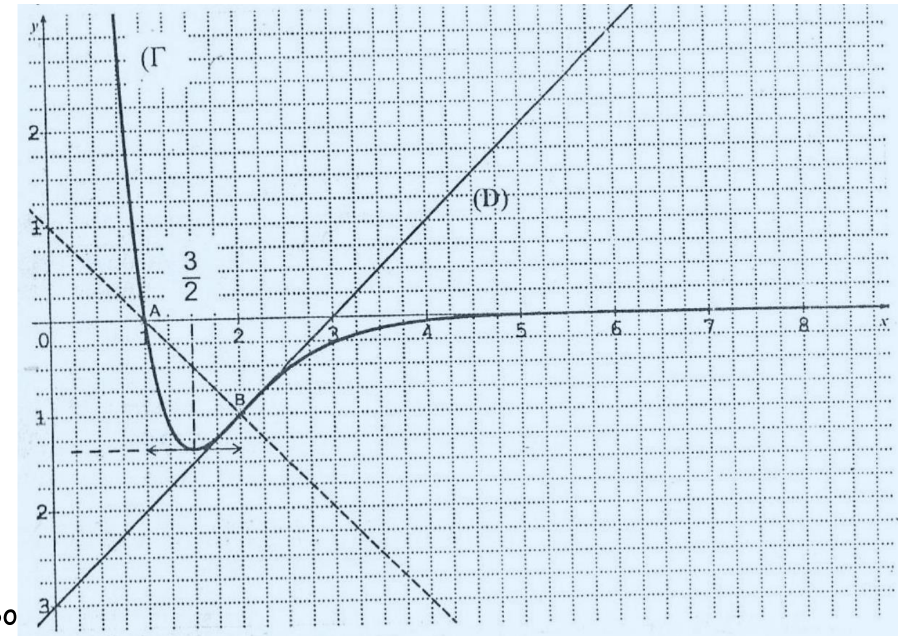
3. Soient A et B les points de Γ' d'abscisses respectives 1 et 2 .

a) Donnons une équation de la tangente (D) à Γ en B.

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$ avec $f(2) = (1-2)e^{-2\times2+4} = -1$ et $f'(2) = (-3+2\times2)e^{-2\times2+4} = 1$

donc (D): $y = x - 2 - 1 \Rightarrow y = x - 3$.

b) Traçons (D) et (Γ) sur l'intervalle $[0,5;+\infty[$.



4. So

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que:
$F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$. $F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x (1-t)e^{-2t+4}dt$

Posons: $\begin{matrix} U & =1-t & V' & =e^{-2t+4} \\ U' & =-1 & V & =-\frac{1}{2}e^{-2t+4} \end{matrix}$

$$\Rightarrow F(x)=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\int_1^x\left(-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t+4}\right)dt=\left[\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{1}{2}e^{-2t+4}\right)dt$$

$$F(x)=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}\right]_1^x-\left[-\frac{1}{4}e^{-2t+4}\right]_1^x=\left[-\frac{1}{2}(1-t)e^{-2t+4}+\frac{1}{4}e^{-2t+4}\right]_1^x$$

$$F(x)=\left(-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x+4}+\frac{1}{4}e^{-2x+4}\right)-\left(-\frac{1}{2}(1-1)e^{-2+4}+\frac{1}{4}e^{-2+4}\right)$$

$$F(x)=-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x+4}+\frac{1}{4}e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2$$

$$F(x)=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\right)e^{-2x+4}-\frac{1}{4}e^2\Rightarrow F(x)=\frac{2x-1}{4}e^{-2x+4}-\frac{e^2}{4}$$

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$ et (Γ). Déterminons une équations de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in AB'\Rightarrow AM\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$ et $AB'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires d'oú $\mathrm{dett}(AM,AB)=0\Rightarrow-(x-1)-1x(y-0)=0\Rightarrow-x+1-y=0\Rightarrow y=-x+1$ donc
$A=\int_1^2 y-f(x)dx\times 4\ \mathrm{cm}^2=\int_1^2-x+1-(1-x)e^{-2x+4}dx\times 4\ \mathrm{cm}^2$

$$\Rightarrow A=\int_1^2-x+1\Big)dx-\int_1^2(1-x)e^{-2x+4}dx=\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_1^2-\left[\frac{2\times2-1}{4}e^{-2\times2+4}-\frac{e^2}{4}\right]$$

$\Rightarrow A = \left(-(-2+2) - \left(-\frac{1}{2}+1\right)\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{e^2}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{e^2}{4}\right) \times 4 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow A = \left(-\frac{5}{4} + \frac{e^2}{4}\right) \times 4 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = (-5 + e^2) \times \text{cm}^2$

II. Recherche d'une valeur approchée de α.

1.

a) Calculons $g'(x)$ et précisons le sens de variation de g.

$g(x) = e^{2x-4} + 1 \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x-4}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$ donc g est strictement croissante.

b) Démontrons que $\mathrm{g(l)} \subset \mathrm{I}$.

On a $= \left[1; \frac{5}{4}\right] x \in \left[1; \frac{5}{4}\right] \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 + e^{-2} \leq e^{2x-4} + 1 \leq e^{-\frac{3}{2}} + 1 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \frac{5}{4}$

Donc $g(I) \subset \left[1; \frac{5}{4}\right] \Rightarrow g(I) \subset I$

c) Démontrons que pour tout élément x de I, on $a: 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

$g'(x) = 2e^{2x-4}$ or $x \in I \Rightarrow x \in \left[1; \frac{5}{4}\right] \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2}$

$\Rightarrow -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-\frac{3}{2}}$

Or $0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

d) Déduisons que pour tout élément x de 1 , on : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

$\forall x \in \left[1; \frac{5}{4}\right], g'(x) \leq \frac{1}{2}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[a; x]$, on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Or $g(\alpha) = e^{2\alpha-4} + 1 = \alpha$ donc $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

2. On considère la suite u définie par :

$\{u_0 = 1$

$\{$ pour tout entier $n, u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Démontons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est élément de l. On a :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n - 4} + 1 \end{cases}$ Vérifions que P_0 est vraie : on a $u_0 = 1$ d'où $u_0 \in \left[1; \frac{5}{4}\right]$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_n est vraie c'est-à-dire $u_0 \in l$ et démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a : $\Rightarrow 1 \leq u_n \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 2 \leq 2u_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -2 \leq 2u_n - 4 \leq -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow e^{-2} \leq e^{2u_n-4} \leq e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 + e^{-2} \leq e^{2u_n-4} + 1 \leq e^{-\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow 1 + e^{-2} \leq u_{n+1} \leq e^{-\frac{3}{2}} + 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + e^{-2} \leq u_{n+1} \leq e^{-\frac{3}{2}} + 1 < \frac{5}{4}$. Donc $u_{n+1} \in \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

En conclusion, pour tout entier naturel n, u_n est élément de 1 .

b) Démontrons que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

On a: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ donc $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ si $x = u_n$.

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - u|$.
3)

a) Démontrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

Considérons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Donc on a: $|u_1 - \alpha x| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$.

$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$.
$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_2 - \alpha|$.
$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$:

La multiplication membre à membre donne : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Or $|u_0 - \alpha| \leq 1$ donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Déduisons que la suite u est une suite convergente et calculons sa limite.

On a: $\lim_{n\to\infty} |u_n - a| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n,\infty} e^{n\left(n\frac{1}{2}\right.} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = a$

En conclusion, la suite converge vers a.

4. Déterminons n pour que un soit une valeur approchée de α au centimètre près.

On a : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$ et $|u_n - |x\Big| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-2}$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(10^{-2}) \Rightarrow n\ln\frac{1}{2} \leq -2\ln 10 \Rightarrow -n\ln 2 \leq -2\ln 10 \Rightarrow n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 2} \Rightarrow n \geq 6{,}64$$

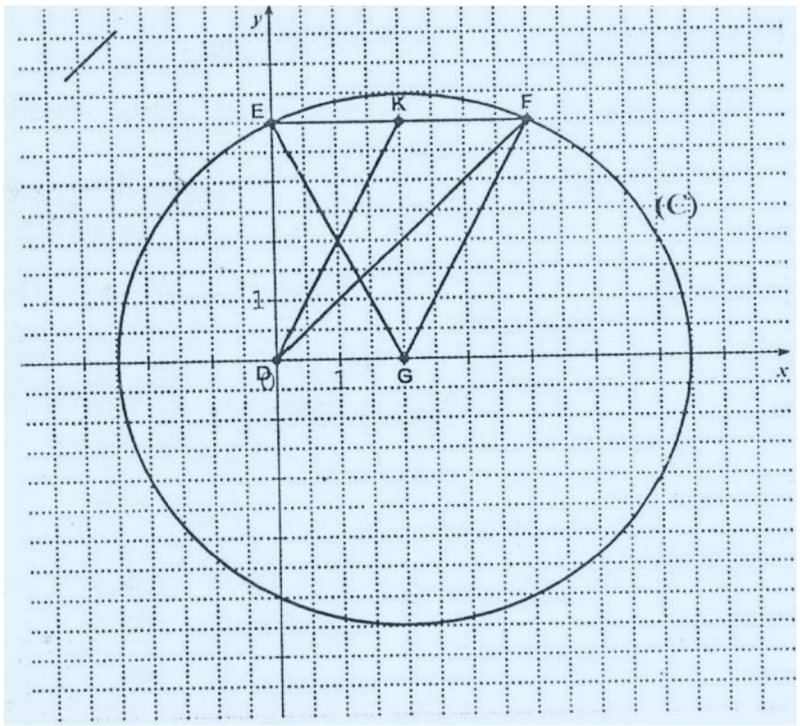
Par conséquent : $n = 7$

CORRECTION SESSION NORMALE 2002 Série C

EXERCICE 1

1.

a) Figure.



b) Démontrons que G est le barycentre des points pondérés $(D, 2)$, $(E, -1)$ et $(F, 1)$.

On a : $\begin{cases} \overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FE}} \Rightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{GD}'} = \overrightarrow{\mathrm{FE}} \Rightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{GD}'} = \overrightarrow{\mathrm{FG}} + \overrightarrow{\mathrm{GE}} \\ \Rightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{GD}} - \overrightarrow{\mathrm{FG}} - \overrightarrow{\mathrm{GE}} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{GD}} - \overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \vec{0} \end{cases}$

Donc G est le barycentre des points pondérés $(D, 2), (E, -1)$ et $(F, 1)$.

c) Démontrons que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{\mathrm{GD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ or K est milieu de $[\mathrm{EF}] \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{FK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FE}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{GD}} = \overrightarrow{\mathrm{FK}}$ donc GFKD est un parallélogramme.

d) Déduisons que $GF = 2\sqrt{5}$.

Considérons le triangle GKF rectangle en K. D'après la propriété de Pythagore :

$\mathrm{GF}^2 = \mathrm{GK}^2 + \mathrm{KF}^2 \Rightarrow \mathrm{GF}^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow \mathrm{GF}^2 = 20 \Rightarrow \mathrm{GF} = \sqrt{20} \Rightarrow \mathrm{GF} = 2\sqrt{5}.$

e) Démontrons que le triangle GEF est isocèle en G.

Calculons EG.

EDG est un triangle rectangle en D. Donc d'après la propriété de Pythagore,

$EG^2 = ED^2 + DG^2 \Rightarrow EG^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow EG^2 = 20 \Rightarrow EG = \sqrt{20} \Rightarrow EG = 2\sqrt{5}$.

Au total, on a : $EG = GF$ donc le triangle GEF est isocèle en G.

2. On note $(\mathcal{C})$, l'ensemble des points M du plan tels que : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$.

a) Vérifions que E et F sont des éléments de $(\mathcal{C}$).

Pour E, on a: $2E\mathrm{D}^2 - E\mathrm{E}^2 + EF^2 = 2ED^2 + EF^2 = 2 \times 4^2 + 4^2 = 32 + 16 = 48$

Donc $\mathrm{E} \in (\mathcal{C})$.

Pour F, on a : $2\mathrm{FD}^2 - \mathrm{FE}^2 + \mathrm{FF}^2 = 2\mathrm{FD}^2 - \mathrm{FE}^2 = 2 \times (\sqrt{32})^2 - 4^2 = 2 \times 32 - 16 = 48$ Donic $F \in (\mathcal{C})$.

En conclusion, E et F sont des éléments de $(\mathcal{C})$.

b) Déterminons l'ensemble $(\mathcal{C})$.

On a : $2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$ et $G = \{((D, 2), (E, -1)$ et $(F, 1)\}$

Donc l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M est le cercle de centre G passant par les points et F (ou bien $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon).

c) Construisons l'ensemble $(\mathcal{C})$.

(Voir figure ci-dessus)

EXERCICE 2

1. Les restes de la division euclidienne de 5^n et 3^n par 11

$5^0 \equiv 1[11]$ $3^0 \equiv 1[11]$
$5^1 \equiv 5[11]$ $3^1 \equiv 3[11]$
$5^2 \equiv 3[11]$ $3^2 \equiv 9[11]$
$5^3 \equiv 4[11]$ $3^3 \equiv 5[11]$
$5^4 \equiv 9[11]$ $3^4 \equiv 4[11]$
$5^5 \equiv 1[11]$ $3^5 \equiv 1[11]$

En conclusion :

> les restes de la division de 5^n par 11 sont : $1; 5; 3; 4; 9$,

les restes de la division de 3^n par 11 sont : $1; 3; 9; 5; 4$.

2. Déduisons l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n - 3^n$ solt divisible par 11.

> Pour $\mathrm{n} = 5\mathrm{k}$, on a

$5^n - 3^n \equiv 1 - 1[11] \equiv 0[11]$

> Pour $n = 5k + 1$, on a :

$5^n - 3^n \equiv 5 - 3[11] \equiv 2[11]$

ir Pour $n = 5k + 2$, on a :

$5^n - 3^n \equiv 3 - 9[11] \equiv -6[11] \equiv 5[11]$

i. Pour $n = 5k + 3$, on a :

$5^n - 3^n \equiv 4 - 5[11] \equiv -1[11] \equiv 10[11]$

> Pour $n = 5k + 4$, on a :

$5^n - 3^n \equiv 9 - 4[11] \equiv\equiv 5[11]$

En conclusion, pour que $5^n - 3^n$ soit divisible par 11 , il faut que n soit un multiple de 5 ($n = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$).

PROBLEME

Le plan est muni du repère $(O, 1, J)$; l'unité graphique est 4 cm.

PARTIE A

On considère la fonction numérique $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

1. a) Justifions que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{(1 + e^{-x})'}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

On a : $e^{-x} > 0$ et $(1 + e^{-x})^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

Au total f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 $\nearrow$	1

2. Justifions que (Γ) admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (δ) d'équation $y = 1$.

D On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire (OI) est asymptote horizontale à (Γ) en $-\infty$.

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ c'est-à-dire (δ) est asymptote horizontale à (Γ) en $+\infty$.

3. a) Démontrons que le point $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (Γ).

Calculons $\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2}$

On a: $f(0-x) = \frac{1}{1+e^{x}}$ et $f(0+x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{-x}}}{2} = \frac{1+e^{-x}+1+e^{x}}{2(1+e^{x})(1+e^{-x})} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(1+e^{-x}+e^{x}+e^{0})}$$

$$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(1+e^{-x}+e^{x}+1)} = \frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2(2+e^{-x}+e^{x})} = \frac{1}{2}\times\frac{2+e^{-x}+e^{x}}{2+e^{-x}+e^{x}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{f(0-x)+f(0+x)}{2} = \frac{1}{2}$ donc le point $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (Γ.

c) Démontrons que la droite (Δ) d'équation : $x-4y+2=0$ est tangenie à (Γ) en K. On a : $y = f'(0)(x-0) + {}^{\circ}f(0)$

Or:

$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{e^{0}}{(1+e^{0})^2} = \frac{1}{4}$ et $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1+e^{0}} = \frac{1}{2}$ Donc $y = \frac{1}{4}(x-0)+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y = x+2 \Leftrightarrow x-4y+2 = 0$.

Conclusion : la droite (Δ) d'équation : $x-4y+2=0$ est tangente à (Γ) en K.

4. On se propose d'étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ).

a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{1}{4} = \frac{4e^{-x}-(1+e^{-x})^2}{4(1+e^{-x})^2} = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$ où $\varphi(x) = 4e^{-x} - (1+e^{-x})^2$

b) Etudions le sens de variation de φ et dressons le tableau de variation de φ.

Sens de variation de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = 4e^{-x} - (1+e^{-x})^2 \Rightarrow \varphi'(x) = -4e^{-x} - 2(-e^{-x})(1+e^{-x})$$
$$\Rightarrow \varphi'(x) = -4e^{-x} + 2e^{-x}(1+e^{-x}) = 2e^{-x}(-2+1+e^{-x}) = 2e^{-x}(-1+e^{-x})$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2e^{-x}$		+	0	+	
$-1+e^{-x}$		+		−	
$\varphi'(x)$		+	0	−	

$\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante.

$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) < 0$ donc φ est strictement décroissante.

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	
$\varphi(x)$		↗	0	↘	

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi$ admet un maximum qui est 0 ; donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq 0$ d) Démontrons que h est une fonction strictement décroissante sur R.

$h'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$ or $\varphi(x) \leq 0$ et $4(1+e^{-x})^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) < 0$.

Donc h est une fonction strictement décroissante sur R.

e) Démontrons que : $\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) \geq 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \leq 0$.

Dressons le tableau de variation de h.

- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x) + \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = +\infty$

$\text{car}_{x\to-\infty} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x)=+\infty}$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = -\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = -\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'(x)		—	0	—	
h(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

D'après le tableau de variation, $\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) \geq 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \leq 0$.

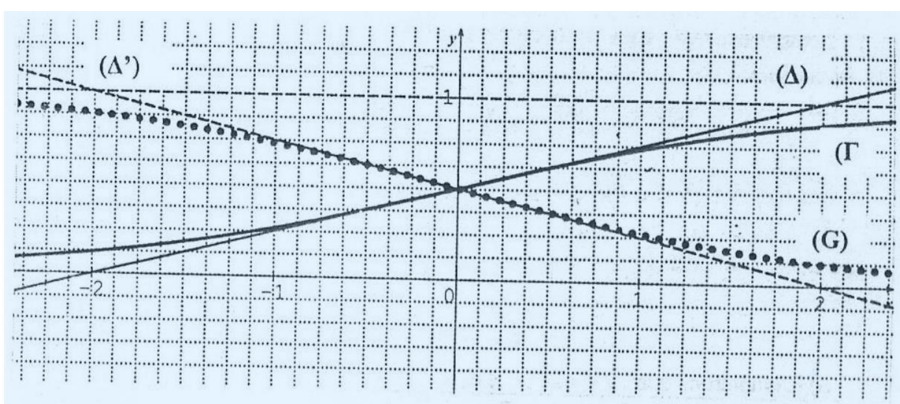
f) Déduisons la position relative de (Γ) et (Δ).

$>$ $\forall x \in]-\infty; 0[, h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - y > 0$ donc (Γ) est au dessus de (Δ).

$>$ $\forall x \in]0; +\infty[h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - y < 0$ donc (Γ) est en dessus de (Δ).

$>$ Au point $O(0,0), h(x) = 0 \Rightarrow f(x) - y = 0$ donc (Γ) coïncide avec (Δ).

g) Traçons la courbe (Γ) et (Δ) dans le repère (O, I, J).



PARTIE B

1. Démontrons que (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall -x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{1+e^x} = g(x)$

$f(-x) = g(x)$ donc (Γ) et (G) sont symétriques par rapport à la droite (OJ)

2. Déduisons les constructions de (Δ') et de (G) dans le repère (O, I, J).

$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$

Or $g(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ et $g'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{-e^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{1}{4}$

Donc : $y = -\frac{1}{4}(x-0) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

(Pour la construction, voir figure ci-dessus.)

3. a) Vérifions que: $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})}$.

$$g(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{-x}}} = \frac{1}{\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

b) Calculons en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \mathrm{g(x)d}x \times 16\ \mathrm{cm}^2 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{dx} \times 16\ \mathrm{cm}^2 = [-\ln|1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}|]_0^1 \times 16\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathcal{A} = ([-\ln|1+\mathrm{e}^{-1}|] + \ln 2) \times 16\ \mathrm{cm}^2 = 16{,}10\ \mathrm{cm}^2$$

PARTIE C

1. Démontrons que: $\forall x \in N^*, 0 \leq g_n(x) \leq e^{-nx}$.

$$g_n(x) = \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}} = \frac{1}{e^{nx}+e^{nx}e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{f(x)}{e^{nx}} = f(x)\cdot e^{-nx}$$

Or $0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x)\cdot e^{-nx} \leq e^{-nx} \Rightarrow 0 \leq g_n(x) \leq e^{-nx}$

2.

a) Démontrons que: $\forall x \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}(1-e^{-n})$

$$A_n = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^0 = \frac{1}{n}(1-e^{-n})$$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{n}(1-e^{-n})$ donc $\forall x \in N^*, 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}(1-e^{-n})$

b) En déduire la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} A_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}(1-e^{-n}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} A_n = +\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} ne^n = +\infty$

CORRECTION SESSION NORMALE 2001 Série E

EXERCICE 1

1. a. S_E l'ensemble solution de (E). Soit x un nombre réel.

$$ix \in S_E \Leftrightarrow (ix)^3 + (1-8i)(ix)^2 - (23+4i)(ix) - 3 + 24i = 0$$
$$\Leftrightarrow -ix^3 + (1-8i)(-x^2) - 23ix + 4x - 3 + 24i = 0 \Leftrightarrow$$
$$(-x^2 + 4x - 3) + i(-x^3 + 8x^2 - 23x + 24) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x$$
$$-3 = 0 \text{ et } -x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0$$

Résolvons l'équation $-x^2 + 4x - 3 - 0$.

On a une solution évidente, 1; l'autre solution est 3.

1 n'est pas solution de l'équation $-x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0$.

On déduit que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure, $3i$.

b. Effectuons la division euclidienne de

$z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i$ par $z - 3i$.

$$\begin{array}{r|l}
z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i & z - 3i \\
\cline{2-2}
-z^3 + 3iz^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & z^2 + (1-5i)z + (-8-i) \\
\hline
(1+5i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i & \\
-(1-5i)z^2 + (15+3i)z \qquad\quad & \\
\hline
(-8-i)z - 3 + 24i & \\
(8+i)z - 24i + 3 & \\
\hline
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

On déduit que $z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = (z-3i)(z^2 + (1-5i)z - 8 - i)$ L'équation (E) est donc équivalente à : $z - 3i = 0$ ou $z^2 + (1-5i)z - 8 - i = 0$ Résolvons l'équation $z^2 + (1-5i)z - 8 - i = 0$ $\Delta = (1-5i)^2 - 4(-8-i) = 1 - 25 - 10i + 32 + 4i$ $\Delta = 8 - 6i$

Cherchons les racines carrées de Δ :

Soit δ une racine carrée de Δ.

$\delta = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, |\delta|^2 = x^2 + y^2$

$|\Delta| = 10$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy < 0 \end{cases}$$

On obtient $x = 3$ et $y = -1$ ou $x = -3$ et $y = 1$.

Les racines carrées de Δ sont les nombres complexes $3 - i$ et $-3 + i$.

Les solutions de l'équation $z^2 + (1 - 5i)z - 8 - i = 0$

sont: $z_1 = \frac{-1+5i+3-i}{2} = 1 + 2i$
$z_2 = \frac{-1+5i-3+i}{2} = -2 + 3i$

On en déduit $S_E = \{3i, 1 + 2i, -2 + 3i\}$.

2. a. Notons z_A, z_B, z_C et z_G les affixes respectives des points A, B, C, G.

G est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs $2, -2$ et 1 .

Donc $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

On en déduit les affixes respectives z_{GA}, z_{GB} et z_{GC} des vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$:

$$z_{\overrightarrow{GA}} = -2(z_A - z_B) + z_A - z_C = -z_A + 2z_B - z_C$$
$$= -1 - 2i + 6i + 2 - 3i = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_{\overrightarrow{GB}} = 2(z_B - z_A) + z_B - z_C = 3z_B - 2z_A - z_C$$
$$= 9i - 2 - 4i + 2 - 3i = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$z_{\overrightarrow{GC}} = 2(z_C - z_A) - 2(z_C - z_B) = 2(z_B - z_A);$$
$$= 2(i - 1) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(+\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(+\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

b. On en déduit que :

$$z_{\overrightarrow{GB}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_{\overrightarrow{GA}}$$

$$z_{\overrightarrow{GC}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_{\overrightarrow{GB}}$$

$z\overrightarrow{GA}, z\overrightarrow{CB}$ et $z\overrightarrow{GC}$ sont donc des termes d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c. On a : $z_B - z_G = \sqrt{2}e^{\frac{I\pi}{4}}(z_A - z_G)$

$$z_C - z_G = \sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{4}}{4}}(z_B - z_G)$$

La transformation complexe définie par $z' - z_G = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi\pi}{4}}(z - z_G)$ est celle de la similitude directe de centre G, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Cette similitude transforme A en B et B en C.

EXERCICE 2

1.

a. Désignons par S la symétrie orthogonale d'axe (AB).

On a le tableau de correspondance suivant :

$\xrightarrow{S}$

A	A
B	B
C	D

Or S est un antidéplacement et ABC un triangle équilatéral direct ;

Donc ABD est un triangle équilatéral indirect.

On en déduit que :

$r(\mathrm{D}) = r_2(r_1(\mathrm{D})) = r_2(\mathrm{~B}) = \mathrm{B}.$

b. On a : r_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$;

r_2 est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

c'est-à-dire une symétrie centrale.

Or $r(\mathrm{D}) = \mathrm{B}$; donc r est la symétrie centrale de centre Ω, milieu de [BD].

2. a.

Si $M = \Omega$ alors $M = M'$ et les points M, N et M' sont alignés

Si $M = A$ alors $M = N$ et les points M, N et M' sont alignés.

Supposons dans la suite que $M \neq \Omega$ et $M \neq A$

On a alors $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}'$

D'après l'égalité de Chasles, on a : $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}}) = (\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}, \overrightarrow{\mathrm{MN}}) + (\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}})$

or $\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ car Ω est milieu du segment $[\mathrm{MM'}]$;

donc $(\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) = (\overrightarrow{\mathrm{MM'}}, \overrightarrow{\mathrm{MN}}) + (\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}})$.

Les points M, N et $\mathrm{M'}$ sont alignés si, et seulement si, mes $(\overrightarrow{\mathrm{MM'}}, \overrightarrow{\mathrm{MN}}) \equiv 0[\pi]$.

Or $\mathrm{Mes}(\widehat{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\mathrm{car}\, r_1(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$;

Donc M, N et M' sont alignés si, et seulement si, $\mathrm{Mes}(\widehat{\mathrm{M\Omega}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

On sait que l'ensemble des points M tels que $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$ est le cercle (Γ) formé des deux arcs capables d'extrémités Ω et A et de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. On déduit de cette étude que l'ensemble des points M tels que M, N et M' soient alignés est le cercle (Γ) tout entier.

b. On sait que ADB est un triangle équilatéral direct et que Ω est le milieu de $[\mathrm{BD}]$; donc Mes $(\overrightarrow{\mathrm{DB}}, \overrightarrow{\mathrm{DA}}) \equiv \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{D\Omega}}, \overrightarrow{\mathrm{DA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On en déduit que D appartient (Γ).

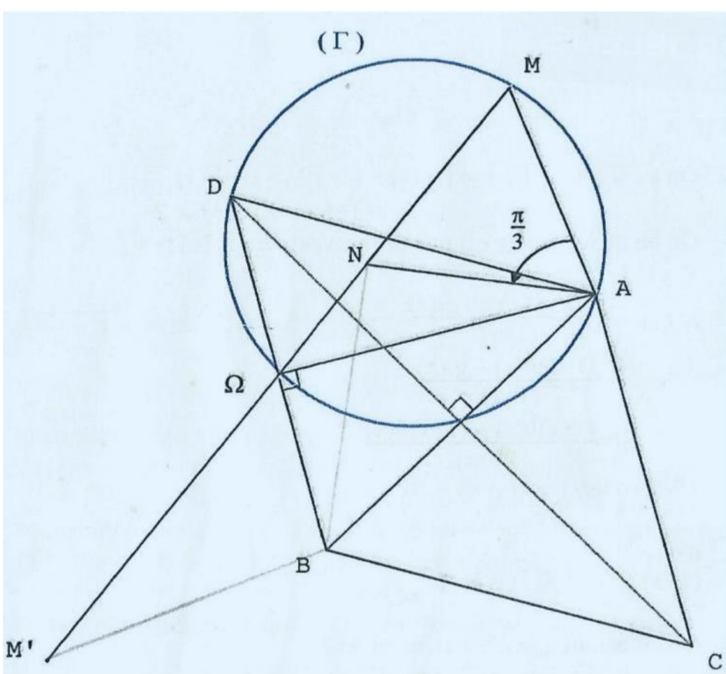
(Γ) est donc le cercle circonscrit au triangle $\mathrm{AD\Omega}$ rectangle en Ω.

D'où $[AD]$ est un diamètre de (Γ).

On sait que le triangle $AD\Omega$ est rectangle en Ω et que le triangle ADI est rectangle en I.

Donc les points A,D, Ω et I sont cocycliques.

On en déduit que I appartient à (Γ).



PROBLÈME

PARTIE A

1. a. On a : $\forall x \in]-1;+\infty[g'(x) = (1+x)f'(x) + f(x)$

$$= 1 + \ln(1+x) \text{ car } \quad f \in \mathcal{J}$$

On en déduit que g est une primitive de h sur $]-1;+\infty[$.

b. $\forall x \in]-1;+\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{g_1'(x)(1+x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{(1+x)h(x) - g_1(x)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{(1+x)h(x) - (1+x)f_1(x)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{h(x) - f_1(x)}{1+x}$$

d'où :

$$(1+x)f_1'(x) + f_1(x) = h(x)$$

On en déduit que f_1 est élément de J.

2. a. $\forall x \in]-1;+\infty\left[, \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x}\right.$

$$= 1 - \frac{1}{1+x}$$

On en déduit que $a = 1$ et $b = -1$.

b. Soit H la primitive sur $]-1;+\infty[$ de h qui s'annule en 0 .

On a : $\forall x \in]-1;+\infty\left[, \mathrm{H}(x) = \int_0^x h(t)dt\right.$

$$= \int_0^x \ [1 + \ln(1+t)]dt$$
$$= x + \int_0^x \ \ln(1+t)dt$$

Calculons l'intégrale $\int_0^x \ln(1+t)dt$ par intégration par parties.

Posons $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = 1$

On a $u'(t) = \frac{1}{1+t}$; choisissons $v(t) = t$

On a : $\int_0^x \ln(1+\mathrm{t})dt = [t\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t}dt$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^{xt} \frac{t}{1+t}dt$$

D'après la question 2.a., on a :

$\forall t \in]-1;+\infty\left[, \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.\right.$

Donc $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$

$= x - [\ln(1+t)]_0^x = x - \ln(1+x)$

On en déduit que : $\forall x \in]-1;+\infty[$,

$\mathrm{H}(x) = x + x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) = (1+x)\ln(1+x)$.

Les primitives sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) + c$ où c est un nombre réel.

3. De l'étude qui précède, on déduit que $\boldsymbol{J}$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) + \frac{c}{1+x}$ où c est un nombre réel.

Partie B

1. a. Déterminons la limite de f_k en $+\infty$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$;

donc $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

Déterminons la limite de f_k en -1 suivant les valeurs de k.

On a : $\lim_{x\to-1} \ln(x+1) = -\infty$

$$\lim_{x\to-1} \frac{k}{x+1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } k > 0 \\ -\infty \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

pour $k < 0 \lim_{x\to-1} f_k(x) = -\infty$.

Supposons que $k = 0$.

On a: $\forall x \in]-1;+\infty[, f_k(x) = \ln(x+1)$;

donc $\lim_{x\to-1} f_k(x) = -\infty$.

Supposons que $k > 0$.

On a : $\forall x \in]-1;+\infty\Big[, f_k(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)+k}{(x+1)}$;

$\lim_{x\to-1} (x+1)\ln(x+1) = 0$;

donc $\lim_{x\to-1} (x+1)\ln(x+1) + k = k$ et par suite $\lim_{x\to-1} f_k(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]-1;+\infty\Big[f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{k}{(1+x)^2}$;

$$= \frac{1+x-k}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x-(k-1)}{(1+x)^2}$$

On déduit que $f_k'(x)$ a le même signe que $x-(k-1)$

$\forall x \in]-1;+\infty[\quad, (f_k'(x)=0 \Leftrightarrow x=k-1)$.

$\forall x \in]-1;+\infty[, (f_k'(x)>0 \Leftrightarrow x>k-1)$.

$\forall x \in]-1;+\infty[, (f_k'(x)<0 \Leftrightarrow x<k-1)$.

Donc :

Pour $k \leqslant 0$, on a : $x-(k-1)>0$

Pour $k>0$, on a : $\forall x \in]-1;k-1[, x-(k-1)<0$

On déduit que

$\forall x \in]k-1;+\infty[, x-(k-1)>0$.

pour $k \leqslant 0, f_k'(x)>0$ pour tout x élément de $]-1;+\infty[\quad$; d'où f_k est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

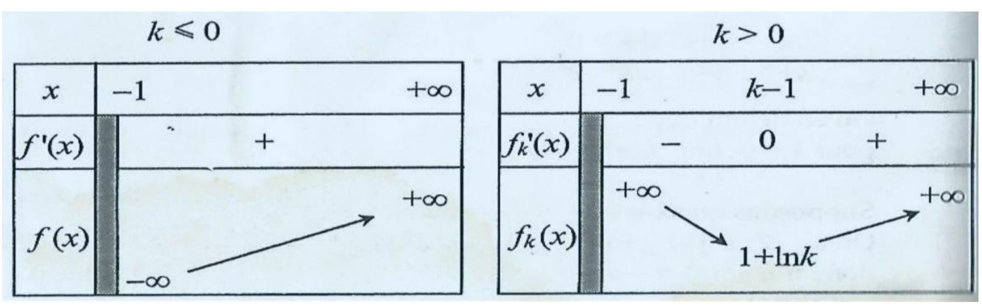
pour $k>0$, on a :

$\forall x \in]-1;k-1[f_k'(x)<0;$

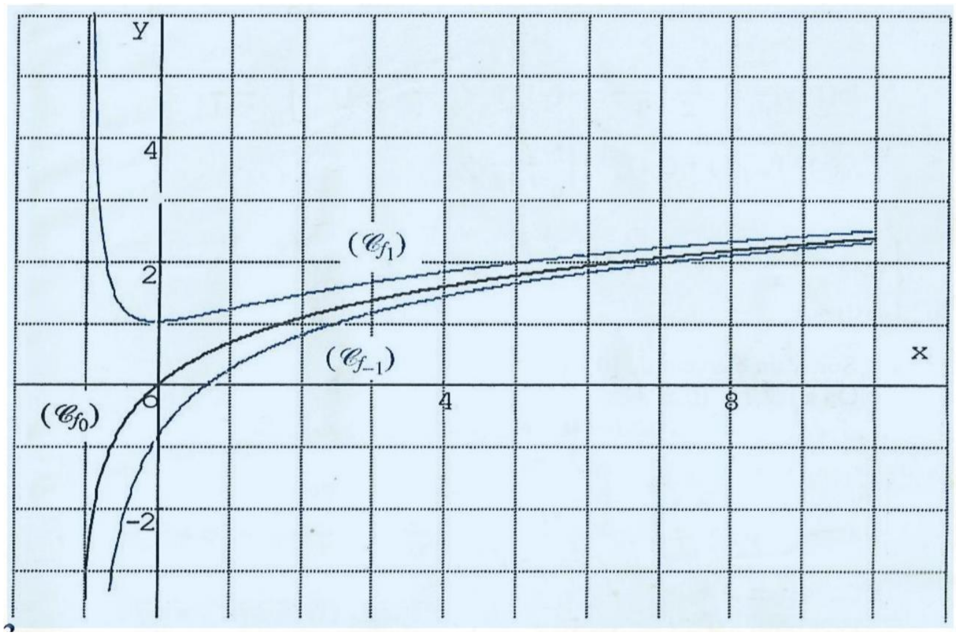
$\forall x \in]k-1;+\infty[f_k'(x)>0;$

d'où f_k est strictement décroissante sur $]-1;k-1]$ et strictement croissante sur $[k-1;+\infty[$.

On déduit de cette étude le tableau de variation de f_k suivant les valeurs de k.



c. Tracé de $(\mathcal{C}_{-1}), (\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$.



2.

a. $Q_{n-2}(t)$ est la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $-t$ et de premier terme 1 , avec $t \neq -1$.

Donc $Q_{n-2}(t) = \frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1-(-1)^{n-1} \times t^{n-1}}{1+t}$.

b. On déduit de la question précédente que :

$\forall t \in \mathbb{R} \mid \{-1\}, 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{t+1} \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{t+1}$.

c. Soit x un élément de $[0; 1]$.

D'après la question b. on a :

$\forall t \in [0; x], \frac{1}{1+t} = 1 - t^{2+} t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{t+1}$.

En intégrant chacun des deux membres, on a :

$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2}) dt + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1} dt$

$$[\ln(1+t)]_0^x = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \times \frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^x + (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{t^{n-1}}{t+1}} dt$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \times \frac{x}{n-1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1} dt$$

$$f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{t+1} dt$$

3.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x} \text{ si } x \in \left]0;1\right] \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

a. Soit x un élément de $[0;1]$.

On a : $\forall t \in [0,x]$

$$0 \leqslant t$$
$$1 \leqslant 1+t$$
$$\frac{1}{1+t} \leqslant 1$$
$$\frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant t^{n-1}$$

On en déduit que :

$\forall x \in [0;1], \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leqslant \int_0^x t^{n-1} dt.$

b.

On a : $\int_0^x t^{n-1} dt = \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x = \frac{x^n}{n};$

or $0 \leqslant x \leqslant 1;$

donc $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ et par conséquent $0 \leqslant \frac{x^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$

on déduit que :

$\forall x \in [0;1], \int_0^x \frac{p^{n-1}}{1+t} dt \leqslant \frac{1}{n}.$

c. d'après 2.c., on a :

$$\forall x \in [0;1] f_0(x) = \mathrm{P}_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

$$f_0(x) - \mathrm{P}_{n-1} = (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

$$|\mathrm{f}_0(x) - \mathrm{P}_{n-1}(x)| = \left|\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt\right|$$
$$= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \text{car} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \geqslant 0$$

$|f_0(x) - P_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ d'après 3.b.

$-\frac{1}{n} \leqslant f_0(x) - \mathrm{P}_{n-1}(x) \leqslant \frac{1}{n}$

pour x élément de $]0;1]$, on a :

$$-\frac{1}{nx} \leqslant \frac{\mathrm{f}_0(x)}{x} - \frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$$

$\frac{-1}{nx} \leqslant \varphi(x) - \frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$.

d. On a : $\forall x \in]0;1]$

$\frac{-1}{nx} \leqslant \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \times \frac{x^{n-2}}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{nx}$.

en intégrant sur $\left[\frac{1}{n};1\right]$, on obtient :

$$-\int_{1/n}^{1} \frac{1}{nx}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1/n}^{1} \varphi(x)dx - \int_{1/n}^{1}\left(1 - \frac{x}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{n-1}\right)dx \leqslant \frac{1}{n}\int_{1/n}^{1}\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{n}[\ln x]_{1/n}^{1} \leqslant \int_{1/n}^{1}\varphi(x)dx - \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}\right]_{1/n}^{1} \leqslant \frac{1}{n}[\ln x]_{1/n}^{1}$$

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \leqslant \int_{1/n}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x - \left(\mathrm{S}_n(1) - \mathrm{S}_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$$

$\int_{1/n}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \mathrm{S}_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(1)$ et

$\mathrm{S}_n(1) \leqslant \int_{1/n}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \mathrm{S}_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que :

$\int_{1/n}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \mathrm{S}_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(1) \leqslant \int_{1/n}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \mathrm{S}_n\left(\frac{1}{n}\right)$

Partie C

1. On a : $\forall x \in]1;+\infty\left[, g_1(x) + \frac{x^2}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right.$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x} = f_0'(x)$$

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\forall x \in]1;+\infty\left[, g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}\right.$ et démontrons que :

$\forall x \in]1;+\infty\left[, g_{n+1}(x) + \frac{x^{2n+2}}{x+1} = \frac{1}{1+x}\right.$.

On a : $\forall x \in]1;+\infty[$,

$g_{n+1}(x) = g_n^2(x) + (-1)^{2n}x^{2n} + (-1)^{2n+1}x^{2n+1}$

$g_{n+1}(x) + \frac{x^{2n+1})}{1+x} = g_n(x) + (-1)^{2n}x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{x+1} + (-1)^{2n+1}x^{2n+1}$

$= g_n(x) + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{x+1}$

or $g_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x}$ d'après l' hypothèse de récurrence ;

donc $g_{n+1}(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x} + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{-x^{2n}+(1+x)x^{2n}-(1+x)x^{2n+1}+x^{2n+2}}{1+x}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{-x^{2n}+x^{2n}+x^{2n+1}-x^{2n+1}-x^{2n+2}+x^{2n+2}}{1+x}$

$g_{n+1}(x) + \frac{x^{2(n+1)}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{0}{1+x} = \frac{1}{1+x} = f_0'(x).$

On en déduit que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty\Big[, f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}.$

2.

a. On a : $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0; 1[,$

$0 \leqslant x$

$1 \leqslant 1 + x$

$$\frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

$\frac{x^{2n}}{(1+x)} \leqslant x^{2n}$ car $x^{2n} \geqslant 0$

donc : $\forall x \in [0; 1], \frac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}.$

b. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1],$

$0 \leqslant \frac{x^{2n}}{x+1} \leqslant x^{2n}$

donc : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1} dx \leqslant \int_0^1 x^{2n} dx$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1} dx \leqslant \left[\frac{x^{2n+1}}{x+1}\right]_0^1$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

3. D'après la question 1 . on a :
   a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1; +\infty\Big[,\ f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x};$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 f_0'(x)dx = \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x + \int_0^{1x^{2n}} 1 + x$

$$f_0(1) - f_0(0) = \int_0^1 [1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{2n-1}x^{2n-1})\Big] dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$$

$$f_0(1) = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$$

$$f_0(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \left(-\frac{1}{2n}\right) + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$$

$$f_0(1) = \mathrm{U}_n + \int_0^1 \frac{1x^{2n}}{1+x} dx$$

b. On a :

$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2\mathrm{n}}}{1+x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+1}$ d'après 2.b. ;

donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = 0.$

On déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = \lim_{n\to+\infty} \left[f_0(1) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx\right] = f_0(1)$

$= \ln 2.$

CORRECTION SESSION NORMALE 2001 SERIE C

EXERCICE 1

1. a. Pour n pair;

$(t^2-1)^n \geqslant 0$

donc $\forall t \in [-1;1], \mathrm{J}_n \geqslant 0$

b. Pour n impair;

$(t^2-1)^n$ a le même signe que t^2-1.

Or $\forall t \in [-1;1], t^2-1 \leqslant 0$.

Donc $\mathrm{J}_n \leqslant 0$.

2. $\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt + \int_{0}^{1}(t^2-1)^n dt$

Posons $u=-t$ alors $du=-dt$.

On a $\int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = -\int_{1}^{0}(u^2-1)du = \int_{0}^{1}(u^2-1)du$;

donc $\mathrm{J}_n = 2\int_{0}^{1}(t^2-1)^n dt$.

3. D'après 2 .,

$\mathrm{J}_0 = 2\int_{0}^{1}\mathrm{dt} = 2[t]_0^1 = 2(1-0) = 2$

$\mathrm{J}_0 = 2$

$\mathrm{J}_1 = 2\int_{0}^{1}(t^2-1)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-1-0\right)$

$\mathrm{J}_1 = -\frac{4}{3}$

$\mathrm{J}_2 = 2\int_{0}^{1}(t^2-1)^2 dt = 2\int_{0}^{1}(t^4-2t^2+1)dt = 2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1$

$= 2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-0\right)$

$\mathrm{J}_2 = \frac{16}{15}$.

4. $n \in \mathbb{N}*$.

Posons $u(t) = (t^2-1)^n$ et $v'(t) = 1$;

On a $u'(t) = 2n(t^2-1)^{n-1}t$. Choisissons $v(t) = t$.

Ainsi, $\frac{1}{2}\ \mathrm{J}_n = \int_{0}^{1}(t^2-1)^n dt$

$$\frac{1}{2}J_n = [t(t^2-1)]_0^1 - 2n\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}t^2dt$$

$$= 0 - 2n\int_0^1 (t^2-1)^{n-1}(t^2-1+1)dt$$

$$= -2n\int_0^1 [(t^2-1)^{n-1}(t^2-1) + (t^2-1)^{n-1}]dt$$

$$= -2n\left(\int_0^1 (t^2-1)^n dt + \int_0^1 (t^2-1)^{n-1}dt\right)$$

$$= -2n\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{J}_n + \frac{1}{2}\ \mathrm{J}_{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{2}J_n = -n\ \mathrm{J}_n - n\ \mathrm{J}_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+n\right)\mathrm{J}_n = -n\ \mathrm{J}_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2n}{2}\ \mathrm{J}_n = -n\ \mathrm{J}_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{J}_n = \frac{-2n}{1+2n}\ \mathrm{J}_{n-1}$$

5. D'après 4 , on a :

$$\mathrm{J}_1 = -\tfrac{2}{3}\ \mathrm{J}_0 = -\tfrac{4}{3} \text{ car } \mathrm{J}_0 = 2$$
$$\mathrm{J}_2 = -\tfrac{4}{5}\ \mathrm{J}_1 = -\tfrac{4}{5}\left(-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{16}{15}$$

6. D'après 4 , on a successivement

$$\begin{cases} \mathrm{J}_n = -\frac{-2n}{2n+1}\ \mathrm{J}_{n-1} \\ \mathrm{J}_{n-1} = \frac{-2(n-1)}{2n-1}\ \mathrm{J}_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{J}_2 = (-2)\times\frac{2}{5}\ \mathrm{J}_1 \\ \mathrm{J}_1 = (-2)\times\frac{1}{3}\ \mathrm{J}_0 \end{cases}$$

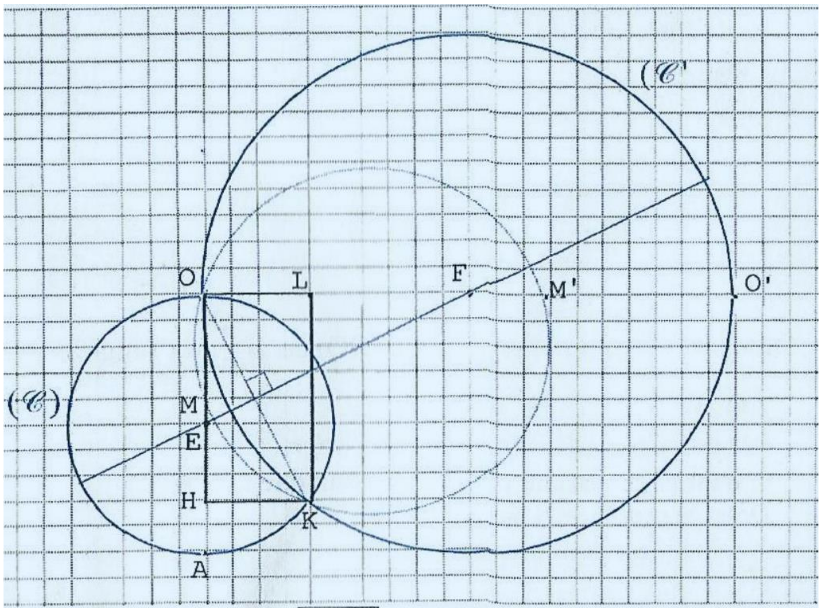
En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient après simplification :

$$\mathrm{J}_n = \frac{(-2)^n\times n\times(n-1)\times\ldots\times1\times2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times5\times3}$$

Or $n(n-1)\times\ldots\times 1 = n!$

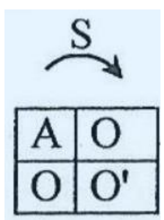
D'où $\mathrm{J}_n = \frac{(-1)^n\times n!\times 2^{n+1}}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}$.

EXERCICE 2



1. Soit θ l'angle de la similitude directe S.

comme



Alors $\theta = \mathrm{mes}\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \overrightarrow{\mathrm{OO'}}\right)$

$= \mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{HO}}, \overrightarrow{\mathrm{HK}})$

$= -\mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{HK}}, \overrightarrow{\mathrm{HO}})$

$= -\dfrac{\pi}{2}$

car le rectangle OHKL est de sens direct :

Donc l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$.

2. Par hypothèse, les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, de centres respectifs E et F, passent par O. De plus la droite (EF) est la médiatrice du segment $[\mathrm{OK}]$. D'où $\mathrm{EO} = \mathrm{EK}$ et $\mathrm{FO} = \mathrm{FK}$.

On en déduit que K appartient aux cercles $(\mathbb{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Donc $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \{\mathrm{O}; \mathrm{K}\}$.

3. Donc $[\mathrm{OA}]$ et $[\mathrm{OO'}]$ s sont respectivement des diamètres des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Soit Ω le centre de S.

Puisque :

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

Ω	Ω
A	O
O	O'
(ΩA)	(ΩO)
(ΩO)	$(\Omega O')$

alors $(\Omega O) \perp (\Omega A)$ et $(\Omega O') \perp (\Omega O)$ car $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de S. On en déduit que : $\Omega \in (\mathbb{C}) \cap (\mathbb{C}')$.

Par conséquent $\Omega = \mathrm{O}$ ou $\Omega = \mathrm{K}$ (d'après 2.). O n'est pas invariant par S. Il s'ensuit que $\Omega = \mathrm{K}$. Donc le centre de S est le point K.

4. H appartient à (OA) et à la perpendiculaire à (OA) passant par K. Donc $\mathrm{S(H)}$ appartient à (OO') image de (OA) par S. S(M) appartient à la perpendiculaire à (OO') passant par $\mathrm{S(K)}$, c'est-à-dire (LK). Donc $\mathrm{S(H)} = \mathrm{L}$. Soit α le rapport de S Comme

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

K	K
H	L

alors $\alpha = \frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{KH}} \cdot \mathrm{Or KL} = \mathrm{HO} = 2\mathrm{LO}$ et $\mathrm{KH} = \mathrm{LO}$

D'où $\alpha = \frac{2\,LO}{LO} = 2$.

Le rapport de S est donc 2 .

5. Comme

$$\begin{cases} S(A) = 0 \\ S(K) = K \\ S(O) = O' \end{cases}$$

alors l'image de ($\mathcal{C}$) par S est le cercle ($\mathcal{C}'$). Par conséquent l'image du centre de $(\mathcal{C})$ par S est le centre de $(\mathcal{C}')$, c'est-à-dire F.

6. Les points $\mathrm{K, M, O}$ et M' sont cocycliques, donc

$$2(\widehat{\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KM'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \quad (1)$$

Comme $\mathrm{M} \in (\mathrm{OH}), \mathrm{M}' \in (\mathrm{OL})$ et $(\mathrm{OH}) \perp (\mathrm{OL})$, alors

$2\text{Mes}\left(\overrightarrow{\text{OM}', \text{OM}'}\right) = \pi$

De plus $\text{Mes}(\widehat{\text{KM}, \text{KM}'}) = -\frac{\pi}{2}$.
Alors $2\text{Mes}(\widehat{\text{KM}}, \widehat{\text{KM}}') = \pi$;
d'où $2\left(\overrightarrow{\text{OM}'}, , \overrightarrow{\text{OM}'}\right) = 2(\widehat{\text{KM}}, \overrightarrow{\text{KM}'})$
De l'égalité (1) on déduit $2\left(\widehat{\text{KM}}', \overrightarrow{\text{KM}}\right) = 2(\widehat{\text{KM}}, \overrightarrow{\text{KM}'})$). D'où S(M) appartient à (KM').

Puisque $\text{M} \in (\text{AH})$ et $(\text{AH}) = (\text{OH})$, alors S(M) appartient à (OL) image de (AH) par S.

Ainsi S(M) appartient à $(\text{KM}') \cap (\text{OL}) = \{\text{M}'\}$.

Par conséquent $S(M) = M'$.

PROBLÈME

Partie A

1. Limite de h en $+\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(-2\ln x) = -\infty$.

D'où $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

Limite de h à droite en 0 .

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(-2\ln x) = +\infty$, d'où $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} h(x) = +\infty$.

2. $\forall x \in]0; +\infty\left[, h'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x}\right.$

$= -\frac{2(1+x^2)}{x^3}$

3. $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) < 0$.

h est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. $h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. h est donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Comme 0 appartient à $\mathbb{R}$, alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0; +\infty[$.

$h(1) = 2$ donc $h(1) > h(x_0)$. h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit que $1 < x_0$, c'est-à-dire $x_0 \in]1; +\infty[$.

Par conséquent l'équation $x \in]0; +\infty[, h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $]1; +\infty[$.
4. $h(x_0) = 0$ et h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$; d'où

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; x_0[$

$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]x_0; +\infty[$

PARTIE B

1. Limite de g en $+\infty$

On a : $\forall x \in]0;+\infty\left[, g(x) = x^2\left[1 - \ln x + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right]\right.$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Limite de g à droite en 0

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = x^2 - x^2\ln x + 1 + \ln x$.

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln \mathrm{x} = 0$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} (x^2 + 1 + \ln x) = -\infty$

d'où $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$.

2. $\forall x \in]0;+\infty\left[, g'(x) = 2x(1 - \ln x) - \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}\right.$

$= x\left[2 - 2\ln x - \frac{x}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$

$= x\left[2 - 2\ln x - 1 + \frac{1}{x^2}\right]$

$= x\left[1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right]$

3. On a : $g(x_0) = x_0^2(1 - \ln x_0) + 1 + \ln x_0$

De plus $h(x_0) = 0$, d'après la question 3. de la partie A.

$1 + \frac{1}{x_0^2} - 2\ln x_0 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_0^2}$

d'où $g(x_0) = x_0^2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x_0^2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_0^2}$

$= x_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x_0^2}\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2x_0^2}$

$= \frac{x_0^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2x_0^2}$

$= \frac{x_0^2}{2} + 1 + \frac{1}{2x_0^2}$

d'où $g(x_0) > 0$

4. $\forall x \in]0;1[, g'(x)$ est du signe de $h(x)$.

Or d'après la partie A. 4 , on a $h(x) > 0$. D'où $\forall x \in]0;1[, g'(x) > 0$.

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[g(]0;1[) =]-\infty;2[$. g réalise donc une bijection de $]0;1[$ sur $]-\infty;2[$.

$0 \in]-\infty; 2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]0; 1[$

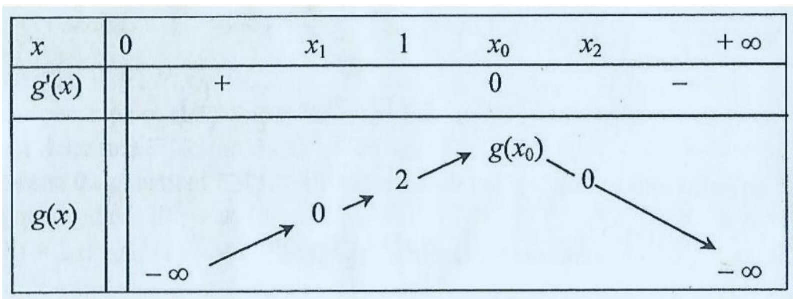
5. a. D'après la partie A. 4 , on a :

$\forall x \in]0; x_0[, h(x) > 0$, donc $g'(x) > 0$

$\forall x \in]x_0; +\infty[, h(x) < 0$, donc $g'(x) < 0$

$h(x_0) = 0$, donc $g'(x_0) = 0$

Donc g est strictement croissante sur $]0; x_0]$ et strictement décroissante sur $]x_0;\ +\infty[$. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :



Comme $g(x_1) = 0$ avec $x_1 \in]0; 1[$ et $g(x_2) = 0$ avec $x_2 \in]x_0; +\infty[$ alors :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; x_1[\cup]x_2; +\infty[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1; x_2[, g(x) > 0 \\ \forall x \in \{x_1; x_2\}, g(x) = 0. \end{cases}$$

b. On a $g(0{,}3) \simeq -0{,}005; g(0{,}4) \simeq -0{,}4; g(3{,}3) \simeq 0{,}08; g(3{,}4) \simeq -0{,}36.$

On déduit du sens de variation de g obtenue à la question précédente que :

$g(0{,}3) < 0$ et $g(0{,}4) > 0$, donc $x_1 \in]0{,}3; 0{,}4[$.

$g(3{,}3) > 0$ et $g(3{,}4) < 0$, donc $x_2 \in]3{,}3; 3{,}4[$.

PARTIE C

1. Continuité de f à droite en 0

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 + x^2) = 1$, d'où $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$

Comme $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0)$, alors f est continue à droite en 0 .

Dérivabilité de f à droite en 0

$\forall x \in]0;+\infty\left[, \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln x}{1+x^2}\right.$

On a : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$; d'où $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 .

2. Limite de fen $+\infty$

$$\forall x \in]0;+\infty\left[, f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0\right.$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la droite l'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

3. $\forall x \in]0;+\infty\left[, f'(x) = \frac{(\ln x+1)(1+x^2)-2x(x\ln x)}{(1+x^2)^2}\right.$

$$f'(x) = \frac{\ln x + 1 + x^2\ln x + x^2 - 2x^2\ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^2\ln x + 1 + \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x}{(1+x^2)^2};$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$

4. Comme $(1+x^2)^2 > 0$ alors $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

Il résulte de la question 5.a de la partie B. que :

$\forall x \in]0; x_1[\cup]x_2; +\infty[,\ f'(x) < 0$

$\forall x \in]x_1; x_2[,\ f'(x) > 0$

$\forall x \in \{x_1; x_2\},\ f'(x) = 0$

Tableau de variation de f :

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

5. Si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$, alors α vérifie :

$$\alpha^2(1 - \ln\alpha) + 1 + \ln\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha^2 \ln\alpha + 1 + \ln\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - \alpha^2)\ln\alpha = -1 - \alpha^2$$
$$\Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

6. Si α est solution de l'équation $g(x) = 0$, on a :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$
$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$$

Donc si $\alpha \in]0;1[$, alors $f(\alpha) < 0$.

Si $\alpha \in]1;+\infty[$, alors $f(\alpha) > 0$.

Comme $x_1 \in]0;1[$, alors on a $f(x_1) < 0$ et comme $x_2 \in]1;+\infty[$ alors on a : $f(x_2) > 0$.

7. $f(1) = 0$. D'après le tableau de variation de f et compte tenu du signe de $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on déduit que : $\forall x \in]0;1[, f(x) < 0$

Tracé de $(\mathcal{C}_f)$: voir figure.

$\forall x \in]1;+\infty[,\quad f(x) > 0$

$f(1) = 0$

PARTIE D

1. a. $\forall t \in]1;+\infty[, t^2 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2t^2$

donc $\frac{1}{2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$

b. $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^2$

c. $\forall t > 1$, on a : $\frac{1}{2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

D'où en multipliant par le nombre réel positif $t\ln t$, on obtient :

$\forall t > 1, \frac{\ln t}{2t} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t}$.

Alors $\forall t \in]; +\infty\left[, \int_1^x \frac{\ln t}{2t} dt \leqslant \int_1^x f(t)dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt\right.$.

Avec $x > 1$, on obtient : $\frac{1}{4}(\ln x)^2 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{1}{2}(\ln x)^2$ d'après D.1.b.;

comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(\ln x)^2 = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$

on a : $\forall x > 1, \frac{1}{4}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x} = 0$

2. $\forall \alpha \in]0; 1[, \varphi(\alpha) = \int_1^\alpha t\ln t dt$.

a. Intégrons par parties.

Posons $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t$.

On a $u'(t) = \frac{1}{t}$. Choisissons $v'(t) = \frac{t^2}{2}$.

b. $\varphi(\alpha) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{t}{2} dt$.

$$= \left[\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right]_1^\alpha$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln \alpha\right) + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln \alpha\right) + \frac{1}{4}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{-\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\ln \alpha + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \text{ car } \lim_{x\to 0} \alpha^2 \ln \alpha = 0.$$

c. $\forall t \in [0; 1], 1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$;

d'où $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

$t\ln t \leqslant \frac{t\ln t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2} t\ln t$ car $t\ln t < 0$.

pour $0 < \alpha \leqslant t < 1$, on a :

$$\int_\alpha^1 t\ln t dt \leqslant \int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{1+t^2} dt \leqslant \int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{2} dt$$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{2} dt \leqslant -\int_\alpha^1 \frac{t\ln t}{1+t^2} dt \leqslant -\int_\alpha^1 t\ln t dt$$

$$\Rightarrow \int_1^\alpha \frac{t\ln t}{2} dt \leqslant \int_1^\alpha \frac{t\ln t}{1+t^2} dt \leqslant \int_1^\alpha t\ln t dt$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\varphi(\alpha) \leqslant F(\alpha) \leqslant \varphi(\alpha)$.

comme $\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \varphi(\alpha) = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{8} \leqslant \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \mathrm{F}(\alpha) \leqslant \frac{1}{4}$

$$\underset{\alpha>0}{\alpha \to 0}\ 4\ 8\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} 0$$

3. Comme f est continue sur $[0;+\alpha[$, la fonction F définie par :

$\mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)dt$, est la primitive de f sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1.

Donc $\forall x \in]0;+\infty[, \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

4. D'après la partie C.7, on a :

$\mathrm{F}'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$

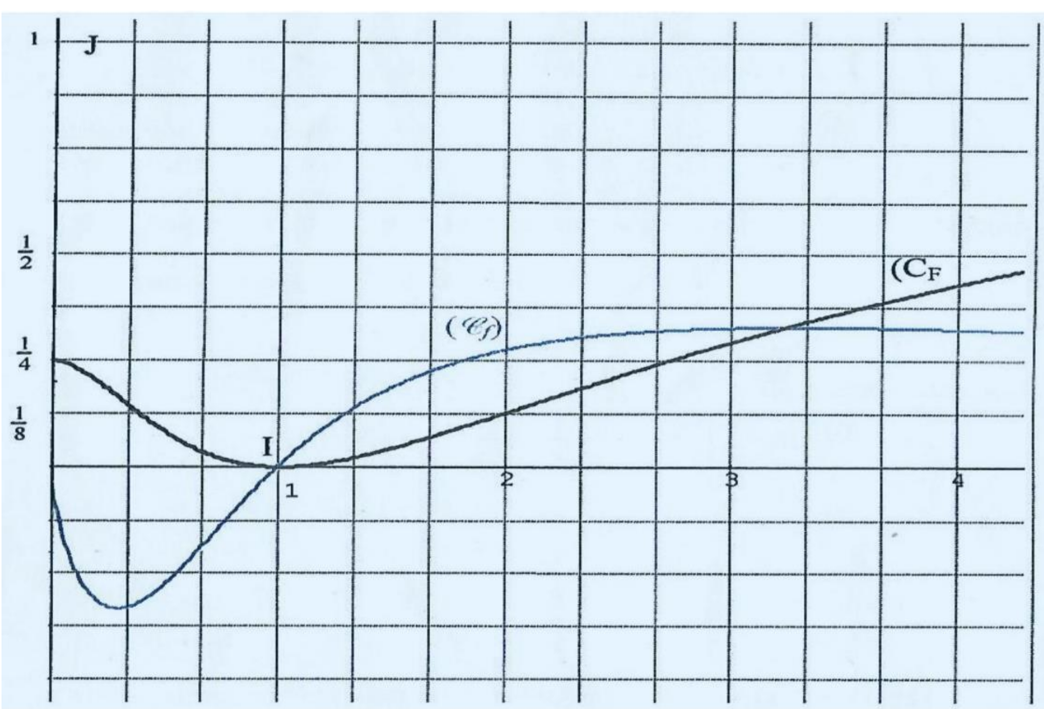
$\mathrm{F}'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$

$\mathrm{F}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tableau de variation de F

x	0		1		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\mathrm{F}(x)$	‖	↘	1	↗	$+\infty$

5. Allure de la courbe représentative de F



CORRECTION SESSION NORMALE 2000 Série E

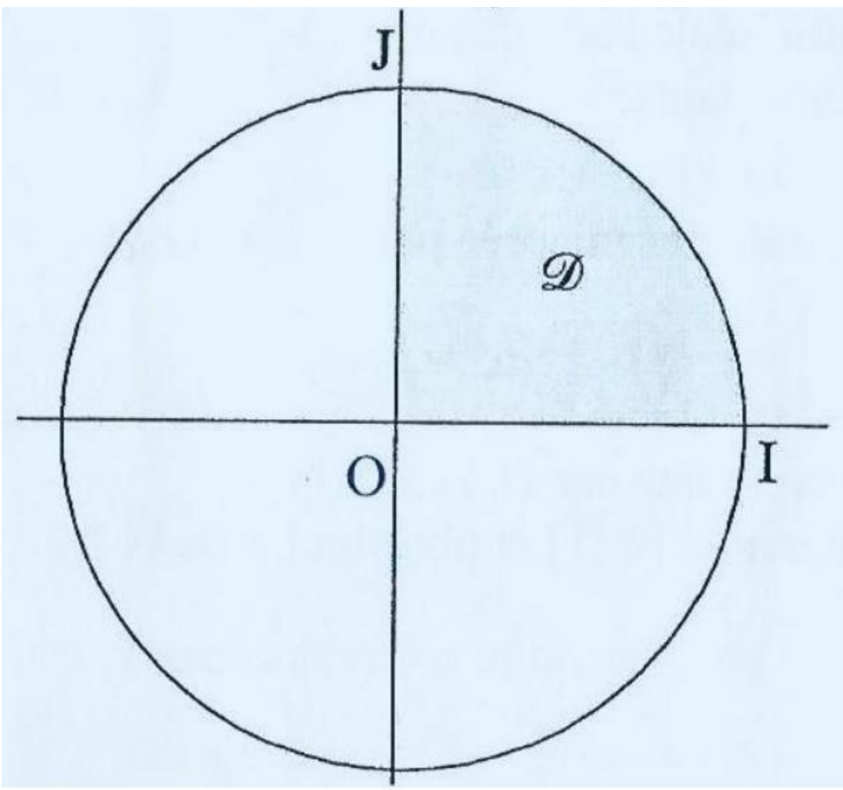
EXERCICE 1
PARTIE A

1. Rapportons le plan P à un repère orthonormé ($\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}$).

Soit $\mathcal{D}=\left\{M\binom{x}{y} \in \mathcal{P} / 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$

Pour tout point $M\binom{x}{y}$ de $\mathcal{P}$,

$$\mathrm{M}\binom{x}{y} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \\ y^2 \leqslant 1-x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \\ x^2+y^2 \leqslant 1\end{cases}$$



J_0 est l'aire d'un quart du disque unité. $\mathrm{J}_0=\frac{\pi}{4}$.

2. Soit u la fonction définie sur $[0;1]$ par $u(x)=1-x^2$.

On a : $\forall x \in[0;1], x\sqrt{1-x^2}=-\frac{1}{2}(-2x)\sqrt{1-x^2}$

$$=-\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^{\frac{1}{2}}$$

Une primitive sur $[0;1]$ de la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ est donc la fonction $x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

On a donc $\mathrm{J}_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1$

$J_1 = \frac{1}{3}$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \\
&= J_0 - J_1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Posons $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C_f) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O,I,J).

f est positive sur $[0;1]$ donc I_1 est l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f); l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{n+1} - J_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx$.

$\forall x \in [0;1], x^n(x-1)\sqrt{1-x^2} \leqslant 0$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{n+1} \leqslant J_n$ (positivité de l'intégrale).

Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
b. $\forall x \in [0;1], x^n\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ donc $J_n \geqslant 0$.

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, étant décroissante et minorée par 0 , converge.

$\forall n \in \mathbb{N}*, I_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx = J_0 - J_n$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente car $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est.

4. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout n de $\mathbb{N}*$,

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \\
&\Rightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 \\
&\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 \text{ or } x^n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

donc $0 \leqslant x^n\sqrt{1-x^2} \leqslant x^n$

par conséquent $0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n dx$
b. $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Donc $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_0 - J_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n = J_0 = \frac{\pi}{4}$.

Partie B

1. a. $\forall x \in \left[0;1\right[, v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

$$v'(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad (voir\ 1.1)$$

b. $\forall n \geqslant 3,\ \mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

$= \int_0^1 x^{n-1} \times x\sqrt{1-x^2}dx$

posons $u(x) = x^{n-1}$; et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

On a : $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$; choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n &= \left[-\frac{1}{3}x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right] + \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \frac{n-1}{3}\left[\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\right] \\ &= \frac{n-1}{3}[\ \mathrm{J}_{n-2} - \mathrm{J}_n]\text{donc } 3\ \mathrm{J}_n = (n-1)\mathrm{J}_{n-2} - (n-1)\mathrm{J}_n\end{aligned}$$

$(3+n-1)\mathrm{J}_n = (n-1)\mathrm{J}_n$

d'où $\forall n \geqslant 3, (n+2)\mathrm{J}_n = (n-1)\mathrm{J}_{n-2}$.

$n = 2,\ \mathrm{J}_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

On a : $u'(x) = 1$; choisissons $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2 &= \left[-\frac{1}{3}x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx\right) \\ &= \frac{1}{3}(\ \mathrm{J}_0 - \mathrm{J}_2)\end{aligned}$$

$3\ \mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_0 - \mathrm{J}_2\ 4\ \mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_0$. Par conséquent la formule est vraie pour $n = 2$.

2. $\forall n \geqslant 2,\ \mathrm{J}_n = \frac{n-1}{n+2}\ \mathrm{J}_{n-2}$.

On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{J}_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2}\ \mathrm{J}_{2p-2}$

$\mathrm{J}_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p}\ \mathrm{J}_{2p-4}$

$$J_4 = \frac{3}{6}J_2$$
$$J_2 = \frac{1}{4}J_0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{2p} &= \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \ldots\ldots \times \frac{2p-3}{2p} \times \frac{2p-1}{2p+2}\ \mathrm{J}_0 \\ &= \frac{1\times3\times\ldots\ldots\times(2p-3)(2p-1)}{4\times6\times\ldots\ldots\times(2p)(2p+2)} \times \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

On démontre de même que :

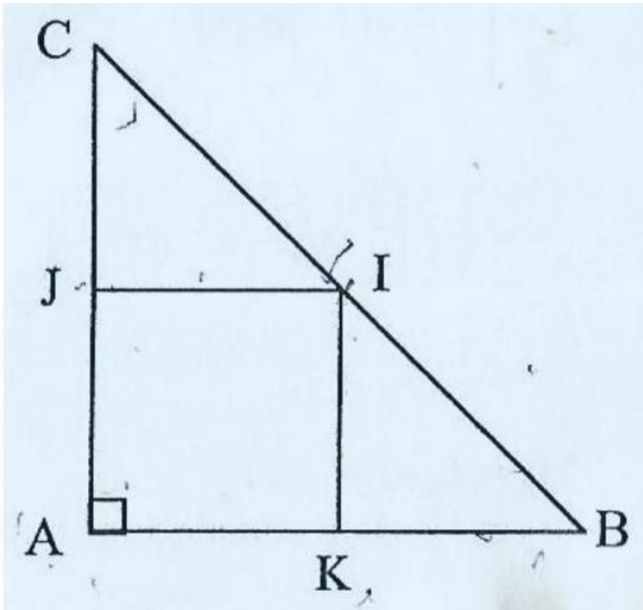
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathrm{J}_{2p+2} = \frac{2\times4\times6\times\ldots\ldots\times(2p)}{3\times5\times7\ldots\ldots\times(2p+3)}$$

Remarque : les démonstrations peuvent être faites par récurrence.

EXERCICE 2

1. a. $f(\mathrm{K}) = r(t(\mathrm{K}))$

K et J étant les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{AC}]$, on a $\overrightarrow{\mathrm{KJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (Droites des milieux) Donc $t(\mathrm{K}) = \mathrm{J}$.



IJAK est carré direct donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK}}) = \frac{\pi}{2} \quad et \ IJ = IK$

Par suite $r(\mathrm{J}) = \mathrm{K}$.

D'où $(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$.

$g(\mathrm{J}) = t(r(\mathrm{J}))$

$= t(\mathrm{K}) \mathrm{car}\, r(\mathrm{J}) = \mathrm{K}$.

$= \mathrm{J}$ car $t(\mathrm{K}) = \mathrm{J}$ d'après ce qui précède.

b. La composée d'une rotation d'angle non nul α et d'une translation est une rotation d'angle α.

Par conséquent, f est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$; g est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. f^{-1} est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

La somme des angles de f^{-1} et de g étant nulle, go f^{-1} est une translation.

b. On a $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{\mathrm{KI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

IJAK est un carré direct, donc $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{KA}}, \overrightarrow{\mathrm{KI}}) = -\frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} \text{KA} = \text{KI} \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\text{KA}}, \overrightarrow{\text{KI}}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc $f^{-1}(\text{ A}) = \text{I}$.

Déterminons $g(\text{I})$.

On a $\begin{cases} \text{JI} = \text{JC} \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\text{JI}}, \overrightarrow{\text{JC}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc $g(\text{I}) = \text{C}$

Par conséquent $g \circ f^{-1}(\text{ A}) = \text{C}$

$g \circ f^{-1}$ est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$.

3. D'après 2.b., $f^{-1}(\text{ A}) = \text{I}$ donc $f(\text{I}) = \text{A}$

$(\text{KI}) \perp (\text{IJ})$ alors $f(\text{KI}) \perp f(\text{IJ})$

donc $(\text{KA}) \perp \text{f(IJ)}$

$f(\text{IJ})$ est la perpendiculaire à (KA) en A, c'est-à-dire (AC).

4. a. $[g \circ f^{-1}(\text{M}_1) = \text{M}_2] \Leftrightarrow [\text{MM}_2 = \overrightarrow{\text{AC}}]$ car g of f^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   b. $M \in (\text{II}) \Rightarrow M_1 \in (AC) \text{car} f(\text{IJ}) = (\text{AC})$ d'après 3 .

$\Rightarrow M_1, M_2, A$ et C sont alignés car $\overrightarrow{\text{M}_1\text{M}_2} = \overrightarrow{\text{AC}}$ d'après 4.a.

M_1, M_2, A et C sont alignés $\Rightarrow \text{M}_1 \in (\text{AC})$

$\Rightarrow \text{M} \in (\text{IJ}) \text{car} f(\text{II}) = (\text{AC})$ et f bijective.

c. Puisque M n'appartient pas à (II) alors M_1, M_2, A et C sont non alignés d'après 4.b. Et puisque $\overrightarrow{\text{M}_1\text{M}_2} = \overrightarrow{\text{AC}}$, alors ACM_2M_1 est un parallélogramme.

PROBLÈME

1. Étude d'une fonction auxiliaire
   a. $\forall t \in [0; +\infty[, g'(t) = -1 + 2e^{-2t}$

$$
\begin{aligned}
g'(t) = 0 &\Leftrightarrow -1 + 2e^{-2t} = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\ln 2 \\
g'(t) > 0 &\Leftrightarrow -1 + 2\text{e}^{-2t} > 0 \\
&\Leftrightarrow e^{-2t} > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{2}\ln 2 \\
g'(t) < 0 &\Leftrightarrow t > \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$ $\lim_{t\to+\infty} g(t)=-\infty$ car $\lim_{t\to+\infty}(1-t)=-\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t}=0$.
b. g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\ 0;\frac{1}{2}\ln 2\ ]$,

$g\left(\left[0;\frac{1}{2}\ln 2\right]\right)=\left]0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

0 n'appartient pas à l'intervalle $\left]\ 0;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$, l'équation $g(x)=0$ n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $];\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2[$.
g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$, g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}1\text{n}2,+\infty\right[$ sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

0 appartient à l'intervalle $\left]\text{-}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right[$.

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2, g(1)=-e^{-2}, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\times g(1)<0.$

Donc $\frac{\ln 2}{2}<\alpha\leqslant 1$
c. $\forall t\in[0,+\infty[,(g(t)=0\Leftrightarrow t=0$ ou $t=\alpha)$

$\forall t\in[0,+\infty[,(g(t)>0\Leftrightarrow t\in]0;\alpha[)$

$\forall t\in[0,+\infty[,(g(t)<0\Leftrightarrow t\in]\alpha;+\infty[)$
d. $g(0{,}79)\simeq 0{,}004$

$g(0{,}8)\simeq -0{,}0019$

$g(0{,}79)\times g(0{,}8)<0$

Donc : $0{,}79\leqslant\alpha\leqslant 0{,}8$

2. Sens de variation de f

$\forall x\in]0;+\infty\left[,\ f'(x)=\left(e^{2/x}-1\right)^{1/2}-\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{2/x}-1\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{2/x}\right.$
$=\left(e^{2/x}-1\right)^{-1/2}\left[e^{2/x}-1-\frac{1}{x}e^{2/x}\right]$
$=\left(\mathrm{e}^{2/x}-1\right)^{-1/2}e^{2/x}\left[1-\mathrm{e}^{-2/x}-\frac{1}{x}\right]$
$=\left(\mathrm{e}^{2/x}-1\right)^{-1/2}e^{2/x}g\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x\in]0;+\infty[$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\alpha$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \alpha$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\alpha}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \alpha$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha}$

Donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{\alpha}\right]$.

3. Limite de fen 0 .
   a. $\forall x > 0, \ln(f(x)) = \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2/x} - 1\right)$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left[e^{2/x}\left(1 - e^{-2/x}\right)\right]$
$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-2/x}\right)$
$= \frac{1}{x}(x\ln x + 1) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - e^{-2/x}\right)$

b. $\lim_{x\to 0}(x\ln x + 1) = 1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(x\ln x + 1) = +\infty$

on a également :

$\lim_{x\to 0}\left(1 - e^{-2/x}\right) = 1$ car $\lim_{u\to +\infty} e^{-u} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(1 - e^{-2/x}\right)\right) = 0.$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty.$

4. Étude de f en $+\infty$

a. Soit $\varphi: [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto e^t - et - 1$

$\forall t \in [0;1], \varphi'(t) = e^t - e$

$\forall t \leqslant 1, e^t \leqslant e$, d'où : $\varphi'(t) \leqslant 0$, il s'ensuit que φ est décroissante sur $[0;1]$

$\varphi(0) = 0$; donc $\forall t \in [0;1], \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 0.$

Il vient que : $\forall t \in [0;1], e^t - 1 \leqslant te$

$\forall t \in [0;1], e^t \geqslant 1$ donc $e^t - 1 \geqslant 0.$

On déduit que : $\forall t \in [0;1], 0 \leqslant e^t - 1 \leqslant te$

b. $\forall u \in [0;1], 0 \leqslant \int_0^u (e^t - 1)dt \leqslant \int_0^u tedt$

or $\int_0^u (e^t - 1)dt = [e^t - t]_0^u = e^u - (u+1)$

$\int_0^u tedt = e\dfrac{u^2}{2}$

d'où : $\forall u \in [0,1], 0 \leqslant e^u - (u+1) \leqslant e\frac{u^2}{2}$

on a alors $\forall u \in [0;1], u + 1 \leqslant e^u \leqslant 1 + u + e\frac{u^2}{2}$

c. $\forall x \geqslant 2, [f(x)]^2 - 2x = x^2\left(\mathrm{e}^{2/x} - 1\right) - 2x$

$\forall x \geqslant 2, 0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$, donc $\frac{2}{x} \in [0,1]$ d'après ce qui précède :

$1 + \dfrac{2}{x} \leqslant \mathrm{e}^{2/x} \leqslant 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2e}{x^2}$

soit $\frac{2}{x} \leqslant \mathrm{e}^{2/x} - 1 \leqslant \frac{2}{x} + \frac{2e}{x^2}$ et donc $2x \leqslant x^2\left(e^{2/x} - 1\right) \leqslant 2x + 2e$

et alors $0 \leqslant x^2\left(e^{2/x} - 1\right) - 2x \leqslant 2e$ on conclut que :

$\forall x \geqslant 2,\ 0 \leqslant [f(x)]^2 - 2x \leqslant 2e$

d. $\forall x \geqslant 2,\ f(x) - \varphi(x) = \frac{[f(x)]^2 - 2x}{f(x) + 2x}$

on a : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \geqslant 0$ donc :

on conclut d'après 4.c. que : $\forall x \geqslant 2, f(x) \geqslant \varphi(x)$

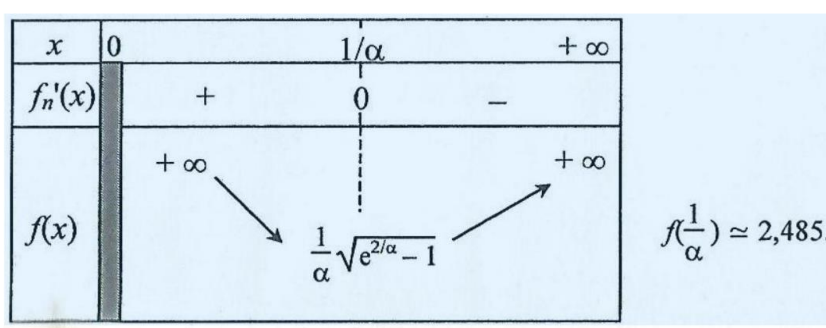
De $\lim \sqrt{2x} = +\infty$, on déduit que

$x \to +\infty$

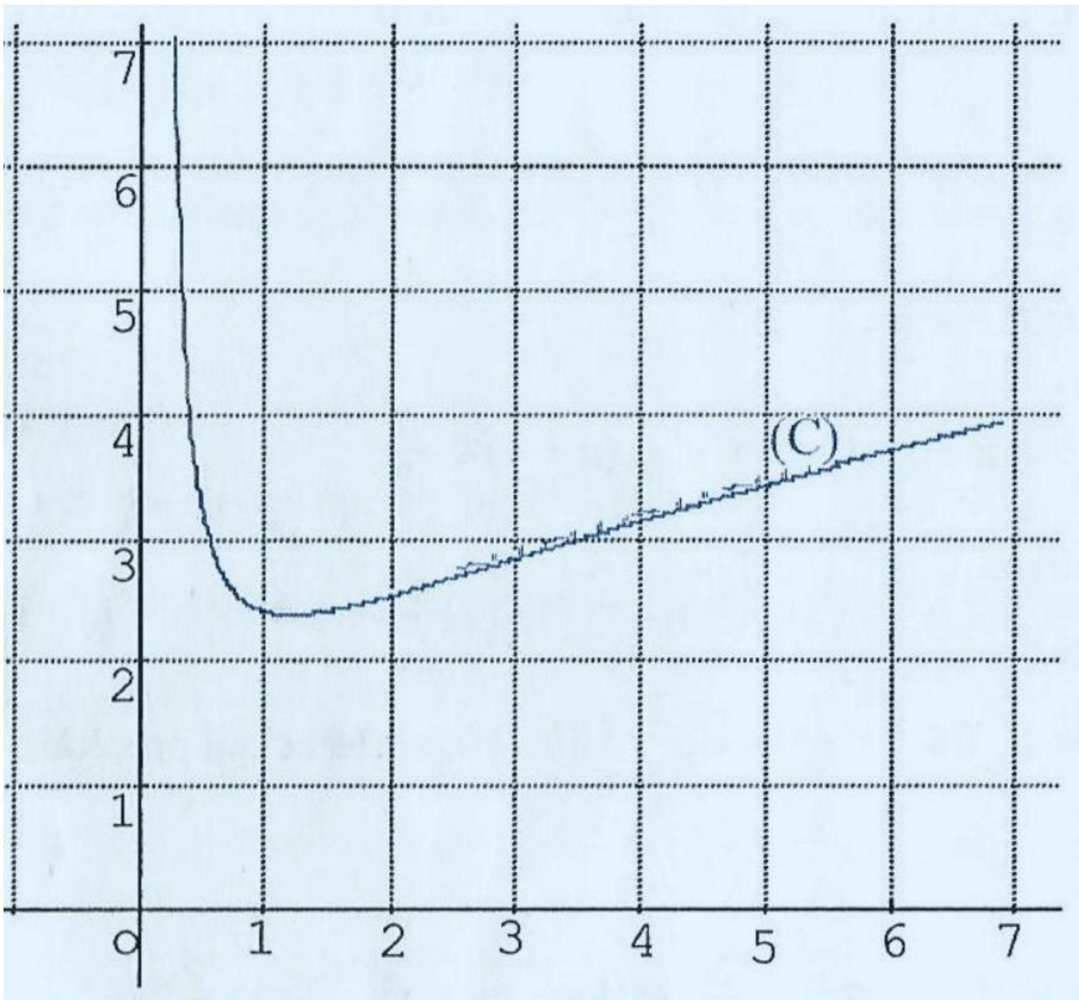
$\lim f(x) = +\infty$ (limite par comparaison).

$x \to +\infty$

5. a. **Tableau de variation de** f.

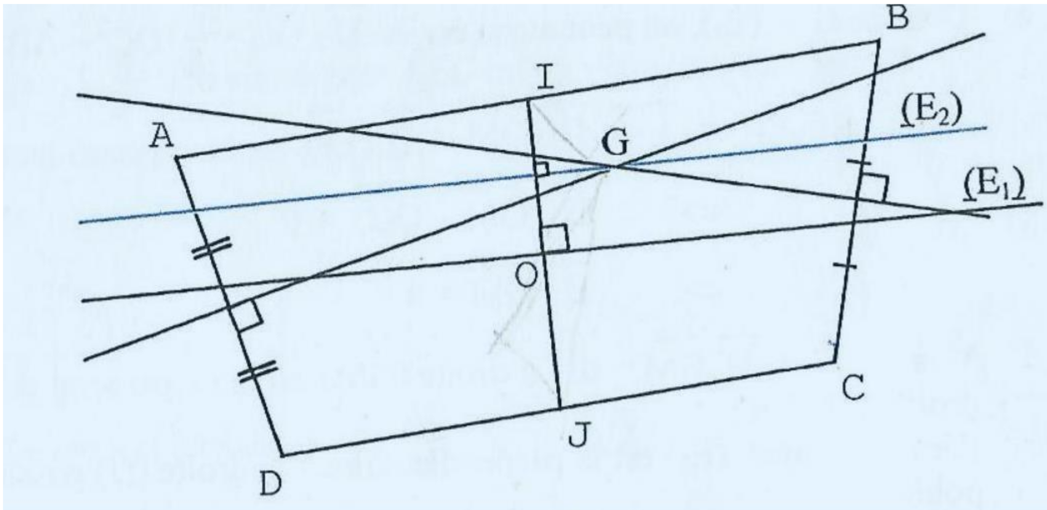


b. Courbe de f



CORRECTION SESSION NORMALE 2000 SERIE C

EXERCICE 1



1. $M \in (E_1) \Leftrightarrow \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \|$

$\Leftrightarrow \ \| 2\overrightarrow{MI} \| = \| 2\overrightarrow{MJ} \|$

$\Leftrightarrow \ MI = MJ$

(E_1) est la médiatrice du segment [IJ].

2. G appartient à la médiatrice de $[AD]$, donc $GA = GD$. G appartient à la médiatrice de $[BC]$, donc $GB = GC$.

Alors $GA^2 + GB^2 = GD^2 + GC^2$.

3. a. $G \in (E_2)$ donc (E_2) est non vide.

b.

$$\begin{aligned}
M \in (E_2) &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}\overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})^2 + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2 \\
&\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2 \\
&\Leftrightarrow 2(MI^2 - MJ^2) = \frac{DC^2}{2} - \frac{AB^2}{2} \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\right) \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}(DC^2 - AB^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{J} = \frac{1}{4}(DC^2 - AB^2) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{8}(DC^2 - AB^2)
\end{aligned}$$

Par conséquent $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM}$ est une constante réelle.

c. Comme $\mathrm{G} \in (\mathrm{E}_2)$, on peut aussi écrire $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{8}(\mathrm{DC}^2 - \mathrm{AB}^2)$

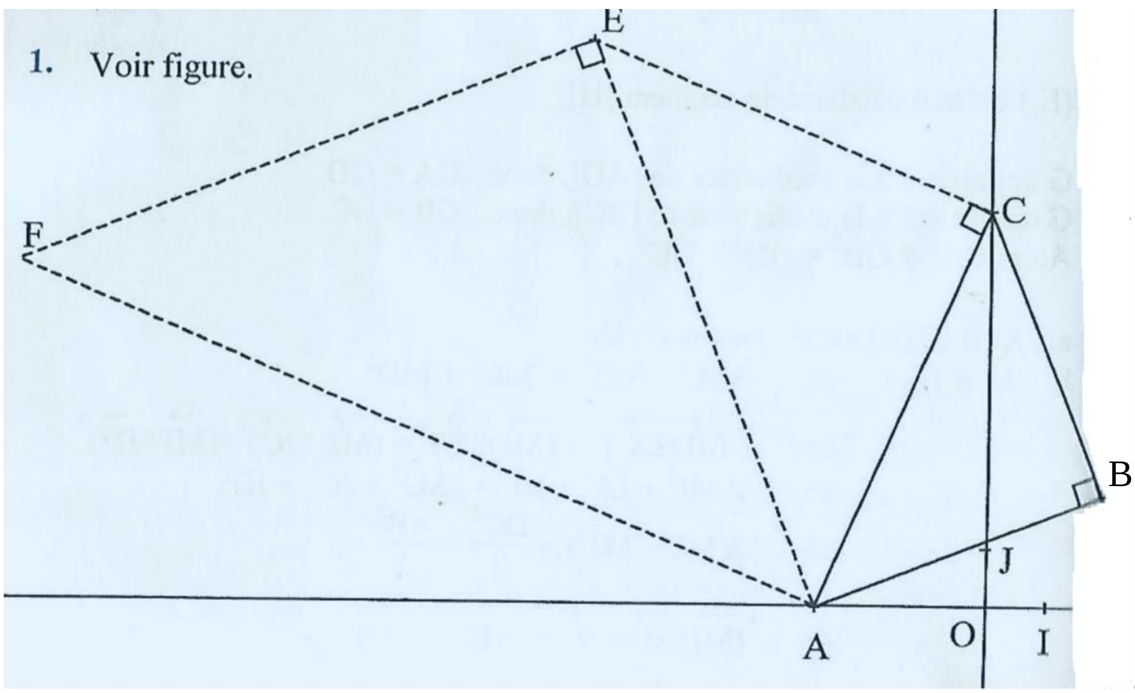
Alors $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OG}}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GM}} = 0$

d. $\mathrm{M} \in (\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GM}} = 0$. La droite (GM) est donc perpendiculaire à la droite (IJ). Par conséquent (E_2) est la perpendiculaire à la droite (II) passant par le point G.

EXERCICE 2



2. $|z_A - z_\mathrm{B}| = \sqrt{29}, |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}| = \sqrt{29}$ d'où $|z_\mathrm{A} z_\mathrm{B}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|$

3. $\frac{z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}} = \frac{-5-2i}{-2+5i} = \frac{i(-2+5i)}{-2+5i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

4.. $|z_{A} - z_B| = |z_C - z_B| \Leftrightarrow AB = BC$. Donc ABC est un triangle isocèle en B. Un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$. Donc une mesure de l'angle ($\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}$) est égale à $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent ABC est un triangle rectangle en B. On peut donc conclure que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

5. a.

$\overset{S}{\curvearrowright}$

A	A
B	C

Le rapport de S est égal à $\frac{AC}{AB}$; $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.

L'angle de S est égal à l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$;

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+7i}{5+2i} = \frac{29+29i}{29} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

d'où $\mathrm{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

S est donc la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b.

$\overset{S}{\curvearrowright}$

A	A
B	C
C	E
E	F

$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\sqrt{2}$. Or $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$, puisque ABC est un triangle isocèle. Le segment [CE] est l'image du segment [BC] par la similitude S, on peut écrire alors que $\mathrm{CE} = \mathrm{BC}\sqrt{2}$. D'où $\mathrm{CE} = \mathrm{AB}\sqrt{2} = \mathrm{AC}$.

Le triangle ACE est un triangle isocèle en C.

Comme S est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$, on en déduit que $\mathrm{mes}(\widehat{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}) = \frac{\pi}{4}$
ACE est donc un triangle isocèle en C où les angles à la base mesurent $\frac{\pi}{4}$. ACE est donc un triangle rectangle.

D'où ACE est un triangle isocèle rectangle en C. De la même façon, on peut montrer que AEF est un triangle isocèle rectangle en C.

Cela permet la construction des points E et F.

6.

S

A_0	A_0
A_1	A_2
A_2	A_3
A_3	A_4
A_4	A_5
A_{n-1}	A_n
A_n	A_{n+1}

a.

$\left|z_{A_2} - z_{A_0}\right| = |z_C - z_A| = AC = \sqrt{58}$

$R_2 = \left|z_{A_3} - z_{A_2}\right| = |z_E - z_C| = EC = AC = \sqrt{58}$

b. $A_2\ A_3$ est le triangle ACE. On a montré qu'il est isocèle rectangle en C.

c. D'après la similitude directe S :

$z_{A'+1} - z_A = (z_{A'} - z_A)\sqrt{2}e^{i\pi/4} = (1+i)(z_{A^n} - z_A)$

d'où $z_{An+1} - z_{An} + z_{A_A} - z_A = (1+i)(z_{An} - z_A)$

$z_{An+1} - z_{An} = i(z_{An} - z_A)$

alors $|z_{An+1} - z_{An}| = |z_{An} - z_A|$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{A_nA}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

ce qui démontre que $AA_n = A_n\ A_{n+1}$ et $(A_n\ A \perp A_n\ A_{n+1})$

$AA_n\ A_{n+1}$ est un triangle isocèle et rectangle en A_n.

d. $R_n = \left|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}\right| = A_n\ A_{n+1} = AA_n = \sqrt{2}\ A_{n-1} = \sqrt{2}\ A_{n-1}\ A_n$

car $A_{n-1}A_n$ est un triangle isocèle en A_{n-1}.

$R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$.

Par suite, $R_n = \sqrt{2}R_{n-1}$. D'où $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.
e. $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ dont le premier terme R_1 vaut $\sqrt{29}$.

D'où $R_n = R_1(\sqrt{2})^{n-1}$

$R_n = \sqrt{29}(2)^{\frac{n-1}{2}}$

PROBLEME
PARTIE A

1. a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1 - x)e^{1-x}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - x$ car $e^{1-x} > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c. Tracé de $(\mathcal{C}_f)$

Voir figure.

2. a. $g(x) = |x|e^{|1-x|}$

si $x \in]-\infty; 0]$ alors $g(x) = -xe^{1-x}$

si $x \in [0; 1]$ alors $g(x) = xe^{1-x}$

si $x \in [1; +\infty[$ alors $g(x) = xe^{x-1}$

b. Sur l' intervalle $[0; 1], (\mathcal{C}_g) = (\mathcal{C}_f)$ car $g(x) = f(x)$.

Sur l'intervalle $]-\infty; 0], (\mathcal{C}_g)$ est le symétrique de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à 1 'axe des abscisses car $g(x) = -f(x)$.
c. $\forall x \in [1, +\infty[, h'(x) = (1 + x)e^{x-1}$. Alors $\forall x \in [1, +\infty[, h'(x) > 0$.

Donc h est strictement croissante sur cet intervalle.
d.

- $g(0) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} -e^{1-x} = -e$,

d'où g est dérivable à gauche en 0 et on a : $g'_g(0) = -e$.

$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} e^{1-x} = e,$

d'où g est dérivable à droite en 0 on a $ig'_{\mathrm{d}}(0) = e. g$ n'est pas dérivable en 0 car $g'_{\mathrm{g}}(0) \neq g'_{\mathrm{d}}(0)$

- $g(1) = 1.$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{xe^{x-1} - 1}{x - 1}$$

posons $u = x - 1$, alors

$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(u+1)e^{u}-1}{u} = \lim_{u\to 0} e^{u} + \frac{e^{u}-1}{u} = 2$ car $\lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1.$

g est dérivable à droite de 1 et $g'_{\mathrm{d}}(1) = 2.$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{xe^{x-1} - 1}{x - 1}$$

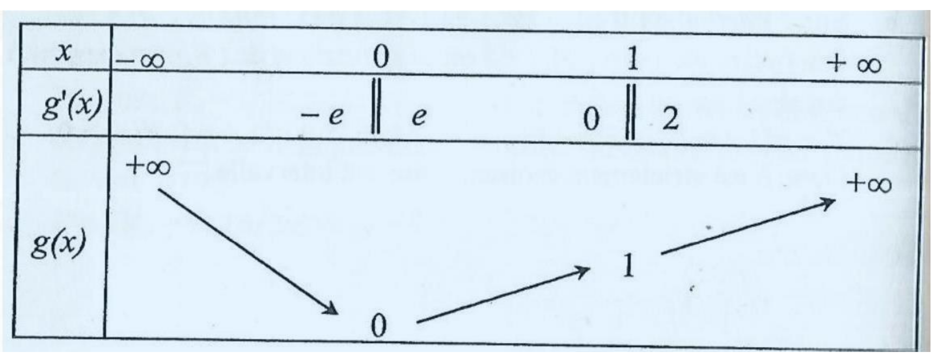
posons $u = 1 - x$

$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(1-u)e^{u}-1}{-u} = \lim_{u\to 0} e^{u} + \frac{e^{u}-1}{u} = 0$ car $\lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1.$

g est donc dérivable à gauche en 1 et $g'_{g}(1) = 0$

$g'_{g}(1) \neq g'_{d}(1)$ donc g n'est pas dérivable en 1 .

e.



f. Voir figure.

Partie B

1. $\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{n}}{n} nxe^{-nx} = 0$ car $\lim_{x\to +\infty} nxe^{-nx} = \lim_{u\to +\infty} ue^{-u} = 0$

2. $\lim_{x\to -\infty} f_n(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to -\infty} n(1 - x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} e^{x} = +\infty.$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} e^{n(1-x)} = +\infty$$

donc $(\mathcal{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction (OJ).

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = e^{n(1-x)} - nxe^{n(1-x)}$

$= (1 - nx)e^{n(1-x)}$

b. Le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $1 - nx$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{si}\, x = \frac{1}{n},$

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \text{si}\, x < \frac{1}{n},$

$f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow \text{si}\, x > \dfrac{1}{n};$

d'où le **tableau de variation**

x	$-\infty$		$1/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n}e^{n-1}$	$\searrow$	0

c. $f_n(x) = x \Leftrightarrow x\left(1 - e^{n(1-x)}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0$ ou $e^{n(1-x)} = 1$

$\Leftrightarrow\ x = 0$ ou $n(1 - x) = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0$ ou $x = 1$

$\mathrm{S} = \{0,1\}$

d. D'après $3.\mathrm{c}, f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ donc les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par les points $\mathrm{O}(0,0)$ et $\mathrm{A}(1,1)$.

4. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = xe^{n(1-x)}(e^{1-x} - 1)$

$$\begin{aligned} e^{1-x} - 1 > 0 &\Leftrightarrow e^{1-x} > 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

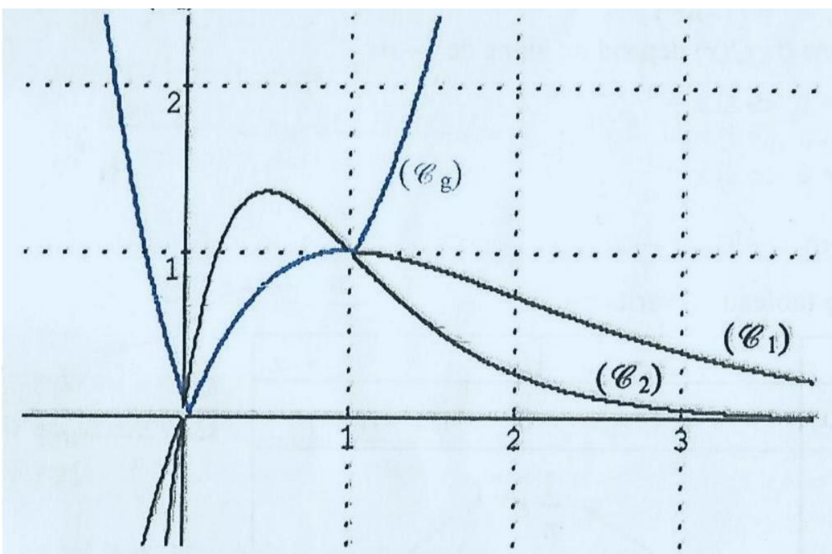
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{1-x}-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty;0[\cup]1,+\infty[(\mathcal{C}_{n+1})$ est en dessous de $(\mathcal{C}_n)$.

Sur $]0;1[,(\mathcal{C}_{n+1})$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_n)$.

$(\mathcal{C}_{n+1})$ et $(\mathcal{C}_n)$ se coupent en $\mathrm{O}(0,0)$ et $\mathrm{A}(1,1)$.

5. Tracé de $(\mathcal{C}_2)$



6. a. $I_n(\alpha)=\int_0^\alpha f_n(x)dx=\int_0^\alpha x\mathrm{e}^{n(1-x)}dx$

Posons $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{\eta(1-x)}$

On a $u'(x)=1$; choisissons $v(x)=-\frac{1}{n}e^{n(1-x)}$.

$\mathrm{I}_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}\right]_0^\alpha+\frac{1}{n}\int_0^\alpha \mathrm{e}^{n(1-x)}dx$

$\mathrm{I}_n(\alpha)=\left[-\frac{x}{n}e^{n(1-x)}-\frac{1}{n^2}e^{n(1-x)}\right]_0^\alpha$

$=-\frac{\alpha}{n}e^{n(1-\alpha)}-\frac{1}{n^2}e^{n(1-\alpha)}+\frac{1}{n^2}e^n.$

b. $\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{I}_n(\alpha)=\frac{1}{n^2}e^n.$

EXERCICE1

1. L'ensemble de définition de f est $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et on a :

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) = 1+\tan^2 x.$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) > 0.$

f est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$= \frac{1}{1+(f\circ g(x))^2}$

$= \frac{1}{1+x^2}.$

3. calcul de I

$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2}$

$= 1-\frac{1}{1+x^2}$

d'où : $\mathrm{I} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{0}(1-g'(x))dx$

$= [x-\mathrm{g}(x)]_{-1}^{0}$

$= 1-(g(0)-g(-1))$

$= 1-\frac{\pi}{4}.$

Calcul de K

$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{gosin})'(x) = \mathrm{g}'(\sin x)\times\cos x = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

d'où $K = \left[(g\circ\sin(x)\right]_0^{\pi/2}$

$= (g\circ\sin)\left(\frac{\pi}{2}\right) - (g\circ\sin)(0)$

$= g(1)-g(0)$

$K = \frac{\pi}{4}$

$= \cos x \times \mathrm{g}'(\sin(x))$

$= (\mathrm{gosin})'(x)$

EXERCICE 2

1. Il y a dans l'urne, 5 boules rouges et 10 boules blanches. Le nombre de cas possibles est donc C_{15}^4.

$C_{15}^4 = 1365.$

L'événement A est réalisé si on tire 2 boules rouges parmi 5 et 2 boules blanches parmi 10.

Le nombre de cas favorables à A est donc $C_5^2 \times C_{10}^2$

$C_5^2 \times C_{10}^2 = 450.$

$$P(A) = \frac{450}{1365} = \frac{30}{91}$$

Il est plus aisé de calculer la probabilité de B en passant par le calcul de celle de $\bar{B}$. $\overline{B}$ est lévénement : "n'obtenir aucune boule blanche"; c'est-à-dire "obtenir 4 boules rouges".

Le nombre de cas favorables à $\overline{B}$ est C_5^4.

$C_5^4 = 5.$

$$P(\overline{B}) = \frac{5}{1365} = \frac{1}{273}$$

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{273}$$
$$= \frac{272}{273}.$$

2. a. Le nombre de cas possibles est C_{3n}^2

$C_{3n}^2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$

On obtient deux boules de même couleur en obtenant soit 2 boules rouges parmi n soit 2 boules blanches parmi $2n$.

Le nombre de cas favorables à la réalisation de cet événement est $C_n^2 + C_{2n}^2$

$$C_n^2 + C_{2n}^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)}{2}$$
$$C_n^2 + C_{2n}^2 = \frac{n(n-1)+2n(2n-1)}{2}$$
$$= \frac{n(5n-3)}{2}$$

d'où : $P_n = \frac{C_n^2 + C_{2n}^2}{C_{3n}^2}$

$$= \frac{5n-3}{3(3n-1)}$$

b. P_n étant une probabilité, alors elle est inférieure ou égale à 1.

La suite $(\mathrm{P}_n)_{n>2}$ est donc majorée par 1 .

Sens de variation de $(\mathrm{P}_n)_{n>2}$

Considérons la fonction f dérivable sur $[2;+\infty[$ et définie par :

$$f(x)=\frac{5x-3}{3(3x-1)}$$

$$\forall x \in \left[2;+\infty\right[, f'(x)=\frac{12}{9(3x-1)^2}=\frac{4}{3(3x-1)^2}$$

$\forall x \in [2,+\infty[,\ f'(x)>0.$

f est donc strictement croissante. Par conséquent,

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, f(n+1)>f(n);$

c'est-à-dire $\mathrm{P}_{n+1}>\mathrm{P}_n$.

La suite $(\mathrm{P}_n)_{n>2}$ est donc strictement croissante.

Autre méthode : on peut étudier le signe de $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n$.
c. La suite $(\mathrm{P}_n)_{n>2}$ est croissante et majorée donc elle converge.

$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}_n=\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{3(3x-1)}$$
$$=\frac{5}{9}.$$

PROBLĖME
PARTIE A

1. On désigne par z_{M} l'affixe d'un point M et par $z_{\vec{v}}$ celle d'un vecteur $\vec{v}$.

$v_0=z_{\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}}=z_{\mathrm{M}_1}-z_{\mathrm{M}_0}=1$
$v_0=1$

$$mes\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2},\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_{\mathrm{M}_2}-z_{\mathrm{M}_1}}{z_{\mathrm{M}_1}-z_{\mathrm{M}_0}}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\arg\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\ [2\pi]$$

d'où $\arg\left(\frac{v_1}{v_0}\right)\equiv\theta[2\pi]$ (1)

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right\|=r\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}\right\| \Leftrightarrow |v_1|=r|v_0|$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{v_1}{v_0}\right|=r \quad (2)$$

de (1) et (2), on déduit que : $\frac{v_1}{v_0} = re^{i\theta}$

Donc $v_1 = v_0 re^{i\theta}$

Par conséquent $v_1 = re^{i\theta}$ car $v_0 = 1$.

2. a. $\text{mes}(\widehat{\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n, \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}}) \equiv \arg\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)[2\pi]$

$$\equiv \theta[2\pi]$$

D'où $\arg\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ (3)

Or $\|\overrightarrow{\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}}\| = r\|\overrightarrow{\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n}\|$, donc

$|v_n| = r|v_{n-1}|$ et par suite $\left|\frac{v_n}{v_{n-1}}\right| = r$ (4)

De (3) et (4) on déduit que : $\frac{v_n}{v_{n-1}} = re^{i\theta}$

On conclut que $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $re^{i\theta}$.

b. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = r^n e^{in\theta} v_0$

$= r^n e^{in\theta}$ car $v_0 = 1$

3. Voir figure.

Partie B

1. $z_0 = 0$ car $\mathrm{M}_0 = 0$

$v_0 = 1$ donc $z_1 - z_0 = 1$

Par conséquent $z_1 = 1$

$$v_1 = re^{i\theta}$$
$= z_2 - z_0$ donc $z_2 = z_0 + re^{i\theta}$
$$z_2 = 1 + re^{i\theta}$$

2. $v_n = z_{n+1} - z_n$

$v_{n-1} = z_n - z_{n-1}$

$v_{n-2} = z_{n-1} - z_{n-2}$
…………………………….
…………………………….
$v_1 = z_2 - z_1$
$v_0 = z_1 - z_0$

En ajoutant membre à membre les égalités ci-dessus, on obtient :

$z_n = v_0 + v_2 + \cdots + v_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

3. z_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme let de raison $re^{i\theta}$, on a donc :

$\forall n \geqslant 1, z_n = \dfrac{1-\left(re^{i\theta}\right)^n}{1-re^{i\theta}} \text{car } \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \frac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

4. a. $z_n = \frac{1-r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} - \frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

d'où : $z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}} = -\frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

par conséquent $\left|z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}\right| = \frac{r^n}{|1-re^{i\theta}|}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ car $0 < r < 1$, d'où :

$\lim_{n\to+\infty} \left|z_n - \frac{1}{1-re^{i\theta}}\right| = 0.$

b. On a : $\lim_{n\to+\infty} |z_n - \omega| = 0$ d'après 4.a.

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0.$

5. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, z'_n = z_n - \omega$

$= -\frac{r^n e^{in\theta}}{1-re^{i\theta}}$

b. $z'_n = re^{i\theta}\left(-\frac{r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$

$= re^{i\theta} z'_{n-1}.$

Posons $a = re^{\prime\theta}, a$ est non nul.

Il existe donc un nombre complexe non nul a tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, z'_n = a z'_{n-1}$

c. De l'égalité $z'_n = a z'_{n-1}$, on a : $z_n - \omega = re^{i\theta}(z_{n-1} - \omega)$ d'où f est la similitude directe de centre Ω, de rapport r et d'angle θ. Cette similitude transforme M_{n-1} en M_n.

d. $\omega = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$

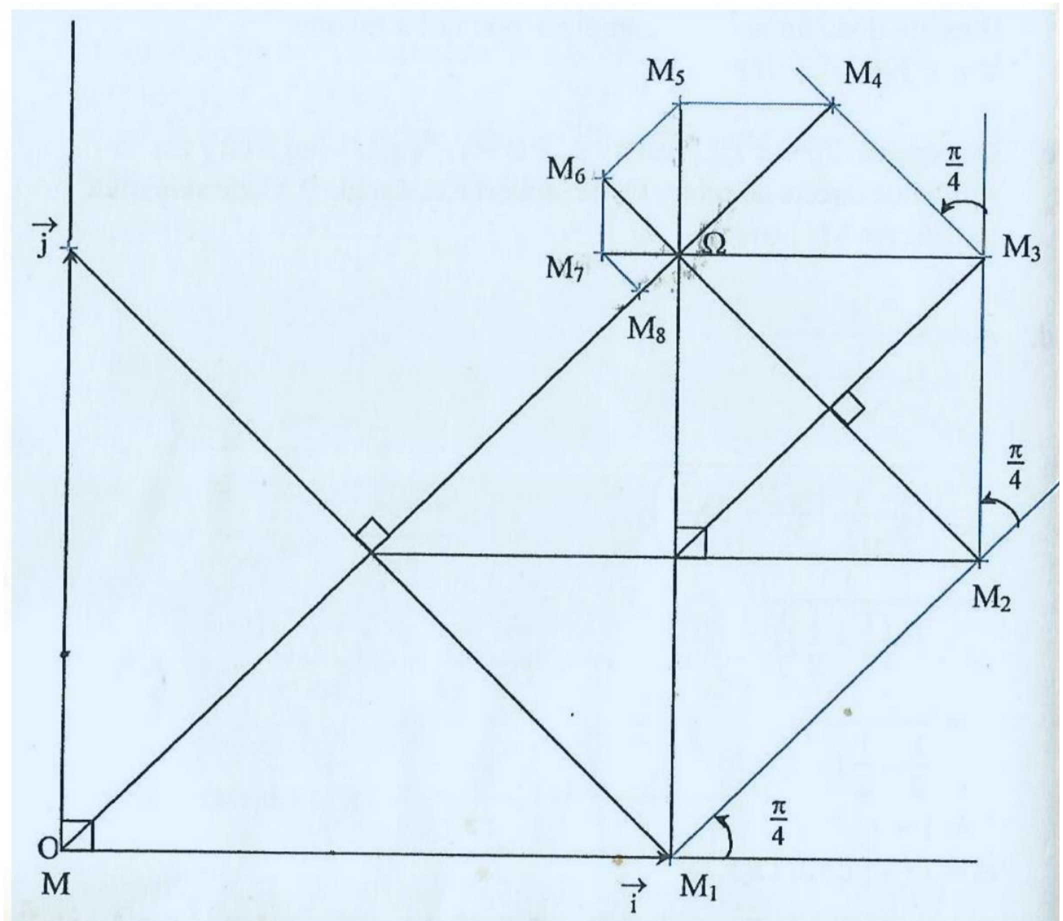
$= \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$

$= 1 + i$

$\omega = 1 + i;\quad \text{donc}\, \Omega(1,1)$

f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1 + i$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

De l'égalité $f(\mathrm{M}_{n-1}) = \mathrm{M}_n$, on déduit que le triangle $\Omega\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n$ est rectangle isocèle en M et de sens direct.



CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1999 SÉRIE C

EXERCICE 1

1. $4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7].$

Par conséquent,

$\sin n \equiv 0[3]$ alors $4^n \equiv 1[7]$.

si $n \equiv 1[3]$ alors $4^n \equiv 4[7]$.

si $n \equiv 2[3]$ alors $4^n \equiv 2[7]$.

En conclusion, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7 est :

$1 \sin n \equiv 0[3]$,

$4 \sin \equiv 1[3]$,

$2 \sin n \equiv 2[3]$.

2. $1999 = 7 \times 285 + 4$

$1999 \equiv 4[7]$

3. $1999^{132} \equiv 4^{132}[7]$

or $132 \equiv 0[3]$

donc le reste de la division euclidienne de 1999^{132} par 7 est 1 .

4. $\mathrm{A}_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$

$123 = 7 \times 17 + 4$ donc $123 \equiv 4[7]$

par conséquent,

$\mathrm{A}_k = 4^k + \left(4^k\right)^2 + \left(4^k\right)^3 + \left(4^k\right)^4 + \left(4^k\right)^5[7]$

$\mathbf{1}^{\text{er}}$ cas : si $k \equiv 0[3]$ alors $4^k \equiv 1[7]$

donc $\mathrm{A}^k \equiv 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5[7]$

$\mathrm{A}_k \equiv 5[7]$.

2^{e} cas si $\mathrm{k} \equiv 1[3]$ alors $4^{\mathrm{k}} \equiv 4[3]$

donc $\mathrm{A}_k \equiv 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5[7]$

$\mathrm{A}_k \equiv 6[7]$

3^{e} cas si $k \equiv 2[3]$ alors $4^k \equiv 2[7]$

donc $\mathrm{A}_k \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5[7]$

$\mathrm{A}_k \equiv 6[7]$

Le reste de la division euclidienne de A_k par 7 est :

- 5 si $k \equiv 0[3]$.
- 6 si $k \equiv 1[3]$ ou $k \equiv 2[3]$.

EXERCICE 2

1. $f_n(x) = x - n\ln x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - n\ln x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{n\ln x}{x}\right) = +\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2. $\forall x \in]0; +\infty\left[, f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}\right.$.

$= \frac{x-n}{x}$.

3. $f_n'(x) = 0 \iff x = n$

$f_n'(x) < 0 \iff 0 < x < n$

$f_n'(x) > 0 \iff x > n$

f_n est donc strictement décroissante sur $]0; n]$, et strictement croissante sur $[n; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

4. f_n est continue et strictement décroissante sur $]0; n[$, et $f_n(]0; n[) =]n(1 - \ln(n)); +\infty[$

f_n réalise donc une bijection de $]0; n[$ sur $]n(1 - \ln(n)); +\infty[$ 0 appartient à l'intervalle $]n(1 - \ln(n)); +\infty[$ car $n(1 - \ln(n))$ est strictement négatif pour tout n supérieur ou égal à 3 .

Donc l'équation $x \in]0; n[, f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n.

5. $f_n(1) = 1$

$f_n(e) = e - n$ et $e - n < 0$

donc $f_n(1) \times f_n(e) < 0$

par suite $1 < a_n < e$

6. $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$

$a_{n+1} - (n+1)\ln(a_{n+1}) = 0$
$a_{n+1} = (n+1)\ln(a_{n+1})$
$f_n(a_{n+1}) = a_{n+1} - n\ln(a_{n+1})$
$= (n+1)\ln(a_{n+1}) - n\ln(a_{n+1})$
$= (n+1-n)\ln(a_{n+1})$
$= \ln(a_{n+1})$
$\ln(a_{n+1}) = f_n(a_{n+1})$

7. $f_n(a_{n+1}) - f_n(a_n) = f_n(a_{n+1})\text{car}\, f_n(a_n) = 0$ d'après 5., $a_{n+1} \in]1; e[$ d'où $\ln(a_{n+1}) > 0$ par conséquent $f_n(a_{n+1}) > f_n(a_n)\text{car}\, f_n(a_{n+1}) = \ln(a_{n+1})$ d'où $a_{n+1} < a_n$ La suite (a_n) est donc décroissante.

8. La suite (a_n) est décroissante et minorée par 1 , donc elle est convergente.

9. D'après 5. $1 < a_n < e$ or $f_n(a_n) = 0 = a_n - n\ln(a_n)$. c'est-à-dire $a_n = n\ln(a_n)$

donc $1 < a_n < e$

$1 < n\ln(a_n) < e$

$\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$

10. $\left(\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{1/n} < a_n < e^{e/n}$

$\lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{e/n} = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n} = 0$

donc $\lim a_n = 1$ (d'après le théorème des gendarmes).

PROBLEME
PARTIE A

1. Une similitude directe conserve le rapport des distances et l'angle orienté. Par suite l'image du carré OIKJ par S est le carré OI'K'A

2. Construction des points $\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{I}', \mathrm{K}'$ (voir figure).

3. Les points I, J et A sont alignés. Donc leurs images I', A' et A sont alignés car une similitude directe conserve l'alignement.

S

O	O
J	A
I	I'
K	K'
A	A'

La similitude directe conserve le rapport des distances. Donc $\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{A'K'}}{\mathrm{AK}}$.

Démontrer que $\mathrm{OA'} = \mathrm{A'K'}$ revient à démontrer que
$\mathrm{OA} = \mathrm{AK}$

La droite (IJ) est un axe de symétrie du carré O I K J. C'est la médiatrice du segment $[\mathrm{OK}]$. A appartient à la droite (IV) donc
$\mathrm{AO} = \mathrm{AK}$.

Par conséquent $OA' = A'K_1$.

Partie B

1. K a pour couple de coordonnées $(1; 1)$ donc l'affixe z_k de K est $1 + i$

2. soit (x, y) le couple de coordonnées de A dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

$\overrightarrow{\mathrm{IA}}\binom{x-1}{y}; \overrightarrow{\mathrm{IJ}}\binom{-1}{1}$

$\mathrm{A} \in (\mathrm{IJ}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{IJ}}) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 + y = 0$

$\Leftrightarrow y = 1 - x$

$a = x + iy$

$= x + i(1 - x)$

$ia + 1 = ix - (1 - x) + 1$

$ia + 1 = x(1 + i)$

3. Un argument de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$. Un argument du réel non nul x est 0 ou $+\pi$ selon le signe de x.

$(x \neq 0$ car $A \neq J)$; par suite un argument de $x(1 + i)$ est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

Donc il existe un argument de $ia + 1$ dans la paire $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}\right\}$

4. Considérons la symétrie orthogonale $S_{(\mathrm{IJ})}$ d'axe (IJ).

$S_{(\mathrm{IJ})}$

O	K
J	J
A	A

On a $(\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA}}) = -(\widehat{\overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{KA}})$

$= (\widehat{KA}, \overrightarrow{KJ})$

car une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

5. Le vecteur image du complexe $a - (1 + i)$ est $\overrightarrow{KA}$.

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{KA}) = (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{KA})(\text{car } \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{JK})$

$= (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{KJ}) + (\overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{KA})$

$= (\hat{\pi}) - (\overrightarrow{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KJ}})$

$= (\hat{\pi}) - (\overrightarrow{(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OA}})$

$= (\hat{\pi}) - \left(\overrightarrow{OJ', \overrightarrow{OA}}\right) - (\overrightarrow{OI, \overrightarrow{OA}})$

$= (\hat{\pi}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) - (\overrightarrow{OI, \overrightarrow{OA}})$

$\text{mes}(\overrightarrow{OI, \overrightarrow{KA}}) \equiv \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]$

$\equiv 3\frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]$

donc $-\frac{\pi}{2} - \alpha$ est un argument du nombre complexe $a - (1 + i)$.

PARTIE C

1. $S(O) = O$ et $S(J) = A$.

L'écriture complexe de S est : $z' = tz + p$ où $t \in \mathbb{C}^*$.
On a :

$$\begin{cases} 0 = 0 + p \\ a = t(i) + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ t = -ia \end{cases}$$

donc $z' = -i\boldsymbol{a}z$.

2. $K' = S(K)$

$k' = -ia(1 + i)$

$A' = S(A)$
$a' = -ia^2$

3. a

$u = k' - (1+i)$

$= -ia(1+i) - (1+i)$
$= (1+i)(-ia-1)$
$= -(1+i)(ia+1)$

$$\begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \begin{cases} \arg(u) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

donc u est un imaginaire pur.

- $v = a' - k'$

$= -ia^2 + ia(1+i)$
$= -ia(a-(1+i))$

$\arg(v) \equiv -\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$
$\arg(v) \equiv -\pi [2\pi]$
donc v est un nombre réel.

b. u est un imaginaire pur donc $(\mathrm{KK'}) \perp (\mathrm{OI})$, v est un nombre réel donc ($\mathrm{K'A'}$) // (OI) donc $(\mathrm{KK'}) \perp (\mathrm{K'A'})$, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KK'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{K'A'}}$ sont orthogonaux.

4. On sait que $(\mathrm{KI}) \perp (\mathrm{OI})$ et que $(\mathrm{KK'}) \perp (\mathrm{OI})$

Donc les droites (KI) et (KK') sont confondues. Par sconséquent les points $\mathrm{K}, \mathrm{K'}$ et I sont alignés.

On sait d'après 3.a. que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KK'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{K'A'}}$ sont orthogonaux, c'estià-dire que les droites (KK') et ($\mathrm{K'A'}$) sont perpendiculaires en $\mathrm{K'}$. Donc $\mathrm{K'}$ est le projeté orthogonal de $\mathrm{A'}$ sur la droite ($\mathrm{KK'}$) c'est-à-dire sur la droite (KI).

5. Construction de $\mathrm{A'}$

On sait :

- d'après A.3. que $A' \in (\mathrm{AI'})$
- d'après C.4. que ($A'K') \perp (KK')$

$\mathrm{A'}$ est donc l'intersection de la droite ($\mathrm{AI'}$) et de la perpendiculaire à la droite (KK') en $\mathrm{K'}$.

6. On sait d'après A.4. que $OA' = A'K'$ donc $\frac{OA'}{\mathrm{K'A'}} = 1$ c' 'est-à-dire $\frac{d(A',O)}{d(A',(IK))} = 1$

donc $\mathrm{A'}$ appartient à la parabole de foyer O et de directrice (IK).

PARTIE D

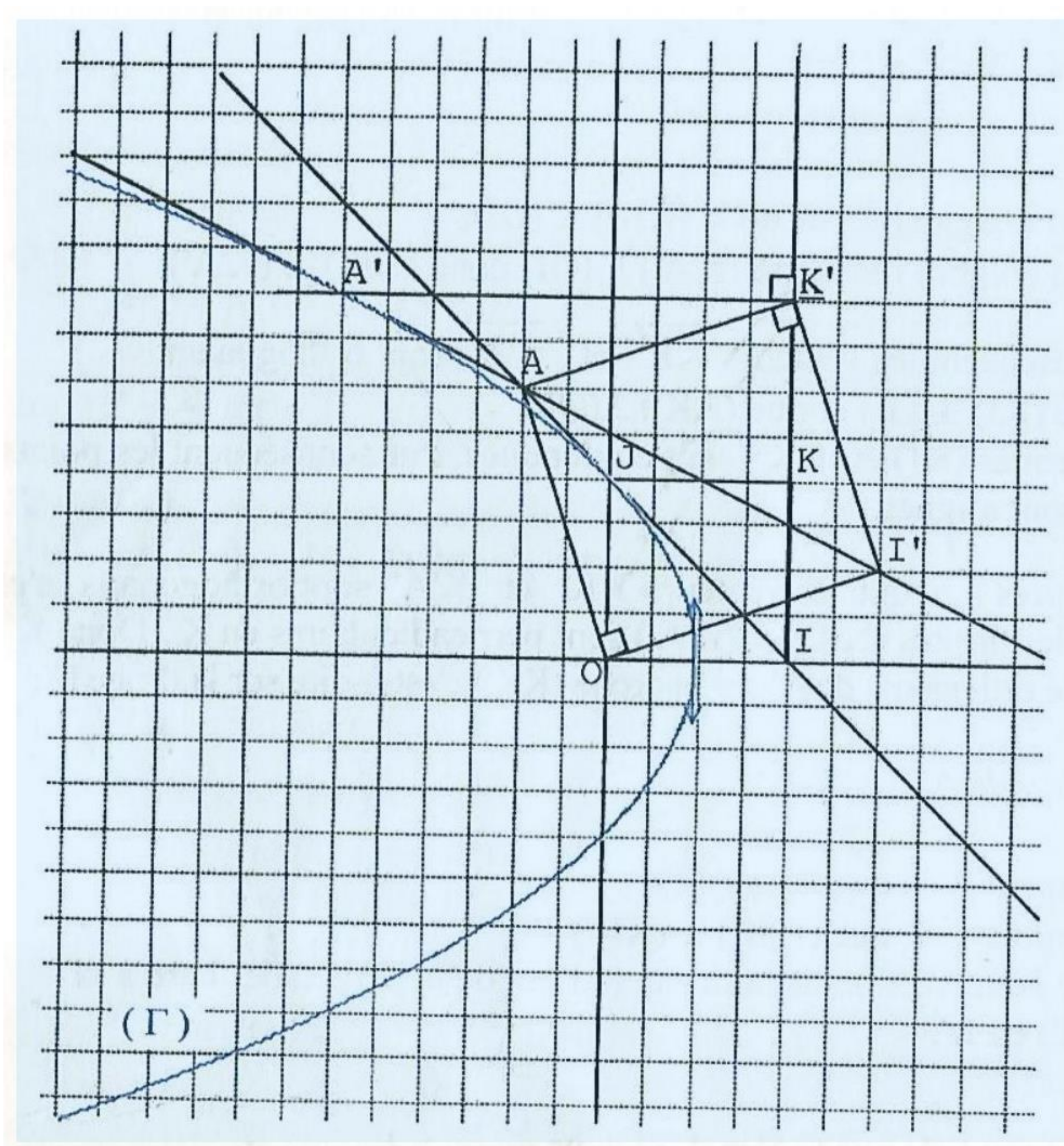
1. L'axe focal de (Γ) est la perpendiculaire à la droite (IK) passant par O c'est-à-dire (OI).

Le sommet de la parabole est le milieu du segment [OI].

2. $\frac{d(J,O)}{d(J,(IK))} = \frac{1}{1} = 1$

donc $J \in (\Gamma)$.

3. Construction de (Γ)



CORRECTION SESSION NORMALE 1999 Série C

EXERCICE 1

1. Soit Ω l'ensemble des résultats. Ω est l'ensemble des 6 faces du dé.

a. Soit $\mathrm{P(B)}$ la probabilité d'avoir une face blanche.

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b. soit $\mathrm{P(N)}$ la probabilité d'avoir une face noire.

$\mathrm{P(N)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Soit E l'ensemble de résultats.

$\mathrm{E} = \Omega^4$; donc card $\mathrm{E} = 6^4$

a. Soit P_1 la probabilité d'avoir dans l'ordre $\mathrm{B, N, B}$ et B.

$P_1 = \frac{4\times2\times4\times4}{6^4} = \frac{8}{81}$

b. Soit P_2 la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des 4 lancers.

Cette face noire peut s'obtenir au 1^{er}, $2^{\text{e}}, 3^{\text{e}}$ ou au 4^{e} lancer.

$$P_2 = 4 \times \frac{8}{81} = \frac{32}{81}$$

c. Soit P_3 la probabilité d'avoir une face noire au 4^e lancer.

$P_3 = \frac{6\times6\times6\times2}{6^4} = \frac{1}{3}$

3. $n \in \mathbb{N}^*$

Soit F l'ensemble des résultats

$\mathrm{F} = \Omega^n$; donc $\mathrm{card\,F} = 6^n$

a. la négation de "au moins une face blanche" est "aucune face blanche", c'est-à-dire "quatre faces noires". La probabilité de cet événement est : $\left(\frac{4}{6}\right)^n$

$\mathrm{P}_n = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n$
$\mathrm{P}_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b. $\mathrm{P}_n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant -0{,}01$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2}$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -2\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-2\ln 10}{\ln 2\ln 3}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{2\ln 10}{\ln 3-\ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geqslant 11{,}357.$

Le plus petit entier naturel non nul n tel que $\mathrm{P}_n \geqslant 0{,}99$ est 12 .

EXERCICE 2

1. a. $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{e-x}{x}$

   b. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e.$

h est donc strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0; e]$.

Tableau de variation de h.

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	0	↘	

c. Sur $[1; e], h$ est strictement croissante. Donc $\forall x \in [1; e], h(1) \leqslant h(x) \leqslant h(e)$

$-\frac{1}{e} \leqslant h(x) \leqslant 0$

$h(x) \leqslant 0$ donc $\ln x \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

   a. $\mathrm{I}_2 = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2 dx$

Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = x$

On a $u'(x) = \frac{2}{x}\ln x$. Choisissons $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$\mathrm{I}_2 = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\ln x dx$

$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x dx.$

Soit $\mathrm{J} = \int_1^e x\ln x dx$.

Posons $\mathrm{S}(x) = \ln x$ et $\mathrm{T}'(x) = x$

On a : $S'(x) = \frac{1}{x}$; choisissons $\mathrm{T}(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$\mathrm{J} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

On a donc $I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

$\mathrm{I}_2 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

b. $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_1^e [x(\ln x)^{n+1} - x(\ln x)^n] dx$

$= \int_1^e \ x(\ln x - 1)(\ln x)^n dx \leqslant 0 \text{car}\, x \in [1; e], \ln x - 1 \leqslant 0$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

c. $\forall x \in [1; e], x(\ln x)^n \geqslant 0$ donc $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

d. D'après $1.c$

$$\forall x \in [1; e], 0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$$

$$0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$$

$$0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n$$

$$0 \leqslant x(\ln x)^n \leqslant \frac{x^{n+1}}{e^n}$$

donc $0 \leqslant \int_1^e x(\ln x)^n dx \leqslant \int_1^e \frac{x^{n+1}}{e^n} dx$

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)e^n}\right]_1^e$$

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{e^{n+2}}{(n+2)e^n} - \frac{1}{(n+2)e^n}$$

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n}$$

e. $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n} = 0$$

d' après le théorème des gendarmes ; $\lim \mathrm{I}_n = 0$.

PROBLÈME

Partie A

Posons $\mathrm{P}(z) = z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$

1. Soit a une solution réelle.

$$\mathrm{P}(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 - (6 + i\sqrt{3})a^2 + (11 + 4i\sqrt{3})a - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$$

$$\begin{cases} a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0 \ (1) \\ -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 \quad (2) \\ \vdots \end{cases}$$

Résolvons l'équation (2)

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}a^2 + 4\sqrt{3}a - 3\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2-1)(a-2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-3)(a-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \text{ ou } a = 1 \end{aligned}$$

1 et 3 vérifient l'équation (1) donc 1et 3 sont les solutions réelles de l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

On a $\mathrm{P}(z) = (z-1)(z-3)(az+b)$

$$\begin{aligned} &= (z^2 - 4z + 3)(az + b) \\ &= az^2 + (b - 4a)z^2 + (-4b + 3a)z + 3b \end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -(6 + i\sqrt{3}) \\ 3a - 4b = 11 + 4i\sqrt{3} \\ 3b = -6 - 3i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(z) = (z-1)(z-3)(z - 2 - i\sqrt{3})$$
$$\mathrm{P}(z) = 0 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 3 \text{ ou } z = 2 + i\sqrt{3})$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{1; 3; 2 + i\sqrt{3}\}$.

2. a. $\mathrm{I}(1); \mathrm{A}(3); \mathrm{B}(2+i\sqrt{3})$

$$\mathrm{IA} = |3-1| = 2$$
$$\mathrm{IB} = |2+i\sqrt{3}-1| = |1+i\sqrt{3}| = 2$$
$$\mathrm{AB} = |2+i\sqrt{3}-3| = |-1+i\sqrt{3}| = 2$$
$$\mathrm{IA} = \mathrm{IB} = \mathrm{AB}$$

Donc le triangle IAB est équilatéral.

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}9\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = -3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ donc les points B, C et G sont alignés.

Autre solution

Soit z_{M} l'affixe d'un point M.

$$\frac{z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}} = \frac{11+4\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}}{-1-2-i\sqrt{3}}$$
$$\frac{z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}} = \frac{9+3i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}$$
$$\frac{z_{\mathrm{G}}--_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}} = -3$$

mes $\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}}) = \pi$; donc les points B, C et G sont alignés.

c. Voir figure.

3. $\mathrm{F}\binom{x}{0}$ et EFG est un triangle équilatéral. $\mathrm{E}\binom{7}{0}$; $\mathrm{G}\begin{pmatrix}11\\4\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Soit G' le projeté orthogonal de G sur (OI).

G' est le milieu du segment $[\mathrm{EF}]$.

on a $x_G = 11$

donc $11 = \frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{F}}}{2}$

d'où $x_{\mathrm{F}} = 15$

$\mathrm{F}\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$

Partie B

1. a. Un segment et son image par une homothétie ont des supports parallèles.

Or seule la droite (IA) est parallèle à la droite (EF).

Donc l'image du segment [IA] par h est le segment [EF]

b. Si $h([\mathrm{IA}]) = [\mathrm{EF}]$ alors $h(\mathrm{B}) = \mathrm{G}$ et on a les deux possibilités suivantes :

$\xrightarrow{h}$

I	F
A	E
B	G

$\xrightarrow{h}$

I	E
A	F
B	G

Dans le premier cas, la droite (IB) n'est pas parallèle à la droite (FG). En effet $\overrightarrow{\mathrm{IB}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}\begin{pmatrix}-4\\ 4\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}) \neq 0$. Donc la seule homothétie h qui transforme IAB en EFG est telle que :

$h(\mathrm{I}) = \mathrm{E}; h(\mathrm{A}) = \mathrm{F}$ et $h(\mathrm{B}) = \mathrm{G}$.

c. Les droites (BG) et (IE) sont sécantes en C.

Soit k le rapport de h. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ ayant le même sens, k est positif

On a : $k = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{IA}} = \frac{|15-7|}{|3-1|} = 4$

Donc h est l'homothétie de centre C et de rapport 4.

2. $h = h(\mathrm{C}, 4); r = r\left(\mathrm{O}', \frac{2\pi}{3}\right); f = h \circ \mathrm{r}$.

a. Le rapport de f est celui de h c'est-à-dire 4

L'angle de f est celui de r.

Il a donc pour mesure $\frac{2\pi}{3}$.

b. $\left.\begin{array}{l} r(\mathrm{I}) = \mathrm{A} \\ r(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \\ r(\mathrm{B}) = \mathrm{I} \end{array}\right\}$ donc $r(\mathrm{IAB}) = \mathrm{ABI} = \mathrm{IAB}$

or $h(\mathrm{IAB}) = \mathrm{EFG}$
donc $f(\mathrm{IAB}) = \mathrm{EFG}$

3. a. h^{-1} a pour rapport $\frac{1}{4}$.

Soit α le rapport de la similitude directe g.

$$\alpha = \frac{\text{mesure d'un coté de EFG}}{\text{mesure d'un coté de IAB}} = \frac{8}{2} = 4$$

$h^{-1} \circ g$ est une similitude directe qui a pour rapport 1.

C'est donc un déplacement.

$g(\mathrm{IAB}) = \mathrm{EFG}$ d'après l'énoncé. Or $h^{-1}(\mathrm{EFG}) = \mathrm{IAB}$

donc $h^{-1} \circ g(\mathrm{IAB}) = \mathrm{IAB}$

La seule translation qui laisse globalement invariant un triangle est Id, qui est une rotation.

Donc h^{-1} og est une rotation qui laisse globalement invariant le triangle IAB.

b. Les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB sont :

- La rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r.
- La rotation de centre O' et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire r^{-1}.
- L'identité de $\mathcal{P}$.

c. $h^{-1} \circ g = R$ (où $R \in \{\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}, r, r^{-1}\}$ d'après ce qui précède).

$\Leftrightarrow g = h \circ R$

d'où $g = h\mathrm{oId}_{\mathcal{P}} = h$

ou $g = h\mathrm{o}r = f$

ou $g = h \circ r^{-1} = f'$

d. $f' = hor^{-1}$

f' a pour rapport 4 et pour angle $-\frac{2\pi}{3}$.

4.

$\xrightarrow{f}$

I	F
A	G
B	E
Ω	Ω
K	K

a. K est le milieu de [IA]; son image K′ est donc le milieu de [FG] car une similitude directe conserve le milieu.

b. $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega G}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\mathrm{E} \in [\mathrm{FA})$ Donc $(\overrightarrow{\mathrm{FA}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}) = (\overrightarrow{\mathrm{FE}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}})$

FEG est un triangle équilatéral de sens indirect. Donc

$\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{FA}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{FE}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}) = -\frac{\pi}{3}$

$\mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{FA}}, \overrightarrow{\mathrm{FG}}) \equiv \frac{5\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \pi + \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega G}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\text{FA}}, \overrightarrow{\text{FG}}}) + \pi + 2k\pi$

donc les points $\Omega, \text{F}, \text{A}, \text{G}$ sont cocycliques.

c. On démontre de la même manière (voir b) que les points $\Omega, \text{F}, \text{K}$ et K' sont cocycliques.

d. Les deux cercles passant respectivement par $\Omega, \text{F}, \text{A}, \text{G}$ et $\Omega, \text{F}, \text{K}, \text{K}'$ sont sécants en Ω et F or, F n'est pas invariant, donc Ω est le point d'intersection des deux cercles différents de F.

5. On a : $f'(\text{I}) = \text{G}$

$f'(\text{A}) = \text{E}$
$f'(\text{B}) = \text{F}$

Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe associée à f'.

Déterminons a et b

$\begin{cases} z_G = az_I + b \\ z_F = az_\Delta + b \end{cases}$

$\{11 + 4i\sqrt{3} = a + b$

$2a = -4 - 4i\sqrt{3}$

$a = -2 - 2i\sqrt{3}$

$b = 11 + 4i\sqrt{3} - a$

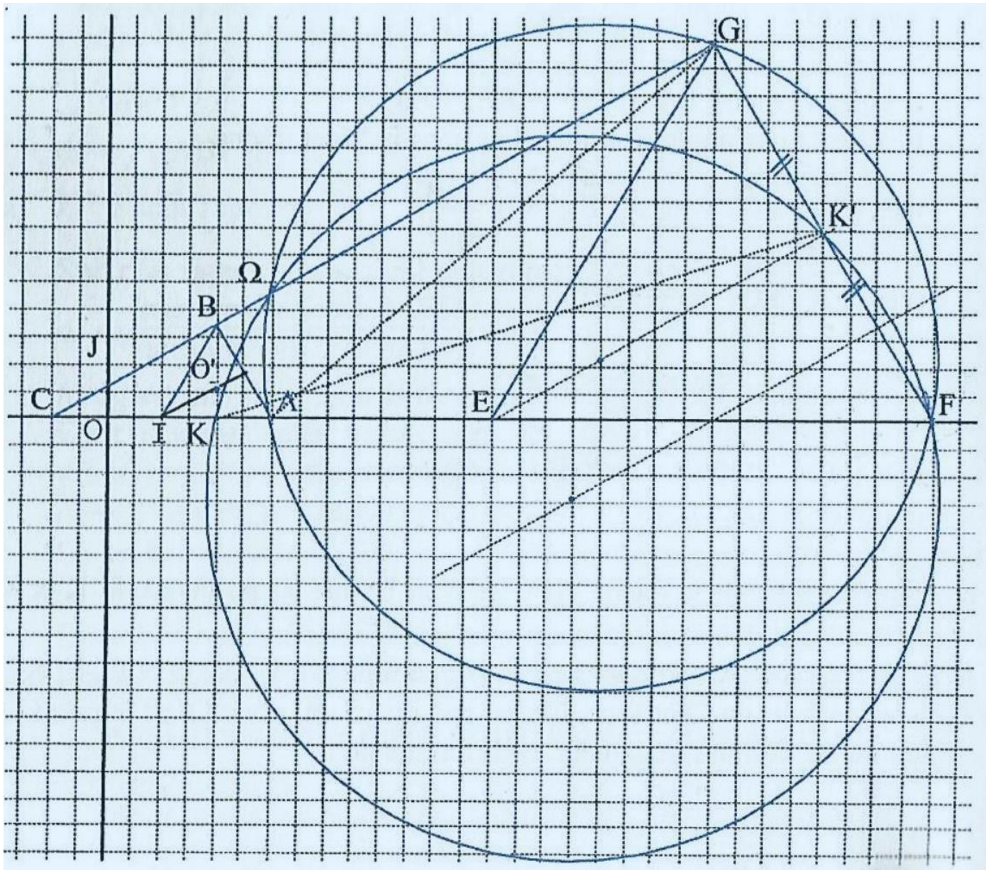
$b = 13 + 6i\sqrt{3}$

$z' = (-2 - 2i\sqrt{3})z + 13 + 6i\sqrt{3}$

6. Le centre Ω' de f' a pour affixe $\frac{b}{1-a}$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{13 + 6i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3}} = \frac{(13 + 6i\sqrt{3})(3 - 2i\sqrt{3})}{9 + 4 \times 3} = \frac{75 - 8i\sqrt{3}}{21}$$

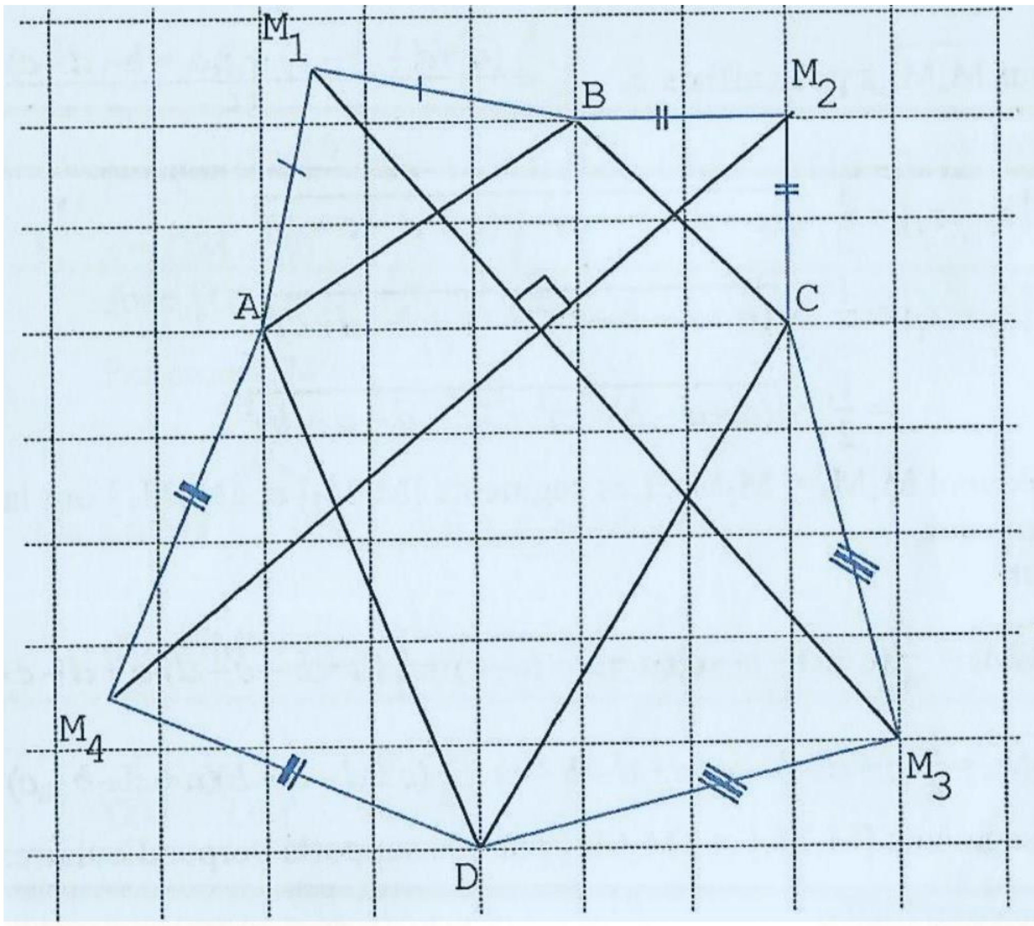
$$z_{\Omega'} = \frac{75 - 8i\sqrt{3}}{21}$$


G
K'
Ω
B
J
O'
C
A
E
F
O
I
K

CORRECTION SESSION NORMALE 1998 Série E

- EXERCICE 1

1. L'orientation des angles est donnée par la figure de base.



a. on a :

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{M_1\ A = M_1\ B} \\ \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{M_1\ A}}, \overrightarrow{\mathrm{M_1\ B}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right| = 1 \\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - z_1}{a - z_1} = i$$

$$\Leftrightarrow b - z_1 = i(a - z_1)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-b + ia}{-1 + i}$$

$$\Leftrightarrow\ z_1 = \frac{(b + a) + i(b - a)}{2}$$

b. Par le même procédé on obtient :

$z_2 = \frac{(c+b)+i(c-b)}{2}$
$z_3 = \frac{(d+c)+i(d-c)}{2}$
$z_4 = \frac{(a+d)^2+i(a-d)}{2}$

2. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}}$ a pour affixe $z_3 - \mathrm{z}_1 = \frac{(c+d-b-a)+i(a+d-c-b)}{2}$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M_2M_4}}$ a pour affixe $z_4 - z_2 = \frac{(a+d-b-c)+i(a+b-d-c)}{2}$

$$\mathrm{M_1M_3} = |\mathrm{z}_3 - \mathrm{z}_1| = \frac{1}{2}\sqrt{(c+d-b-a)^2 + (a+d-c-b)^2}$$
$$\mathrm{M_2M_4} = |\mathrm{z}_4 - \mathrm{z}_2| = \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2 + (a+b-d-c)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a+d-b-c)^2 + (c+d-a-b)^2}$$

Par conséquent $\mathrm{M_1M_3} = \mathrm{M_2M_4}$. Les segments $[\mathrm{M_1M_3}]$ et $[\mathrm{M_2M_4}]$ ont la même longueur.

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{M_2M_4}} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c) + \frac{1}{4}(a+b-c-d)(a+d-c-b)$$

$\overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{M_2M_4}} = \frac{1}{4}(c+d-b-a)(a+d-b-c) - \frac{1}{4}(c+d-a-b)(a+d-b-c) = 0$ donc les segments $[\mathrm{M_1M_3}]$ et $[\mathrm{M_2M_4}]$ ont des supports perpendiculaires.

EXERCICE 2

1. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y),

la distance de M à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{16}{3}$ est $\left|x - \frac{16}{3}\right|$.

$\left|x - \frac{16}{3}\right| = \frac{1}{3}|3x + 6|$ et la distance OM est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{E}) \iff 25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$

$\iff \frac{x^2+y^2}{(3x-16)^2} = \frac{1}{25}$

$\iff \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{3x-16}{3}\right)^2} = \frac{9}{25} \iff \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{d}(\mathrm{M},(\Delta))^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\iff \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{d}(\mathrm{M},(\Delta))} = \frac{3}{5}$

(E) est donc l'ellipse de foyer O, d'excentricité $\frac{3}{5}$ et de directrice associée (Δ).

2. a. $\mathrm{OM} = \frac{1}{5}|3x - 16|$ puisque $x < \frac{16}{3}, 3x - 16 < 0$ donc $\mathrm{OM} = \frac{1}{5}(16 - 3x)$.
   b. $x = \mathrm{OM}\cos\theta$

donc $5\mathrm{OM} = 16 - 3\mathrm{OM}\cos\theta$

Par suite $\mathrm{OM} = \frac{16}{5+3\cos\theta}$.

3. On a mes $(\hat{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \theta + \pi$ et $\mathrm{M}' \in (\mathrm{E})$

d'où $\mathrm{OM}' = \frac{16}{5+3\cos(\theta+\pi)} = \frac{16}{5-3\cos\theta}$

a. $\frac{1}{\mathrm{OM}} + \frac{1}{\mathrm{OM}'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

b. on $\mathrm{OOI}\cos\theta = \frac{16}{3}$ d'où $\mathrm{OI} = \frac{16}{3\cos\theta}$

$\frac{1}{\mathrm{OM}^2} - \frac{1}{\mathrm{OM}'} = \frac{6\cos\theta}{16} = 2 \times \frac{3\cos\theta}{16} = \frac{2}{\mathrm{OI}}$

PROBLEME

Partie A

1. . $f_1(x) = xe^{-x}$.
   a. $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$
   b. $f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

Le signe $f_1'(x)$ dépend du signe de $(1-x)$.

Alors $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$
$f_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

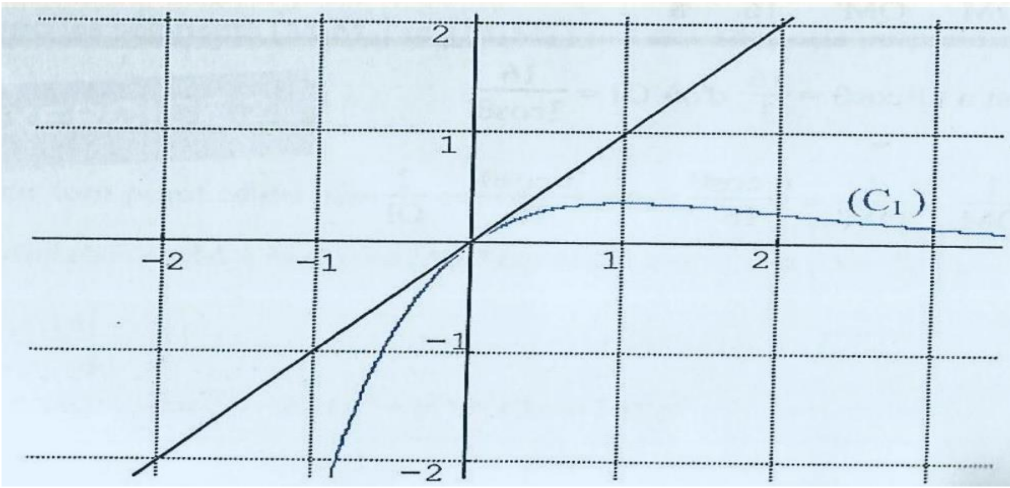
f_1 est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

On a **le tableau de variation** suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

c. La tangente à l'origine est la droite d'équation $y = x$.

Tracé de (C_1)



2.. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

Le signe de f_n' dépend du signe de $x^{n-1}(n-x)$.

Le signe de x^{n-1} dépend de la parité de n.

- si n est pair, $n-1$ est impair et le signe de x^{n-1} est celui de x. On obtient le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau :

x	$-\infty$	0		n	$+\infty$
x^{n-1}	$-$	0	$+$	|	$+$
$n-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

f_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[n; +\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[0; n]$.

- $\sin n$ est impair, $n-1$ est pair donc x^{n-1} est toujours positif.

On peut donner le signe de $f_n'(x)$ dans le tableau.

x	$-\infty$	0		n	$+\infty$
x^{n-1}	$+$	0	$+$	|	$+$
$n-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$f_n'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

f_n est strictement croissante sur $]-\infty; n[$ et f_n est strictement décroissante sur $[n; +\infty[$.
b. $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$		0		$\frac{27}{e^3}$		0

c. La tangente à l'origine est la droite des abscisses. Courbe de (C_3), voir figure à la fin du problème.

3. a. La droite d'équation $x = n$ est une droite parallèle à (OJ). M et M' ont la même ordonnée et le milieu de [MM'] se trouve sur la droite d'équation $x = n$. d'où $\frac{x'+x}{2} = n \Rightarrow x' = 2n - x$.

On a : $\begin{cases} x' = 2n - x \\ y' = y \end{cases}$

M' a pour coordonnées $(2n - x, y)$.

b. $M'(x', y') \in C'_n \Leftrightarrow \exists M(x; y) \in (C_n) M' = S_n(M)$

$\Leftrightarrow x' = 2n - x$ et $y' = f_n(x)$
$\Leftrightarrow y' = f_n(2n - x')$

donc (C'_n) est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $y = f_n(2n - x)$.

c. Voir figure.

d.

$\int_n^{2n} f_n(t)dt$ est l'aire de la partie $\mathcal{D}$ du plan comprise entre l'axe des

abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équations $x = n$ et $x = 2n$.
si $n \leqslant x \leqslant 2n$ alors $0 \leqslant 2n - x \leqslant n$

$\int_0^n g_n(t)dt$ est l'aire de la partie $\mathcal{D}'$ du plan telle que : $\mathcal{D}' = S_n(\mathcal{D})$

donc $\int_0^n g_n(t)dt = \int_0^{2n} f_n(t)dt$ car une symétrie orthogonale conserve

les aires.

4. a. $x \in]0; n], h_n(x) = \ln(g_n(x)) - \ln(f_n(x))$.

- Comme $x \in]0; n]$ alors $f'_n(x) \geqslant 0$. Donc f_n est croissante sur $]0; n]$.

$0 < x \leqslant n \Leftrightarrow f_n(0) < f_n(x) \leqslant f_n(n)$

$\Leftrightarrow 0 < f_n(x) \leqslant n^n e^{-n}$.

Par conséquent $f_n(x)$ est strictement positif sur $]0, n]$.

La fonction $x \mapsto \ln(f_n(x))$ est bien définie et dérivable sur $]0; n]$.

- Comme $x \in]0; n]$ alors $2n - x \in [n, 2n[$. Donc f_n est strictement $0 < x \leqslant n$

$\Leftrightarrow \quad n \leqslant 2n - x < 2n$
$\Leftrightarrow \quad f_n(2n) < f_n(2n - x) \leqslant f_n(x)$
$\Leftrightarrow \quad (2n)^n e^{-2n} < g_n(x) \leqslant n^n e^{-n}$

g_n est strictement positif sur $]0; n]$. Alors la fonction $x \mapsto \ln(g_n(x))$ est définie et dérivable sur $]0; n]$.

Par conséquent h_n est définie et dérivable sur $]0; n]$.

On a $\ln(f_n(x)) = \ln(x^n e^{-x}) = -x + n\ln x$

$\ln(g_n(x)) = \ln(2n - x)^n e^{-(2n-x)} = -(2n - x) + n\ln(2n - x)$

d'où $h_n(x) = 2x - 2n + n\ln(2n - x) - n\ln x$

$$h_n'(x) = 2 - \frac{n}{2n - x} - \frac{n}{x} = \frac{-2x^2 + 4nx - 2n^2}{x(2n - x)}$$

$h_n'(x) = \frac{-2(x-n)^2}{x(2n-x)}$

si $x \in]0; n]$ alors $x(2n - x) > 0$ d'où $h_n'(x) \leqslant 0$

x	0	n
$h_n'(x)$	$-$	
$h_n(x)$	$\searrow$	0

h_n admet pour minimum 0 , par conséquent

$\forall x \in]0; n]\ h_n(x) \geqslant 0.$
b. $\forall x \in]0; n]\ h_n(x) \geqslant 0 \Rightarrow \ln(g_n(x)) \geqslant \ln(f_n(x))$

$\Rightarrow g_n(x) \geqslant f_n(x)$

d'où $\forall x \in]0; n],\ f_n(x) \leqslant g_n(x)$.

c. $\forall x \in]0; n],\ f_n(x) \leqslant g_n(x)$

$\int_0^n f_n(t)dt \leqslant \int_0^n g_n(t)dt$

or $\int_0^n g_n(t)dt = \int_n^{2n} f_n(t)dt$, d'où le résultat :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n f_n(t)dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)dt.$

Partie B

$\mathrm{F}_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1. $\mathrm{F}_n'(x) = f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$ or $f_n(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, +\infty[$, par conséquent F_n est croissante sur $[0, +\infty[$.

2. a. $\mathrm{F}_1(x) = \int_0^x te^{-t}dt$. Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a $u'(t) = 1$; choisissons $v(t) = -e^{-t}$

alors $\mathrm{F}_1(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^x - [e^{-t}]_0^x$
$\mathrm{F}_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

b. $\mathrm{F}_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt = \int_0^x t^{n+1}e^{-1}dt$

Posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$

On a $u'(t) = (n+1)t^n$. Choisissons $v(t) = -e^{-t}$

$f_{n+1}(x) = [-t^{n+1}e^{-t}]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt$

$= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\mathrm{F}_n(x)$
d'où $\mathrm{F}_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{f}_{n+1}(x)$

3. Pour $= 1$, $\mathrm{F}_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x} = 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!}\right)$.

La relation est vérifiée pour $\mathrm{F}_1(x)$.

Supposons que pour tout entier , $\mathrm{F}_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

On a $\mathrm{F}_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{F}_n(x) - f_{n+1}(x)$.

$= (n+1)n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] - x^{n+1}e^{-x}$
$= (n+1)!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\right]$

Donc la propriété est vraie pour $\mathrm{F}_{n+1}(x)$.

Par conséquent: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{F}_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

4. a. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_n(x) = n!$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x} = 0$
b. $1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \leqslant 1$

d' où $\mathrm{F}_n(x) \leqslant n!$

Partie C

1. $\mathrm{F}_n(n)+\int_n^{2n} f_n(t)dt=\int_0^{2n_n} f_n(t)dt=\mathrm{F}_n(2n)$

or $\mathrm{F}_n(2n)\leqslant n\,!$ d'après B.4.b.

d'où $\mathrm{F}_n(n)+\int_n^{2n_n} f_n(t)dt\leqslant n!$

2. On a $0\leqslant\int_0^{n} f_n(t)dt\leqslant\int_n^{2n} f_n(t)dt.$

$0\leqslant\ \mathrm{F}_n(n)\leqslant 2\ \mathrm{F}_n(n)\leqslant\mathrm{F}_n(n)+\int_n^{2n_n} f_n(\mathrm{t})dt\leqslant n!\,.$

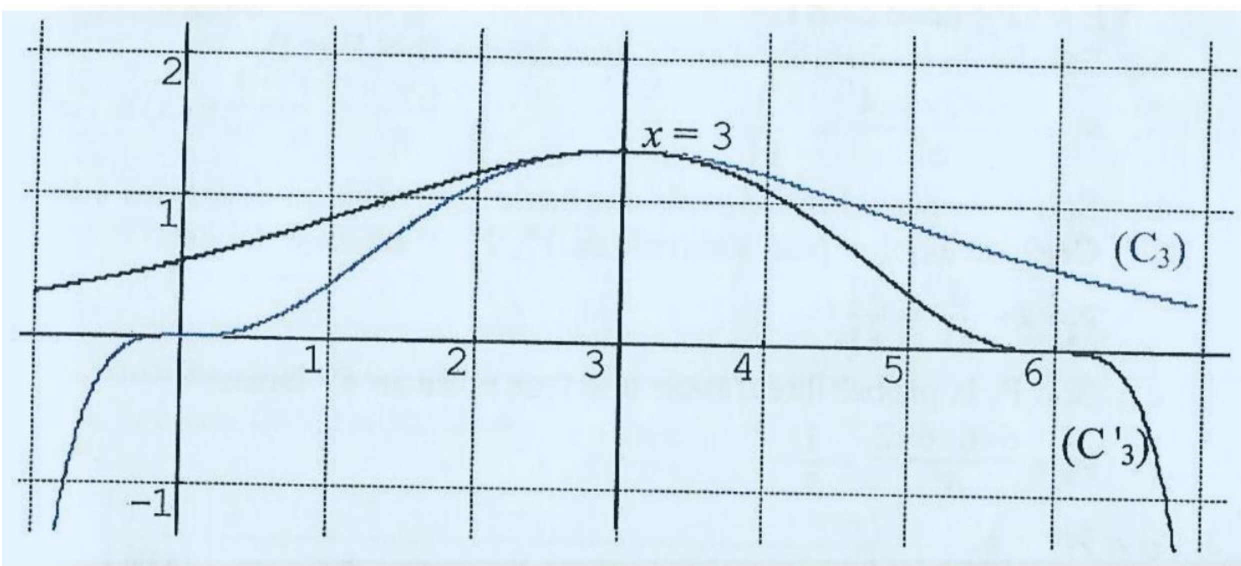
d'où $0\leqslant 2\ \mathrm{F}_n(n)\leqslant n\,!$

alors $0\leqslant\ \mathrm{F}_n(n)\leqslant\frac{n!}{2}.$

Remplaçons $\mathrm{F}_n(n)$ par $n!\left[1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots\ldots.\frac{n^n}{n!}\right)\right]$,

on obtient :

$$0\leqslant n!\left[1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots\ldots\frac{n^n}{n!}\right)\right]\leqslant\frac{n!}{2}$$
$$0\leqslant 1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots\ldots..\frac{n^3}{n!}\leqslant\frac{1}{2}\right.$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}e^n\leqslant 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots\ldots\ldots\frac{n^n}{n!}\leqslant e^n$$



SESSION DE REMPLACEMENT 1998 série C

EXERCICE 1

1. a. Pour tout point M du plan,

$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) + i - 1$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y = \frac{1}{2}(x + y + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \\ \frac{1}{2}(x - y + 2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

L'ensemble des points M tels que $f(M) = M$ est la droite (D).

b. Déterminons les coordonnées de M'.

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) + i - 1$

$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + y - 2) + \frac{1}{2}i(x + y + 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y - 2) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y + 2) \end{cases}$ d'où M' $\left(\frac{1}{2}(x + y - 2); \frac{1}{2}(x + y + 2)\right)$.

Démontrons maintenant que M' appartient à (D).

On a : $\frac{1}{2}(x + y - 2) - \frac{1}{2}(x + y + 2) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$.

Ainsi, les coordonnées de M' vérifient l'équation de (D).

Donc M' appartient (D).

c.

- On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y-2) \\ \frac{1}{2}(x+y+2) \end{pmatrix}$;

d'où $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-x+y-2) \\ \frac{1}{2}(x-y+2) \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u}\binom{1}{1}$, un vecteur directeur de (D).

Comme

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\cdot\vec{\mathrm{u}}=-\frac{1}{2}(x-y+2)+\frac{1}{2}(x-y+2)$$
$$=0$$

alors $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ est normal à la droite (D).

- *Caractérisons géométriquement f.*

À tout point M du plan, f associe le point $\mathrm{M'}$ tel que : $\begin{cases} M' \text{appartient à (D)} \\ \overrightarrow{\mathrm{MM'}} \text{ est normal à (D)} \end{cases}$

f est donc la projection orthogonale sur la droite (D).

2. a. $z-z'=\frac{1}{2}[2z-z-i\bar{z}-2i+2]$

$=\frac{1}{2}[z-i\bar{z}-2(i-1)]$

b. Pour tout point M du plan,

$$\mathrm{M}\in(\mathrm{E})\Leftrightarrow|z-1|=\frac{1}{4}|z-i\bar{z}-2(i-1)|$$
$\Leftrightarrow|z-1|=\frac{1}{2}|z-z'|$ d'après 2.a.
$$\Leftrightarrow \mathrm{MF}=\frac{1}{2}\mathrm{MM'}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{d(M,(D))}}=\frac{1}{2}$$

(E) est donc l'ellipse de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricite $\frac{1}{2}$.

L'axe focal (Δ) est la perpendiculaire à (D) passant par F. Une équation de (A) est de la forme : $x+y+c=0$ car $\vec{u}\binom{1}{1}$, vecteur directeur de (D) est un vecteur normal à (Δ).

(Δ) passe par $\mathrm{F}\binom{1}{0}$; donc : $1+0+c=0$ soit $c=-1$.

Une équation cartésienne de (Δ) est donc : $x+y-1=0$.

c. Vérifions que les points A et A' sont des points d'intersection de (Δ) et (E).
$(\Delta): x+y-1=0$
$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\mathrm{A'}\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ donc $A\in(\Delta)$; $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-1=0$ donc $A'\in(\Delta)$.
- $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-1\right|=\frac{1}{2}|-1+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

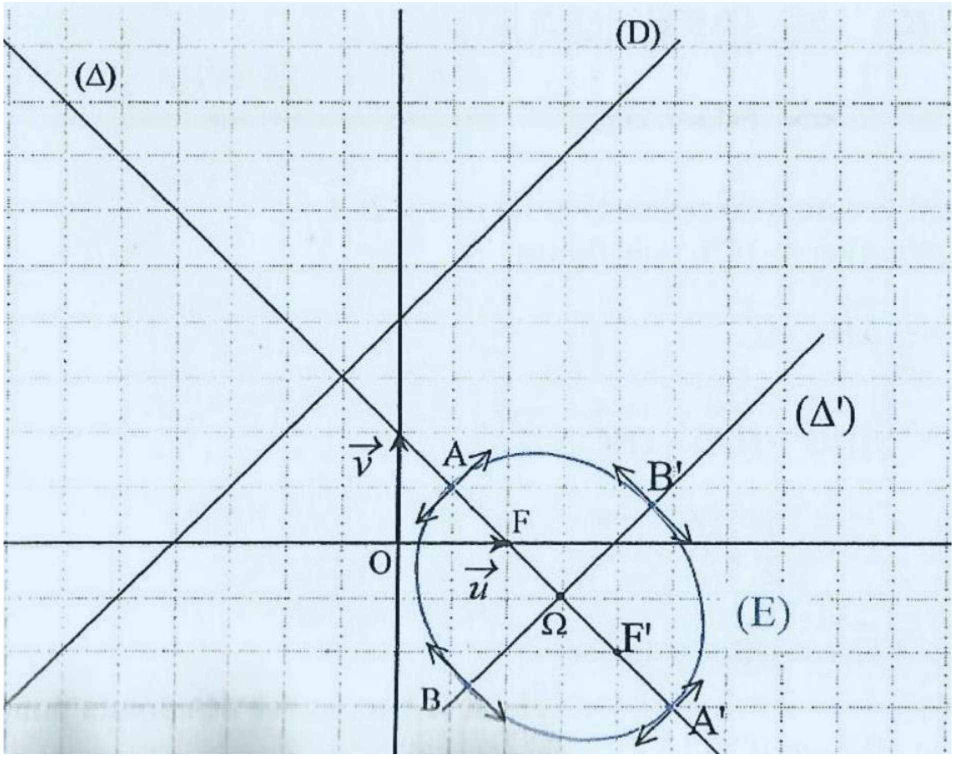
$\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)-2(i-1)\right|=\frac{1}{4}|2-2i|=\frac{1}{2}|1-i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\mathrm{A}\in(\mathrm{E})$

- $\frac{1}{4}\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i-i\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i\right)-2i+2\right|=\frac{1}{4}|6-6i|=\frac{1}{2}|1-i|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i-1\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\frac{3}{2}|1-i|=\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \mathrm{A'}\in(\mathrm{E})$$

Par conséquent A et A' sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal (Δ).

3. a



b. Construction des autres sommets B et B' :

Soit Ω le centre de l'ellipse (E), (Δ') l'axe non focal de (E). Ω est le milieu du segment [AA'] B et B' sont les points d'intersection de l'axe non focal (Δ') et du cercle de centre F et de rayon Ω A.

c. voir figure.

EXERCICE 2

1. a. On a : $\overrightarrow{\mathrm{GA}} - \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (en utilisant l'égalité de Chasles)

G est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Construction de G (voir figure).

b. Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{MG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

Pour tout point M du plan,

$= 2\overrightarrow{CI}$(I étant le milieu du segment $[AB]$).

$\mathrm{M} \in (\mathrm{C}) \Leftrightarrow \| \overrightarrow{\mathrm{MG}} \| = \| 2\overrightarrow{\mathrm{CI}} \|$
$\Leftrightarrow \mathrm{MG} = 2\mathrm{CI}$

(C) est le cercle de centre G et de rayon $2\mathrm{CI}$.

Construction de (C), voir figure.

2. a. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{HB}} - \overrightarrow{\mathrm{HA}}) - (\overrightarrow{\mathrm{HC}} - \overrightarrow{\mathrm{HA}})$

d'où : $\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{HB}} - \overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{0}$

Donc $3\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{0}$ On a : $3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$, donc H est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 3)$; $(\mathrm{B}, 1)$ et $(\mathrm{C}, -2)$.

Autre méthode: On peut justifier que les points pondérés $(A, 3)$; $(B, 1)$ et $(C, -2)$ admettent un barycentre K et que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et

conclure.

b. $\mathrm{C} \in \mathrm{E}_k \Leftrightarrow 3\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 = ka^2$.

ABC étant un triangle rectangle en A,

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

$\mathrm{C} \in \mathrm{E}_k \Leftrightarrow 3a^2 + 5a^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow 8a^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow k = 8.$

Pour $k = 8, \mathrm{C} \in \mathrm{E}_k$

c. $3\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MC}^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow 3\mathrm{HA}^2 + \mathrm{HB}^2 - 2\mathrm{HC}^2 + \mathrm{MH}^2 = 8a^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{HA}^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{1}{4}(4a^2) + a^2 - 0 (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \,\mathrm{car}\, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= 2a^2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$BH^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AC^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{4}(4a^2) + a^2 + 0$

$= 2a^2$

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}$

$= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$CH^2 = \frac{1}{4}AB^{\ 2} + 4AC - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{4}(4a^2) + 4a^2$

$= 5a^2$

$3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$

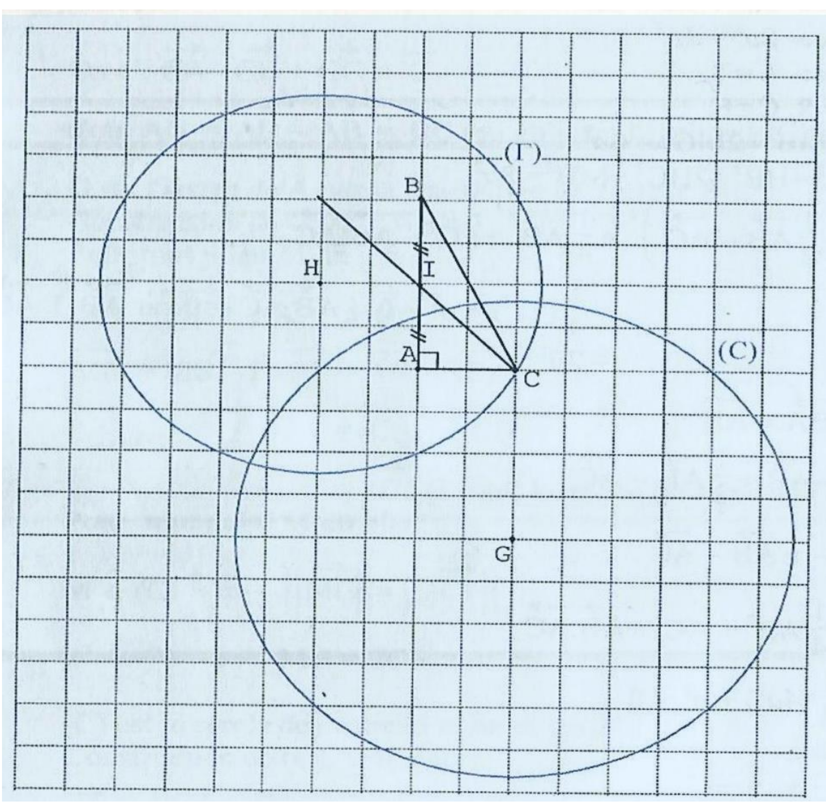
$\Leftrightarrow 3(2a)^2 + 2a^2 - 2(5a^2) + 2MH^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow 6a^2 + 2a^2 - 10a^2 + 2MH^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow MH^2 = 5a^2$

$\Leftrightarrow MH = a\sqrt{5}$

Puisque $C \in (\Gamma)$, alors (Γ) est le cercle de centre H et de rayon HC. Construction de (Γ); voir figure.



PROBLÈME

PARTIE A

1. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ car $e^x > 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim_{x \to -\infty}(1 + e^x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

2.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(0 - x) + f(0 + x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x}$

$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{(1+e^{-x})(1+e^x)}$

$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}$

$= 1$

$= 2 \times \frac{1}{2}$.

Le point A est donc centre de symétrie de (C).

3. Une équation de (Γ) est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$. D'où une équation de (T) est : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

4. a. Calculons $\varphi'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{1}{4} - f'(x)$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x}\right)^2 - \frac{1}{2^2}$$

$$= \left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{x/2}}{1+e^x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\left(e^{x/2}-1\right)^2\left(e^{x/2}+1\right)^2}{4(1+e^x)^2}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) < 0$ et φ' s'annule en 0 .

Conclusion : φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\varphi(0) = 0$, on a :

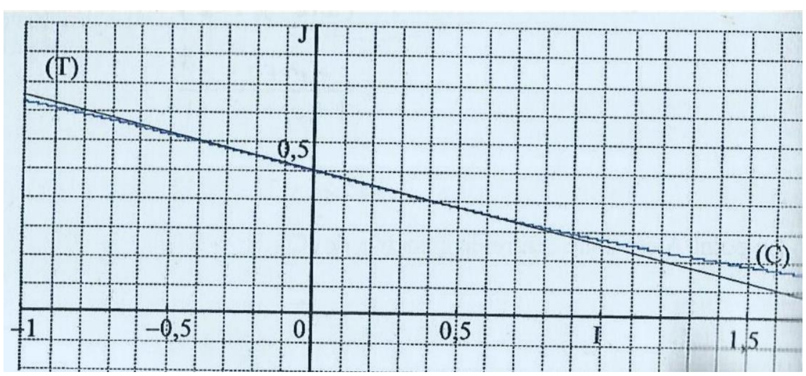
$\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) > 0.$

$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0.$

b. Sur $]-\infty, 0[, (T)$ est au-dessus de (C) $\text{car}\, \varphi(x) > 0$

Sur $]0, +\infty[, (T)$ est en dessous de (C) $\text{car}\, \varphi(x) < 0$

c. Tracé de (T) et $(\mathcal{C})$



Partie B

1. a. $\mathrm{T}_{-1}: \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}$

$$\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}' / \overrightarrow{\mathrm{HM}'} = -\overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

T_{-1} est la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

b. Déterminons l'expression analytique de $\mathrm{T_m}$.

Soit (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de M et M'.

Le point H est donc de coordonnées $(0, \mathrm{y})$.

On a : $\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases} \quad (*)$

Démontrons que $\mathrm{T}_m(\mathcal{C}) \subset (\mathcal{C}_m)$

Soit M un point de $(\mathcal{C})$ et M' son image par T_m

$f_m(x') = f\left(\frac{x'}{m}\right)$ par définition

$= f(x)$ d'après $(*)$

$= y$ car $M \in (\mathcal{C})$

$= y'$ d'après $(*)$

D'où M' appartient à $(\mathcal{C}_m)$. Par suite $\mathrm{T}_m(\mathcal{C}) \subset (\mathcal{C}_m)$

Démontrons réciproquement que $(\mathcal{C}_m) \subset \mathrm{T}_m(\mathcal{C})$

Soit M' un point de ($\mathcal{C}_m$). Il s'agit de démontrer qu'il existe un point M de $(\mathcal{C})$ tel que $\mathrm{M}' = \mathrm{T}_m(\mathrm{M})$.

Par hypothèse, T_m est une transformation (donc bijective), il existe un point M du plan tel que $T_m(M) = M'$.

Il reste à démontrer que M appartient à $(\mathcal{C})$. On a :

$f(x) = f\left(\frac{x'}{m}\right)$ d'après $(*)$

$= f_m(x')$ par définition

$= y'$ car M' $\in (\mathcal{C}_m)$

$= y$ d'après $(*)$.

Par conséquent M appartient à ($\mathcal{C}$). On en déduit que $(\mathcal{C}_m) \subset \mathrm{T}_m(\mathcal{C}_m)$. Conclusion : $\mathrm{T}_\mathrm{m}(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_m)$.

Remarque : on peut raisonner par équivalence car T_m est bijective.
c. $(\mathcal{C}_{-1}) = \mathrm{T}_{-1}(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}_{-1})$ est donc l'image de ($\mathcal{C}$) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Tracé de $(\mathcal{C}_{-1})$ (voir figure).

2. Pour tout $(\lambda, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$\mathrm{I}_m(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)dx$

$= 2\lambda - \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{\frac{x}{m}}}{1+e^{\frac{x}{m}}} dx$ car $\frac{1}{1+e^{x/m}} = 1 - \frac{e^{x/m}}{1+e^{x/m}}$

$\mathrm{I_m}(\lambda) = 2\lambda - m\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\frac{1}{m}\mathrm{e}^{x/m}}{1+e^{x/m}} dx$

$= 2\lambda - m\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{x/m}\right)\right]_{-\lambda}^{\lambda}$

$= 2\lambda - m\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{\lambda/\mathrm{m}}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda/m}\right)\right]$

$= 2\lambda - m\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda/\mathrm{m}}\left(1+\mathrm{e}^{\lambda/\mathrm{m}}\right)\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-\lambda/\mathrm{m}}\right)\right]$

$= 2\lambda - m\ln \mathrm{e}^{\lambda/\mathrm{m}}$

$= 2\lambda - m\frac{\lambda}{m} = \lambda$

$\mathrm{I_m}(\lambda)$ est indépendant de m.

Partie C

1. a. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 - f'(x)$

$= 1 + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$ qui est $\mathbb{R}$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique α. Il s'en suit que l'équation $f(x) = x$ admet la solution unique α.

$g\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0{,}19 > 0, g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}12 < 0$

α appartient alors à l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

2. a. f étant continue strictement décroissante,

on a : $f\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\sqrt{e}}$

$e \leqslant 9 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{e}} \leqslant 3$

$\Rightarrow\ 1 + \sqrt{\mathrm{e}} \leqslant 4$

$\Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+e^{1/4}}$

$\frac{1}{4} \geqslant 0\ \Rightarrow\ e^{1/4} \geqslant 1$

$\Rightarrow\ 1 + e^{1/4} \geqslant 2$

$\Rightarrow\ f\left(\frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}$

par conséquent $f\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2+2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$$= \frac{-e^x(1+e^x)+2e^x}{(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Par conséquent, $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], f''(x) \geqslant 0$.

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$f'(\frac{1}{4})$	$\nearrow$	$f'(\frac{1}{2})$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], -f'\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -f'(x) \leqslant -f'\left(\frac{1}{4}\right)$$

D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leqslant \frac{e^{1/4}}{(1+e^{1//})^2}$.

Avec la calculatrice, on a : $\frac{e^{1/4}}{\left(1+e^{1//4}\right)^2} < 0{,}246 < \frac{1}{4}$

D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| < \frac{1}{4}$

Autre méthode (sans calculatrice)

On peut étudier la fonction a définie sur $[1,+\infty[$ par : $a(x) = \frac{x^{1/4}}{\left(1+x^{1/4}\right)^2}$

$\forall x \in \left[1,+\infty\right[, a'(x) = \frac{1}{4}\frac{x^{-3/4}(1-x^{1/4})}{\left(1+x^{1/4}\right)^3}$.

$\forall x \in [1;+\infty[, a'(x) \leqslant 0$.

a est décroissante sur $[1;+\infty[$

d'où : $a(e) \leqslant a(1) = \frac{1}{4}$

Conclusion: $\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$

c. D'après ce qui précède et l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|x - \alpha|$

Comme $f(\alpha) = \alpha$ d'après 1.c., on a le résultat demandé.

3. a. On a: $U_0 = \frac{1}{4}; U_0 \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

Supposons que pour un entier naturel $n, U_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. Démontrons que

$U_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

On a $f(U_n) \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ d'après 2.a.

D'où $\mathrm{U}_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

b. En utilisant 2.c., et ce qui précède, on a : $|f(U_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

c. On $a|U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$|U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}$

$|U_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1}$ car $U_0 \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Supposons que pour un entier naturel $n, |U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Démontrons que $|\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$.

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$ d'après 3.b.

D'où $|\mathrm{U}_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$|U_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

4. a.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = \alpha$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \leqslant 10^{-2} \Rightarrow 4^{n+1} \geqslant 10^2$

$\Rightarrow (n+1)\log 4 \geqslant 2$

$\Rightarrow n+1 \geqslant \frac{2}{\log 4}$

$\Rightarrow n \geqslant \frac{2}{\log 4} - 1 = 2{,}32$

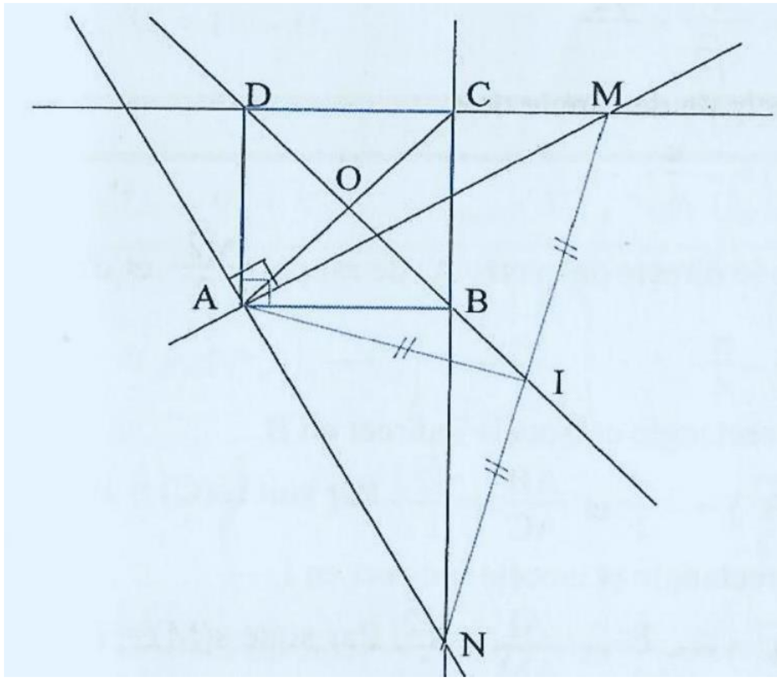
$\Rightarrow n \geqslant 2{,}32$

$p = 3.$

SESSION NORMALE 1998 Série C

EXERCICE 1

1. Voir figure ci-dessous



2. a. Démontrons que $r(M) = N$.

r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}\cdot$ On sait que $\{M\} = (DC) \cap (AM)$ L'image de la droite (AM) par r est la perpendiculaire à (AM) en A; c'est-à-dire (AN).

L'image de la droite (AD) par r est la droite (AB) par définition de r. (AD) est la perpendiculaire à (DC) en D.

Par conservation de l'orthogonalité, (AB) est la perpendiculaire en B à l'image de (DC) par r.

Or la perpendiculaire à (AB) en B est (BC). Donc l'image de la droite (DC) par r est la droite (BC).

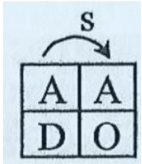
$\{M\} = (DC) \cap (AM)$

$\{r(M)\} = (BC) \cap (AN) = \{N\}$

donc $r(M) = N$.
b. $r(M) = N \Leftrightarrow (AM = AN$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = -\frac{\pi}{2})$,

donc AMN est un triangle rectangle et isocèle en A.

3.



a. Soit α le rapport de s

$\alpha = \frac{AO}{AD}$. OAD étant un triangle rectangle et isocèle en O,

on a $\mathrm{AD} = \sqrt{2}\mathrm{AO}$.

Donc $\alpha = \frac{AO}{\sqrt{2}AO} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit θ la mesure principale de l'angle de s

$\theta = \mathrm{Mes}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AO}}) = -\frac{\pi}{4}$.

Donc s est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure principale $-\frac{\pi}{4}$.
b. ACB est un triangle rectangle et isocèle indirect en B.

Donc Mes $(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite $s(C) = B$.

c. AMI est un triangle rectangle et isocèle indirect en I.

Donc Mes $(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AI}}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AM}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite $\mathrm{s}(\mathrm{M}) = \mathrm{I}$.

d. Lorsque M décrit (DC), I décrit l'image de (DC) par s, c'est-à-dire (OB).

EXERCICE 2

1. U est arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$

On a : $a\mathrm{U}_{n+1} = (a+1)\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1} \Leftrightarrow a\mathrm{U}_{n+1} = a\mathrm{U}_n + \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$

Donc U est arithmétique si, et sedion $\Leftrightarrow a(\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n) = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$

2. $a \neq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} \mathrm{V}_n &= \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n \\ a\ \mathrm{V}_n &= a\mathrm{U}_{n+1} - a\mathrm{U}_n \\ a\ \mathrm{V}_n &= (a+1)\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1} - a\mathrm{U}_n \\ a\ \mathrm{V}_n &= \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1} \\ \mathrm{V}_n &= \frac{1}{a}\ \mathrm{V}_{n-1} \end{aligned}$$

V est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$ et de premier terme V_0. $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0 = 1 - 0 = 1$.

3. a. $\mathrm{V}_{n-1} = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$

$\mathrm{V}_{n-2} = \mathrm{U}_{n-1} - \mathrm{U}_{n-2}$

$V_1 = U_2 - U_1$
$V_0 = U_1 - U_0$

$V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-2} + V_{n-1} = U_n - U_0$ (après addition membre à membre).

$U_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-2} + V_{n-1}$ car $U_0 = 0$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = V_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right)$

$= \dfrac{a}{a-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\right)$

c. $\left|\frac{1}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$

$\Leftrightarrow \lim U = \frac{a}{a-1}$

U est donc convergente si $|a| > 1$.

4. $a = 2 \cdot U_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (d'après 3.b.).

Pour avoir $\left|U_p - 2\right| < 10^{-3}$; il suffit que $\frac{1}{2^{p-1}} < 10^{-3}$.

$\frac{1}{2^{p-1}} < 10^{-3} \Leftrightarrow 2^{p-1} > 10^3$
$\Leftrightarrow (p-1)\ln 2 > 3\ln 10$
$\Leftrightarrow p > \frac{3\ln 10}{\ln 2} + 1$
$\Leftrightarrow p > 10{,}96$

Donc le plus petit entier naturel p tel que $\left|U_p - 2\right| < 10^{-3}$ est 11 .

PROBLÈME
PARTIE A

1. a. $f(0) = 4$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x - 4\sqrt{x} + 4) = 4 = f(0)$

donc f est continue à droite en 0 .

b. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-4\sqrt{x}+4-4}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0 mais (C) admet au point d'abscisse 0 , une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

2. a Limite de f en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + 4 = +\infty$

b. $\forall x \in]0; +\infty\left[, f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

f est donc strictement décroissante sur $[0; 4]$ et strictement croissante sur $[4; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. Tracé de (C) ; voir figure.

3. a. g est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$ et $g([4; +\infty[) = [0; +\infty[$ g est donc une bijection de $[4; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ $\forall y \in [0; +\infty[, \exists! \, x \in [4; +\infty[$ tel que $y = x - 4\sqrt{x} + 4$.

$$y = x - 4\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow y = (\sqrt{x} - 2)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} - 2 \text{car} \sqrt{x} - 2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 2$$
$$\Leftrightarrow x = (\sqrt{y} + 2)^2$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = y + 4\sqrt{y} + 4$$

donc l'application réciproque g^{-1} de g est définie par :

$g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$

b. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Tracé de (C') ; (voir figure).

4. a. $[y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$

$$\Leftrightarrow (y - x + 4\sqrt{x} - 4)(y - x - 4\sqrt{x} - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$

On a ainsi établi l'équivalence demandée.

$$M\binom{x}{y} \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$$
$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = g^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow M \in (\mathrm{C}) \cup (\mathrm{C}')$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{M} \in (\mathrm{H}).$$

b. $\mathrm{M}\binom{a}{b} \in (\mathrm{E}) \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2-2\mathrm{a}b-8a-8b+16=0$

$\Leftrightarrow \quad b^2+a^2-2ba-8b-8a+16=0$
$\Leftrightarrow \quad \mathrm{M}\binom{b}{a} \in (\mathrm{E})$

La droite d'équation $y=x$ est donc un axe de symétrie de (E).

5. Soit A l'aire de cette partie du plan.

$$A=\int_0^4 (x-4\sqrt{x}+4)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{8}{3}\times\sqrt{x}+4x\right]_0^4$$
$$A=\frac{8}{3}$$

Partie B

1. a. Soit $m \in]-2;2[$ et $M\binom{x}{y}$.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{A}_m\ \mathrm{B}_m}\binom{-m-2}{2-m}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}_m\mathrm{M}}\binom{x-m-2}{y}$

$$\mathrm{M}\binom{x}{y} \in (\mathrm{D}_m) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_m\mathrm{M}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_m\ \mathrm{B}_m}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2-m & -m-2 \\ y & 2-m \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2-m)(2-m)+y(m+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{y}=\frac{m-2}{m+2}x-m+2$$

$(\mathrm{D}_m)\colon \mathrm{y}=\frac{m-2}{m+2}x-m+2$

b. $(\Delta_m)\colon y=x-2m$

$$M\binom{x}{y} \in (D_m)\cap(\Delta_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{m-2}{m+2}x-m+2 \\ y=x-2m \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{m+2}x-m+2=x-2m \text{ et } y=x-2m$$
$$\Leftrightarrow \frac{-4}{m+2}x=-m-2 \text{ et } y=x-2m$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{(m+2)^2}{4} \text{ et } y=\frac{(m+2)^2}{4}-2m$$

$$y=\frac{(m+2)^2}{4}-2m$$
$$=\frac{m^2+4m+4-8m}{4}$$
$$=\frac{m^2-4m+4}{4}$$
$$=\frac{(m-2)^2}{4}$$
$$y=\frac{(2-m)^2}{4}.$$

d'où $\mathrm{T}_m\left(\frac{1}{4}(2+m)^2;\frac{1}{4}(2-m)^2\right)$.

c. (D_m) est la tangente à (C) au point T_m signifie que :

$$\begin{cases} T_m \in (C) \\ f'\left(\frac{1}{4}(m+2)^2\right) = \frac{m-2}{m+2} \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{4}(m+2)^2\right) = \left(\frac{m+2}{2} - 2\right)^2$ car $m > -2$

$= \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 = \frac{(2-m)^2}{4}$

donc $T_m \in (C)$. (1)

- On sait que $\forall x \in]0; +\infty\left[, f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\right.$

$f'\left(\frac{(m+2)^2}{4}\right) = \frac{\frac{m+2}{2}-2}{\frac{m+2}{2}} = \frac{m-2}{m+2}$.

De (1) et (2), on conclut que (D_m) est la tangente à (C) au point T_m.

2. a. $(\delta): y = -x$

$\vec{u}\binom{1}{-1}$ est un vecteur directeur de (δ).

$H_m\binom{a}{b}$ est le projeté orthogonal de T_m sur (δ) si et seulement si :

$$\begin{cases} H_m \in (\delta) \\ \overrightarrow{T_m H_m} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{T_m H_m}\begin{pmatrix} a-\frac{1}{4}(m+2)^2 \\ b-\frac{1}{4}(m-2)^2 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} H_m \in (\delta) \\ \overrightarrow{T_m H_m} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a - \dfrac{1}{4}(m+2)^2 - b + \dfrac{1}{4}(m-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a - b = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \\ b = -m \end{cases}$

donc $H_m\binom{m}{-m}$

b. $F(2; 2)$; $A_m\binom{2+m}{0}$

$B_m\binom{0}{2-m}$; $H_m\binom{m}{-m}$

$\overrightarrow{FA_m}\binom{m}{-2}$; $\overrightarrow{FB_m}\binom{-2}{-m}$

$\overrightarrow{H_m A_m}\binom{2}{m}$; $\overrightarrow{H_m B_m}\binom{-m}{2}$

On a $FA_m = FB_m = H_m A_m = H_m B_m = \sqrt{m^2+4}$.

et $\overrightarrow{\mathrm{FA}_m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FB}_m} = -2m + 2m = 0$.
Donc $\mathrm{A}_m\mathrm{H}_m\ \mathrm{B}_m\ \mathrm{F}$ est un carré.

3. $m = 1/2$

$\mathrm{A}_1\left(\frac{5}{2};0\right)\quad \mathrm{B}_{1/2}\left(0;\frac{3}{2}\right)$
$\left(\mathrm{D}_{1/2}\right) = \left(\mathrm{A}_{1/2}\ \mathrm{B}_{1/2}\right)$
$\left(\Delta_{1/2}\right): x - y - 1 = 0$
$\left\{\mathrm{T}_{1/2}\right\} = \left(\mathrm{D}_{1/2}\right) \cap \left(\Delta_{1/2}\right)$.

$\mathrm{H}_{1/2}$ est le projeté orthogonal de $\mathrm{T}_{1/2}$ sur (δ).

Partie C

1. a. Puisque $H\binom{a}{b}$ est le projeté orthogonal de $M\binom{x}{y}$ sur la droite (δ), on a :
H $\begin{cases} H \in \delta \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ avec } \vec{u}\binom{1}{-1} \text{ vecteur directeur de } (\delta). \end{cases}$

On a : $\begin{cases} H \in \delta \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ (x-a) - (y-b) = 0 \end{cases}$ car $\overrightarrow{\mathrm{HM}}\binom{x-a}{y-b}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ b - a = y - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2b = y - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}(y-x) \\ a = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ a + bi = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(y-x)$

$\Leftrightarrow\ a + bi = \frac{1}{2}(x+yi) + \frac{1}{2}(-y-xi)$

$\Leftrightarrow\ a + bi = \frac{z-i\bar{z}}{2}$.

Donc le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{\bar{z}}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur (δ).

b. $\mathrm{d}(\mathrm{M},(\delta)) = \mathrm{MH} = |z - z_{\mathrm{H}}| = \left|z - \frac{z-i\bar{z}}{2}\right|$.

$\mathrm{d}(\mathrm{M},(\delta)) = \left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|$.

2. a. $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)|$

$\Leftrightarrow |z+i\bar{z}|^2 = 4|z-(2+2i)|^2$ · Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

alors $z + i\bar{z} = (x+iy) + i(x-iy)$

$= x + y + i(y+x)$

et $z - (2+2i) = (x-2) + i(y-2)$.

D'où $|z+i\bar{z}|^2 = 4|z-(2+2i)|^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y+x)^2 = 4(x-2)^2 + (y-2)^2$

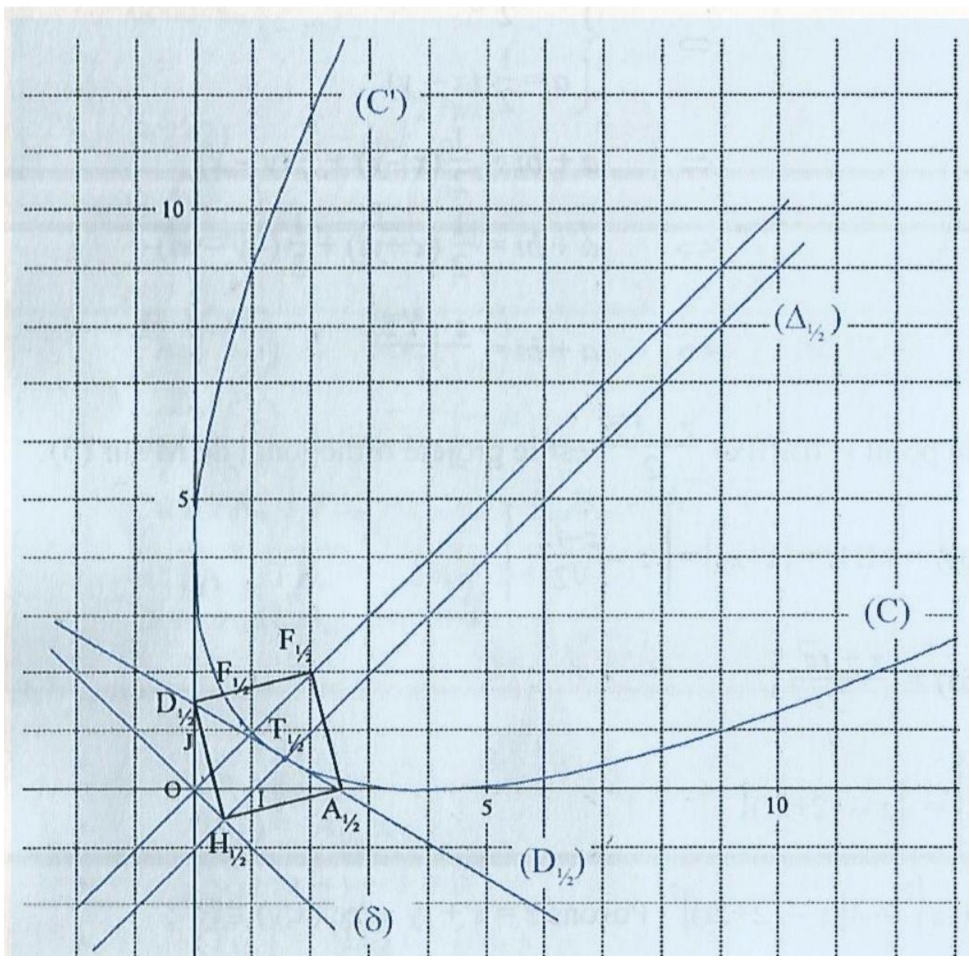
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

$\Leftrightarrow M\binom{x}{y} \in (E)$. Donc (E) est bien l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie $\left|\frac{z+i\bar{z}z}{2}\right| = |z-(2+2i)|$

b. $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right| = |z-(2+2i)| \Leftrightarrow d(M,(\delta)) = d(M,F)$

$\Leftrightarrow \frac{d(M,(\delta))}{d(M,F)} = 1$

(E) est donc la parabole de foyer $F\binom{2}{2}$ et de directrice (δ) d'équation : $y = x$.



CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1997 série C

EXERCICE 1

1. a. On remplace p par -1 et q par -1 dans l'équation (E) et on obtient:

$11p-7q=-11+7=-4$

donc $(-1,-1)$ est une solution de E.

b. $\begin{cases} 11p-7q=-4 \\ 11(-1)-7(-1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow 11(p+1)-7(q+1)=0$

$$\Leftrightarrow 11(p+1)=7(q+1).(*)$$

Donc 11 divise $7(q+1)$. Comme 11 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss, 11 divise $q+1$.

Par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $q+1=11k;$

On obtient $q=-1+11k$.

En remplaçant dans la relation $(^*), q$ par $-1+11k$ on obtient $p=-1+7k$.

D'où les solutions de (E) sont lés couples $(-1+7k,-1+11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. a (F): $x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7]$.

Calculons $2x$ suivant les classes de congruence modulo 7.

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5

Par conséquent : $2x \equiv 3[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7] \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Z}\, x=5*7\ s$.

$$\mathrm{S}_{(\mathrm{F})}=\{5+7s, s \in \mathbb{Z}\}$$

(G) : $x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$.

Calculons $9x$ suivant les classes de congruence modulo 11.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$9x$	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

Par conséquent $9x \equiv 4[11] \Leftrightarrow x \equiv 9[11]$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z}/x = 9 + 11t$

$S_{(G)} = \{9 + 11t, t \in \mathbb{Z}\}$

b. Les solutions du système sont les nombres qui sont à la fois solutions de

(F) et de (G).

Cela revient à résoudre $\begin{cases} x = 5 + 7\text{ s} \\ x = 9 + 11\text{t}, (s, t) \in \mathbb{Z}^2; \end{cases}$

ce système se ramène à : $\begin{cases} 11t - 7s = -4 \\ x = 5 + 7s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 7k \\ x = 5 + 7\text{ s} \end{cases}$ et $s = -1 + 11k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -2 + 77k$

Les solutions du système sont les nombres entiers relatifs x qui s'écrivent :
$x = -2 + 77k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

1. Il y a 10 boules dans l'urne. Il y a 4 cas favorables à l'événement "obtenir une boule blanche", la probabilité de cet événement est alors : $\text{p} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ éléments parmi 10 est :

$$\text{p} = 1 - \frac{6^4}{10^4}$$

Nombre de cas possibles : $\text{C}_{10}^2 = 45$.

Il y a C_4^2 possibilités de tirer 2 boules blanches et C_6^2 possibilités de tirer 2 boules rouges.

Nombre de cas favorables $\text{C}_6^2 + \text{C}_4^2 = 15 + 6 = 21$.

Par conséquent la probabilité de cet événement est $p = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

3. a. 1^{re} méthode : il s'agit d'un enchaînement de 4 épreuves indépendantes aboutissant à 2 issues.

S : "obtenir une boule blanche"

$\bar{S}$: "obtenir une boule rouge"

$\text{p}(\text{S}) = \frac{2}{5}$ et $\text{p}(\overline{\text{S}}) = \frac{3}{5}$

C'est un schéma de Bernoulli. La probabilité de tirer exactement 2
boules rouges est :

$p(2R) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$= \frac{6\times9\times4}{625} = \frac{216}{625}$

b. La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est :

$$\text{p} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{544}{625}$$

2^{e} méthode : on considère qu'un résultat est un 4-uplet; à chaque tirage il y a 10 choix possibles. Donc le nombre de cas possibles est 10^4.

a. Soit E l'événement, tirer 2 boules rouges exactement.

$$\text{p(E)} = \frac{\text{C}_4^2 \times 6^2 \times 4^2}{10^4} = \frac{6 \times 9 \times 4}{625}$$

b. Il y a 6^4 possibilités de tirer uniquement des boules rouges à l'issue des 4 tirages. La probabilité de l'événement "aucune boule blanche" est : $\text{p} = \left(\frac{6}{10}\right)^4$. L'événement "tirer au moins une boule blanche" est l'évènement contraire. Donc sa probabilité est :

$$\text{p} = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^4 = 1 - \frac{3^4}{5^4} = \frac{544}{625}$$

PROBLĖME

Partie A

1. $\forall x \in]0; +\infty\left[, g'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x\right.$

2. Pour connaître le signe de $g'(x)$, calculons $g''(x)$.

On a $g''(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$.

$\forall x \in]0; +\infty[, g''(x) > 0$.

Donc g' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme $g'(1) = 0$ on peut conclure que :

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Alors, g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. g admet 0 pour minimum absolu ; donc pour tout $x \in]0;+\infty[, g(x) \geqslant 0$.

Partie B

1. a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

b. - $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left[(x^2 \ln x)\frac{1}{x-1}\right] = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue à droite en 0 .

- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 \frac{\ln x}{x-1} = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \lim_{x\to 1} x^2 = 1 \end{cases}$ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1

  c. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \left[(x \ln x)\frac{1}{x-1}\right] = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$ f est donc dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 0$. La courbe (C) admet une
  demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 .

d. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Une équation de (T) est :

$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

2. a. $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} \ln x + \frac{x}{x-1} \\ &= \frac{x}{(x-1)^2}[(x-2)\ln x + (x-1)] \\ &= \frac{x}{(x-1)^2} \cdot g(x) \end{aligned}$$

b. Pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $g(x) > 0$ et $\frac{x}{(x-1)^2} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

De plus f est continue en 1 et continue à droite en 0 .

Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	
$f(x)$	0		1		$+\infty$

c. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ car f est strictement croissante, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

d. voir figure à la fin du problème.

Partie C

1. $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = 1.$

alors A représente l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. a. $\mathrm{H}_n'(t) = t^n \left(\ln t - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{t} = t^n \ln t$

H_n est une primitive de $t \mapsto t'' \ln(t)$ définie sur $]0;+\infty[$.

b. $\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \ln(t) dt = \mathrm{H}_n\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) - \mathrm{H}_n\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = 1 \\ \lim_{t \to 1} \mathrm{H}_n(t) = \lim_{t \to 1} \frac{n^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{(n+1)^2}, \end{cases}$ donc $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \mathrm{H}_n\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0$

$\lim\limits_{t \to 0} \mathrm{H}_n(t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1} \ln t - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right] = 0$

d'où $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \mathrm{H}_n\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0.$

Alors $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \frac{1}{2} \\ <}} \mathrm{I}_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2} \cdot$ Par conséquent $\mathrm{I}_n = -\frac{1}{(n+1)^2}.$

3. a.

$t^2+t^3+\cdots\ldots+t^{n+1}=\frac{t^2(1-t^n)}{1-t}$

$=\frac{t^{n+2}}{t-1}-\frac{t^2}{t-1}$

d'où $\frac{t^2}{t-1}=-(t^2+t^3+\cdots+t^{n+1})+\frac{t^{n+2}}{t-1}$

$\mathrm{A}(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{t^2}{t-1}\ln t dt=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(-t^2-t^3-\cdots.-t^{n+1}+\frac{t^{n+2}}{t-1}\right)\ln(t)dt$

$=-\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^2\ln t dt-\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^3\ln t dt-\cdots-\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^{n+1}\ln t dt+\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{t^{n+2}}{t-1}\ln t dt$

$=-\mathrm{I}_2(\alpha)-\mathrm{I}_3(\alpha)\ldots-\mathrm{I}_{n+1}(\alpha)+\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n f(t)dt$

b. - D'après $B\cdot 2{,}0\leqslant f(t)\leqslant 1.$

Alors $0\leqslant t^n f(t)\leqslant t^n$ pour tout t appartenant à $]0;1[$ d'où $0\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n f(t)dt\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n dt$

- Soit F une primitive de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $[0;+\infty[$.

Alors $\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n dt=\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

Posons pour $\alpha\in\left[0;\frac{1}{2}\right], G(\alpha)=F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

on a $G'(\alpha)=F'\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)+F'\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^n$

$\alpha\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$, d'où $\frac{1}{2}+\alpha>0$ et $\frac{1}{2}+\alpha\geqslant 0;$

par conséquent $G'(\alpha)>0.$ G est donc strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Alors : $\forall\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right], G(\alpha)\leqslant G\left(\frac{1}{2}\right)$.

C'est-à-dire $F\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)-F\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\leqslant F(1)-F(0)$

$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n dt\leqslant\int_0^1 t^n dt$

d'où $0\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n dt\leqslant\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n dt\leqslant\int_0^1 t^n dt$

c. $A(\alpha)+\mathrm{I}_2(\alpha)+\cdots+\mathrm{I}_{n+1}(\alpha)=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha}t^n f(\mathrm{t})dt$ d'après C.3.a.

D'où le résultat

$0 \leqslant \ A(\alpha) + I_2(\alpha) + \cdots + I_n(\alpha) \leqslant \int_0^1 t^n dt$

or $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

On obtient alors la conclusion demandée :

$0 \leqslant \ A(\alpha) + I_2(\alpha) + \cdots + I_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Par passage à la limite on a :

$0 \leqslant \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}} (A(\alpha) + I_2(\alpha) + \cdots . + I_{n+1}(\alpha)) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

d'où $0 \leqslant A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .. + \frac{1}{(n+2)^2}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

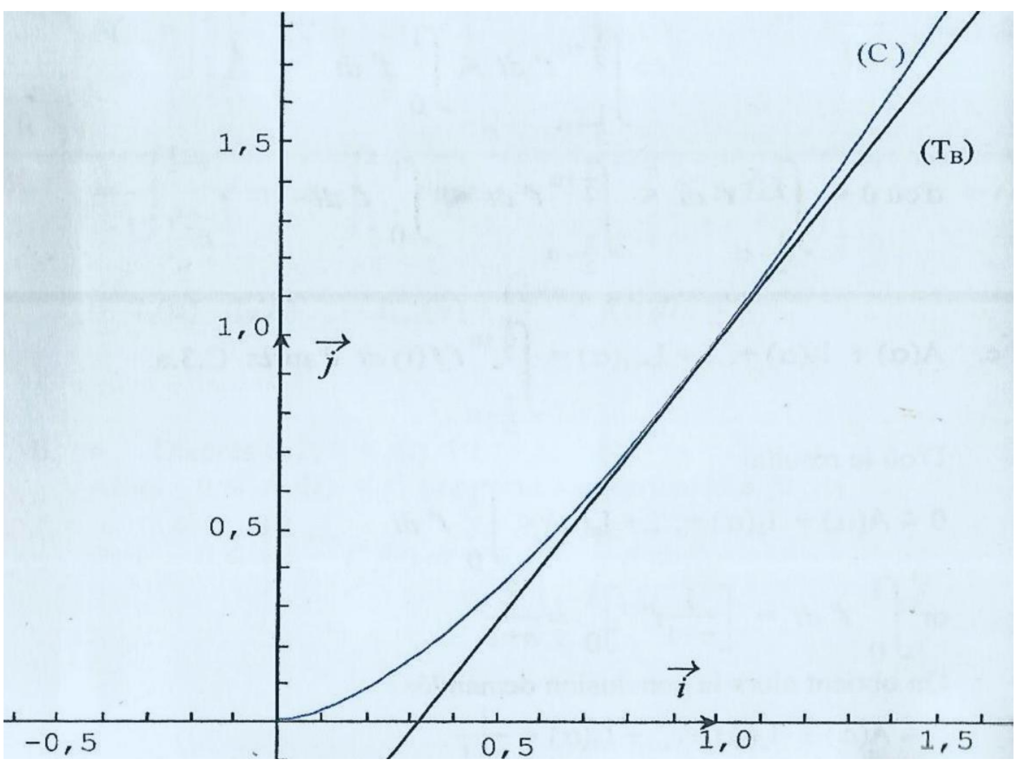
On a $\lim_{n\to+\infty} \left[A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right)\right] = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

D'où $\mathrm{A} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right)$

d. Or $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

Par conséquent $1 + \frac{1}{2^2} + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$, d'où $\mathrm{A} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$.

$\mathrm{A} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$



CORRECTION SESSION NORMALE 1997 SÉRIE C

EXERCICE1

1. a. $J_0 = \int_0^{\pi/3} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x dx.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u(x) = \sin x$

$u'(x) = \cos x$

Alors $(\sin x)^n \cos x = u^n(x) u'(x)$.

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto u^n(x)u'(x)$ est la fonction

$x \mapsto \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x)$.

On a: $J_n = \frac{1}{n+1}[(\sin x)^{n+1}]_0^{\pi/3}$

$$J_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$J_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

b. $I_2 - I_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{-\cos^2 x}{\cos x} dx$

$= \int_0^{\pi/3} - \cos x dx$

$= [-\sin x]_0^{\pi/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n \geqslant 1,\ I_{n+2} - I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^{n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} (\sin^2 x - 1) dx$

$= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} \cos^2 x dx$

$= -\int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x dx = -J_n$

$I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

$I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

2. a. $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

On pose $u(x) = \cos x$,

$u'(x) = -\sin x$ donc $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$

$\mathrm{I}_1 = -\int_0^{\pi/3} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = -[\ln|u(x)|]_0^{\pi/3}$

$\mathrm{I}_1 = -\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right)$ d'où $\mathrm{I}_1 = \ln 2$

b. D'après 1.b, $I_3 - I_1 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{8}$

$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1 - \frac{3}{8}$ d'où $\mathrm{I}_3 = -\frac{3}{8} + \ln 2$

3. a. $2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\
&= \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b. $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], u'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\begin{aligned}
\frac{u'(x)}{u(x)} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos x}$

d'où $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Par conséquent une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ est

$\mathrm{F}: x \mapsto \ln|u(x)|$ où $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

c. $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$

$= \left[\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\pi/3}$

$= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

d'où $I_0 = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ car $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $I_0 = \ln(\sqrt{3}+2)$

On a : $I_2 - I_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d'après 1.b.)

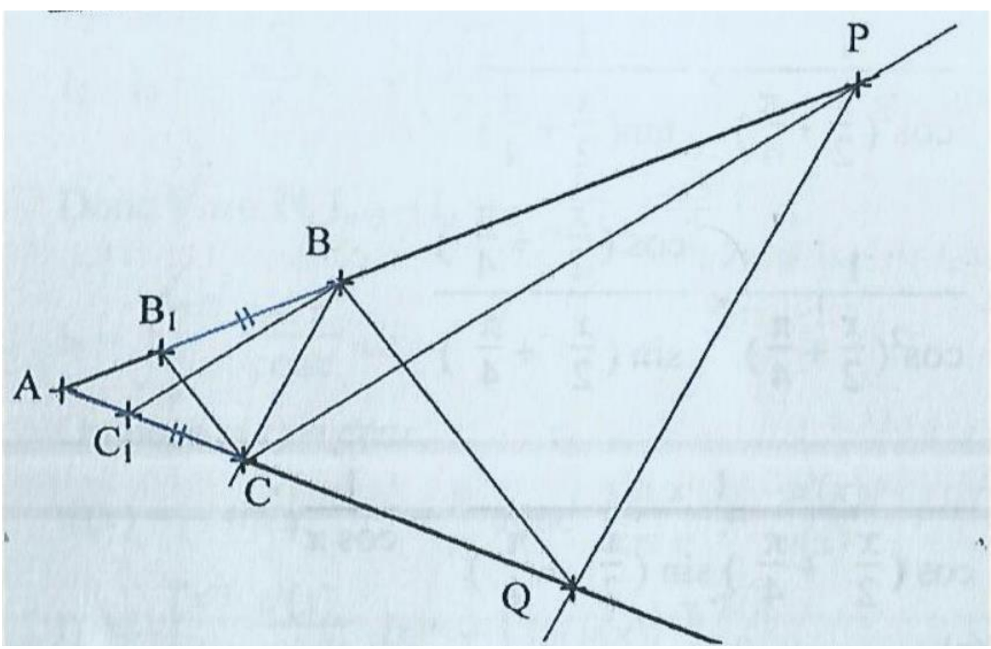
D'où $I_2 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $I_4 - I_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ (d'après 1.b.)

$= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

d'où $I_4 = \frac{-5\sqrt{3}}{8} + \ln(\sqrt{3}+2)$.

EXERCICE 2



1. (BC)//(PQ)

$(BP) \cap (QC) = \{A\}$

2. a. Construction de B_1 et de C_1 (voir figure).

$\xrightarrow{h}$

A	A
P	B
Q	C
B	B_1
C	C_1

- B_1 est tel que $(BQ)//(CB_1)$ et $B_1 \in (AB)$

*C_1 est tel que $(BC_1)//(PC)$ et $C_1 \in (AC)$

b. si k est le rapport de h alors $AC = |k|AQ$ et $BB_1 = |k|BP$

or $AQ = BP$, donc $AC = |k|BP = BB_1$

Par conséquent, $AC = BB_1$.

3. RST est un triangle.

I et J sont deux points tels que :

$[(IJ)//(ST)$

$\{I \in (SR) \setminus \{S;R\}$

$J \in (RT)$

$RJ = SI$

a. RST est isocèle en R.

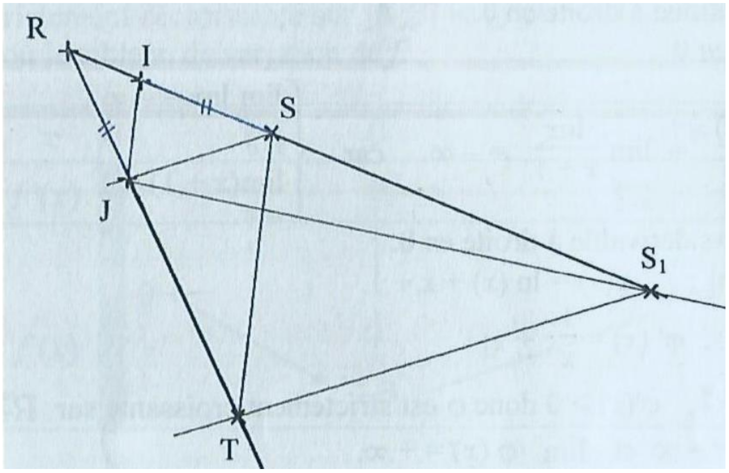
Soit I et J les milieux respectifs de [SR] et [RT].

On a bien :

$$\begin{cases} (IJ)//(ST) \\ I \in (SR) - \{S;R\} \\ J \in (RT) \\ RJ = SI \end{cases}$$

Les points I et J sont des solutions au problème posé.

b. RST est un triangle tel que $\mathrm{RS} \neq \mathrm{RT}$.



Soit S_1 un point de $[RS)$ tel que $S_1 = RT$.

Soit J le point de (RT) tel que (SJ) // (TS_1).

I est le point de (RS) tel que (IJ) // (ST).

Soit h l'homothétie telle que :

$\xrightarrow{h}$

R	R
S_1	S
T	J
S	I

avec $\mathrm{SS}_1 = \mathrm{RT}$.

D'après les premières questions, en prenant :

R pour A

J pour C

S pour B

I pour B_1,

On a $\mathrm{SI} = \mathrm{RJ}$

PROBLÈME

Partie A

1. Continuité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{x}\ln(x)}{x+1} = 0 = f(0) \ \ car \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \end{cases}$$

Donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty \ \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \end{cases}$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 .

2. $\forall x \in]0;+\infty[;\ \varphi(x) = \ln(x) + x + 1.$

a. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1.$

et $\forall x \in \mathbb{R}**.$ $\varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

b. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >0}} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$

φ est une fonction continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et tel que $\varphi(\beta) = 0.$

On a $\varphi(0{,}27) \simeq -0{,}04$ et $\varphi(0{,}28) \simeq 0{,}007$

$\varphi(0{,}27) \times \varphi(0{,}28) < 0$ donc $\beta \in]0{,}27;0{,}28[.$

3. a. $\forall x \in]0;+\infty\Big[, f'(x) = \frac{[\ln(x)+1](x+1) - x\ln(x)}{(x+1)^2}$

$= \frac{x\ln(x)+\ln(x)+x+1-x\ln(x)}{(x+1)^2}$

donc $\forall x \in]0;+\infty\Big[,\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}.$

$f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$.

b. $f(\beta) = \frac{\beta\ln(\beta)}{\beta+1}$

$\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln(\beta) = -\beta - 1$

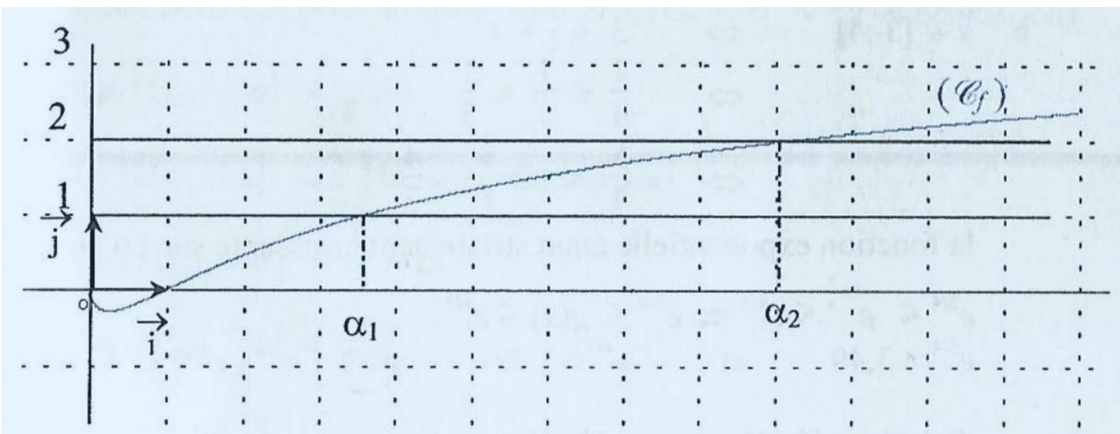
Donc $f(\beta) = \frac{\beta(-\beta-1)}{\beta+1} = -\beta$

c. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\cdot \ln x\right) = +\infty.$

d. Comme $\varphi(\beta) = 0$ et φ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors, $\forall x \in]0;\beta[, \varphi(x) < 0$ et $\forall x \in]\beta;+\infty[\varphi(x) > 0$. Par suite f est strictement décroissante sur $]0;\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$. d'où le tableau de variation de f.

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construction de (*C*) (voir figure).



Partie B

1. a. f est continue et strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$ et $f([\beta;+\infty[) = [-\beta;+\infty[$. f est donc une bijection de $[\beta;+\infty[$ sur $[-\beta;+\infty[$.

$1 \in [\beta;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[\beta;+\infty[$.

$[3;4] \subset [\beta;+\infty[$

$f(3) \simeq 0{,}82$ et $f(4) \simeq 1{,}1$

$f(3) \leqslant 1 \leqslant f(4)$

f étant strictement croissante, on a : $3 \leqslant \alpha \leqslant 4$ c'est-à-dire $\alpha \in [3;4]$

b. $\forall x \in]0;+\infty\Big[, f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x\ln(x)}{x+1} = 1$

$$\Leftrightarrow x\ln(x) = x + 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{1+\frac{1}{x}}$$

donc les équations $f(x) = 1$ et $x = e^{1+\frac{1}{x}}$ sont équivalentes.

2. a. $\forall x \in]0; +\infty\left[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}}\right.$

on a : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0.$

Par conséquent g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
b. $x \in [3; 4] \iff 3 \leqslant x \leqslant 4$

$\iff \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$
$\iff \frac{5}{4} \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant \frac{4}{3}$

la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ $e^{5/4} \leqslant e^{1+\frac{1}{x}} \leqslant e^{4/3} \iff e^{5/4} \leqslant g(x) \leqslant e^{4/3}$.
$e^{5/4} \simeq 3{,}49$ et $e^{4/3} \simeq 3{,}79$ d'où $\left[e^{5/4}; e^{4/3}\right] \subset [3; 4]$

d'où $\forall x \in [3; 4],\ g(x) \in [3; 4]$
c. $\forall x \in [3; 4] g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} g(x)$

or $0 < g(x) \leqslant 4$ et $\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{9}$ donc $|g'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$

d'où $\forall x \in [3; 4],\ |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

3. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$
a. $U_0 = 3, U_0 \in [3; 4]$. Supposons que pour un entier naturel $n, U_n \in [3; 4]$ et démontrons que $U_{n+1} \in [3; 4]$.

$U_{n+1} = g(U_n)$ or $\forall x \in [3; 4], g(x) \in [3; 4]$ donc si $U_n \in [3; 4]$ alors $g(U_n) \in [3; 4]$ c'est-à-dire $U_{n+1} \in [3; 4]$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$
b. g est dérivable sur $[3; 4], \alpha \in [3; 4], U_n \in [3; 4]$ et $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |g(U_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ d'après l'inégalité des accroissements finis.

En utilisant l'équivalence $e^{1+\frac{1}{x}} = x \iff f(x) = 1$ (voir 1.b.), on a $g(\alpha) = \alpha$. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$

Pour $n = 0 |U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$

$3 < \alpha < 4$ donc $-4 < -\alpha < -3$

$-1 < 3 - \alpha < 0$

d'où $|3 - \alpha| < 1$.

Supposons que pour un entier naturel $n, |U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et démontrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$

Or $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left|\dot{U}_n - \alpha\right|$ (d'après 3.a)

donc $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$

d'où $|U_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$

c. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(U_n)=\alpha$

d. U_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $|U_n-\alpha|<10^{-2}$.

Comme $|U_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-2}$

$2^n \geqslant 10^2$
$n\ln 2 \geqslant 2\ln 10$
$n \geqslant \frac{2\ln 10}{\ln 2}$

$\frac{2\ln 10}{\ln 2} \simeq 6{,}64$ donc $n \geqslant 7$

Partie C

1. $n \in \mathbb{N}^*$ D'après A.3.d., $\beta>0$ et $f[0;\beta[)=[-\beta;0[$ donc l'équation $f(x)=n$, n'a pas de solution dans $[0;\beta[$.
   f est une biact

f est une bijection de $[\beta;+\infty[$ sur $[-\beta;+\infty[$ et $n \in [-\beta;+\infty[$ donc il existe

2. a. $f(\alpha_n)=n$

$f(e^n)=\frac{ne^n}{e^n+1}$ et $\frac{e^n}{e^n+1} \leqslant 1$ donc $\frac{ne^n}{e^n+1} \leqslant n$

d'où $f(e^n) \leqslant n$ c'est-à-dire que $f(\mathrm{e}'') \leqslant f(\alpha_n)\cdot f$ est strictement croissante sur $]\beta;++\infty[$
donc $e^n \leqslant \alpha_n$ car $n \geqslant 1 \Rightarrow e^n \geqslant \mathrm{e} \Rightarrow e^n \geqslant \beta$.

b. $f(\alpha_n)=\frac{\alpha_n\ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1}=n$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_n\ln(\alpha_n)}{\alpha_n+1}=n &\Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{1+\alpha_n}=\frac{n}{\alpha_n}\\
&\Leftrightarrow \ln(\alpha_n)=\frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n)\\
&\Leftrightarrow \alpha_n=e^{\frac{n}{\alpha_n}(1+\alpha_n)}\\
&\Leftrightarrow \alpha_n=e^{\frac{n}{\alpha_n}}\times e^n\\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{e^n}=e^{\frac{n}{\alpha_n}}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}
\end{aligned}$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geqslant e^n > 0 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{\alpha_n} \leqslant \frac{1}{e^n} \Leftrightarrow 0<\frac{n}{\alpha_n} \leqslant \frac{n}{e^n}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e^n}\right)=0$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)=0$

par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=1$.

$\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est donc une suite qui converge vers 1 .

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1996 SÉRIE E

EXERCICE 1

1. a. La composée d'une rotation d'angle non nul de mesure α et d'une translation est une rotation d'angle de mesure α.

Donc f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
b. $t(O) = O'$ et $r(O') = O' \text{donc} f(O) = O'$.

Par conséquent l'image de ($()$ par f est le cercle ($\mathcal{C}$ ') de centre O ' et de rayon R.
c. f est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Comme $f(O) = O', \Omega$ est tel que $\Omega OO'$ est un triangle équilatéral direct ; ce qui permet de construire Ω.

Construction de Ω (voir figure).

2. a. $f(M) = M' \Leftrightarrow f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega\mathrm{M} = \mathrm{SM}' \\ \mathrm{mes}\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\Omega\mathrm{M}M'$ est un triangle isocèle où $\mathrm{mes}\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Il est donc un triangle équilatéral direct.

b. (Ω I) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ donc mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}}) = \frac{\pi}{6}$ $\Omega\mathrm{MI}$ est un triangle rectangle en I et $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \Omega\mathrm{I}}) = \frac{\pi}{6}$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\Omega\mathrm{I}}{\Omega\mathrm{M}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Omega\mathrm{I} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega\mathrm{M}$$

Cette similitude directe S, de centre Ω, a pour rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

c. Déterminons $S(O)$.

$\Omega\mathrm{O}\mathrm{O}'$ est un triangle équilatéral direct.

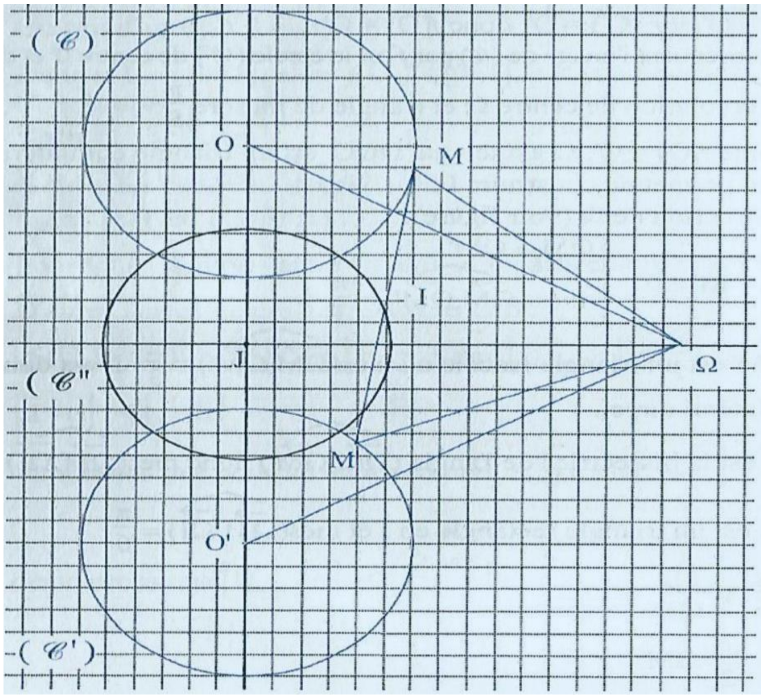
Soit J le milieu de [OO']. On a :

$$\begin{cases} \mathrm{mes}(\overrightarrow{\overline{\Omega O}}, \overrightarrow{\Omega J}) = \frac{\pi}{6} \\ \frac{\Omega J}{\Omega 0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc $\mathrm{S}(\mathrm{O}) = \mathrm{J}$

Lorsque M décrit ($\mathcal{C}$), I décrit le cercle ($\mathcal{C}''$) de centre J et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ R.

Construction : on construit le cercle de centre J et de rayon $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.



EXERCICE 2

Posons $\mathrm{E} = \{1; 2; 3; ; 49; 50\}$.

Soit Ω l'ensemble des résultats. $\Omega = \mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Donc Card $\Omega = 50 \times 50 = 2500$

1. a. $\mathrm{P}(a = b) = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}$

En effet l'ensemble $\{(1,1); (2,2); (3,3); \ldots; (50; 50)\}$ a 50 éléments
b. $\{(a, b)/a + b = 20\} = \{(1; 19); (2; 18); (3; 17); (4; 16); (5; 20);$
$(6; 14); (7; 13); (8; 12); (9; 11); (10; 10); (11; 9); (12; 8); (13; 7); (14; 6); (15; 5); (16; 4); (17; 3); (18; 2); (19; 1)\}.$

Il y a 19 cas favorables

$$\mathrm{P}(a + b = 20) = \frac{19}{2500}$$

c. Il y a 36 nombres entiers compris entre 15 et 50 . Pour chacun de ces entiers, il y a 50 couples solutions. Par conséquent, le nombre de couples (a, b) tels que $b \geqslant 15$ est 36×50.

$$P(b \geqslant 15) = \frac{36 \times 50}{2500}$$
$$= \frac{36}{50}$$
$$= \frac{18}{25}$$

d. $\{(a, b)/b \geqslant a\}$

Si $a=1$, on a 50 couples solutions

Si $a=2$, on a 49 couples solutions

Si $a=49$, on a 2 couples solutions

Si $a=50$, on a 1 couple solution.

Le nombre de cas favorables est

$50+49+48+\cdots.+2+1=\frac{50(1+50)}{2}=25\times 51$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(b\geqslant a)&=\frac{25\times51}{2500}\\&=\frac{51}{100}\\&=0{,}51.\end{aligned}$$

2. Soit E l'événement : " $b\geqslant a$ " est réalisé au moins 2 fois.

$\overline{\mathrm{E}}$ est l'événement : " $b\geqslant a$ " est réalisé au plus 1 fois.

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}})=\mathrm{C}_5^0(0{,}49)^5+\mathrm{C}_5^1(0{,}51)\times(0{,}49)^4$

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}})\simeq 0{,}18.$

$\mathrm{P}(\mathrm{E})=1-\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}})$

$\mathrm{P}(\mathrm{E})\simeq 1-0{,}18.$

$\mathrm{P}(\mathrm{E})\simeq 0{,}82.$

PROBLEME

Partie A

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$\mathrm{D}f_n=\mathbb{R}.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$, et $f_n(-x)=f_n(x)$ donc f_n est paire

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$ car $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0\text{car}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty.$

Par suite $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)&=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\&=\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$f_0'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$f_0'(x)<0\Leftrightarrow x>0$

$f_0'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

f_0 est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On remarque que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_0). Construction de (C_0) (voir figure).

3. Cherchons les solutions de l'équation: $\forall x^{2n+2}\ \forall \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

- $n \geqslant 1, f_n(0) = 0; f_0(0) = 1$
- $n \geqslant 1, f_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}; f_0(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $n \geqslant 1, f_n(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}; f_0(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc toutes les courbes $\mathrm{C}_n (n \in \mathbb{N})$ passent par les points $\mathrm{A}\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\mathrm{A}'\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. $n \geqslant 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{2n} f_0(x).$$

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{2nx^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{2n}(-x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2nx^{2n-1}(1+x^2) - x^{2n+1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x^{2n-1}(2n+2nx^2-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

$$f_n'(x) = \frac{[(2n-1)x^2+2n]x^{2n-1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

5. a. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_1(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = +\infty$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_2(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x^4}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}$

$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = +\infty$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = \frac{(x^2+2)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ f_1 est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Tableau de variation de f_1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = \dfrac{(3x^2+4)x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_2'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

f_2 est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. - $f_1(x) - x = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x$

$= \frac{x^2 - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

$= \frac{-x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$ pour $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$= 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) - x = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_1) en $+\infty$.

- Position de (C_1) par rapport (Δ).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) - x = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$f_1(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f_1(x) - x < 0 \Leftrightarrow x > 0$
$f_1(x) - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Sur $]-\infty; 0[, (C_1)$ est au-dessus de (Δ).

Sur $]0; +\infty[, (C_1)$ est en dessous (Δ). (C_1) et (Δ) se coupent au point O.

- Construction de (C_1) et (C_2) (voir figure).

PARTIE B

$n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geqslant 0$ donc $\forall x \in [0;1], f_n(x) \geqslant 0$.

Par conséquent $I_n \geqslant 0$.
2. $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$0 \leqslant x \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$

$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^{2n}$

$\Rightarrow \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{2}} dx \leqslant \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dx \leqslant \int_0^1 x^{2n} dx$

$\Rightarrow \left[\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

4. a. f_0 est décroissante sur $[0;1]$

$\forall x \in [a_i; a_{i+1}]$
$f_0(a_{i+1}) \leqslant f_0(x) \leqslant f_0(a_i)$
$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_{i+1})dx \leqslant \int_{a_i}^{a_{++1}} f_0(x)dx \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(a_i)dx$

$[a_{i+1} - a_i]f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{+1}} f_0(x)dx \leqslant [\mathrm{a}_{\mathrm{i}+1} - \mathrm{a}_{\mathrm{i}}]f_0(\mathrm{a}_{\mathrm{i}})$

or $a_{i+1} - a_i = 0.2$.

Donc $0{,}2 f_0(a_{i+1}) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)dx \leqslant 0{,}2 f_0(a_i)$.
b. $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$0{,}98 < f_0(0{,}2) < 0{,}99$

$0{,}92 < f_0(0{,}4) < 0{,}93$

$0{,}85 < f_0(0{,}6) < 0{,}86$

$0{,}78 < f_0(0{,}8) < 0{,}79$

$0{,}70 < f_0(1) < 0{,}71$

$\mathrm{I}_0 = \int_0^1 f_0(x)dx$

$= \int_0^{0,2} f_0(x)dx + \int_{0,2}^{0,4} f_0(x)dx + \int_{0,4}^{0,6} f_0(x)dx + \int_{0,6}^{0,8} f_0(x)dx + \int_{0,8}^{1} f_0(x)dx$

$0{,}2[f_0(1) + f_0(0{,}8) + f_0(0{,}6) + f_0(0{,}4) + f_0(0{,}2)] \leqslant \mathrm{I}_0 \leqslant 0{,}2[f_0(0{,}8) + f_0(0{,}6)$

$+f_0(0{,}4) + f_0(0{,}2) + f_0(0)]$

$0{,}2 \times 4{,}23 \leqslant \mathrm{I}_0 \leqslant 0{,}2 \times 4{,}57$

$0{,}846 \leqslant \mathrm{I}_0 \leqslant 0{,}914$

5. a. $n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Posons $\mathrm{U}(x) = x^{2n+1}$ et $\mathrm{V}'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On a : $\mathrm{U}'(x) = (2n+1)x^{2n}$; choisissons $\mathrm{V}(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$\mathrm{I}_{n+1} = \left[x^{2n+1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2\mathrm{n}+1)x^{2n}\sqrt{1+x^2}dx$$

$$= -\int_0^1 (2n+1)x^{2n} \times \frac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} - (2n+1)\left[\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1+x^2}}dx\right]$$

$$= \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + \mathrm{I}_n + 1)$$

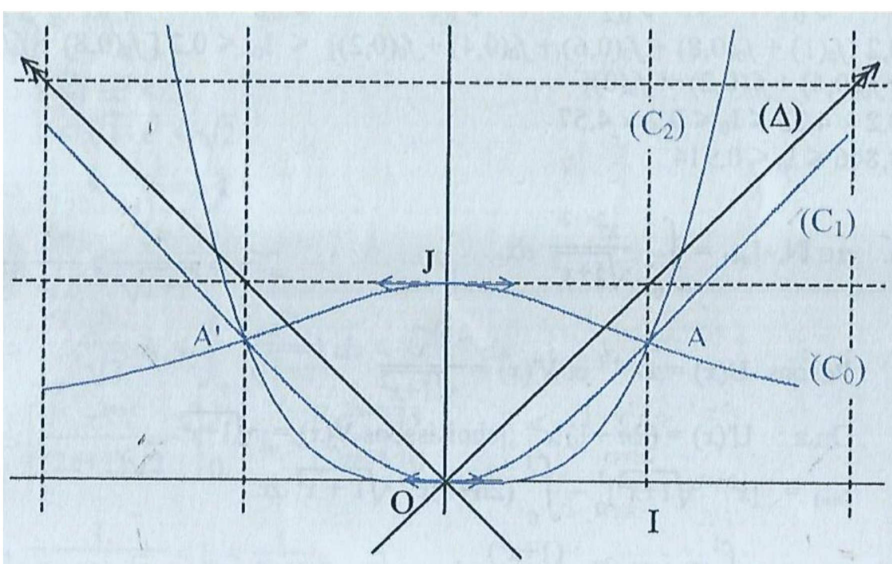
$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1})$

b. $I_1 = \sqrt{2} - (I_0 + I_1)$

$$\mathrm{I}_1 = \sqrt{2} - \mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_1$$
$$2\mathrm{I}_1 = \sqrt{2} - \mathrm{I}_0$$
$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \mathrm{I}_0\right)$$

On sait que $0{,}846 \leqslant \mathrm{I}_0 \leqslant 0{,}914$

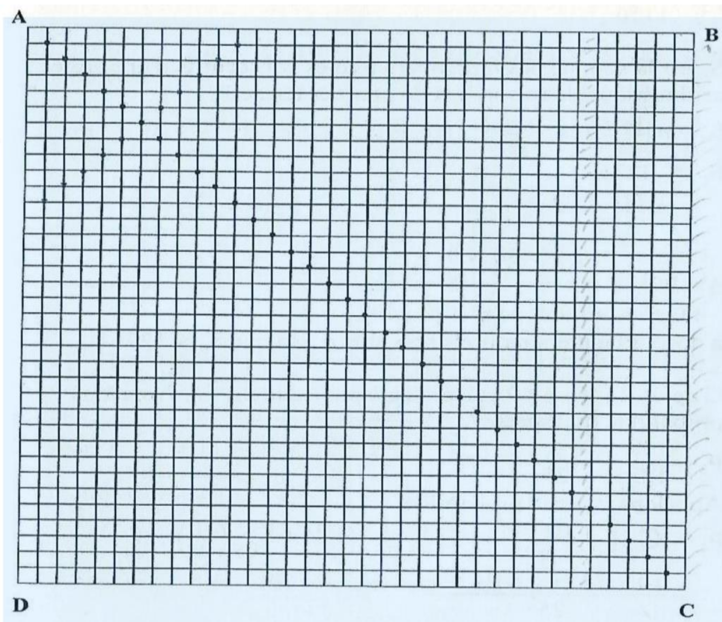
$$-9{,}14 \leqslant -\mathrm{I}_0 \leqslant -0{,}846$$
$$1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$$
$$0{,}500 \leqslant \sqrt{2} - \mathrm{I}_0 \leqslant 0{,}569$$
$$0{,}25 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \mathrm{I}_0\right) \leqslant 0{,}2845$$
$$0{,}25 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \mathrm{I}_0\right) \leqslant 0{,}29$$



CORRECTION SESSION NORMALE 1996 SÉRIE E

EXERCICE 1

1. a. Sur une ligne, il y a 34 nœuds or, il y a 34 lignes qui contiennent les nœuds. A Donc le nombre de nœuds est 34×34, c'est-à-dire 1156 (voir quadrillage).



b.1.Le quadrilatère AIMJ est un carré. Donc M est sur la diagonale [AC]. Or sur cette diagonale, il y a 34 nœuds.

Soit P_1 cette probabilité.

$$P_1 = \frac{34}{34 \times 34} = \frac{1}{34}$$

b.2. Si le périmètre est $24\ \mathrm{cm}$, alors le demi-périmètre est $12\ \mathrm{cm}$.

Les nœuds concernés ont donc pour couple de coordonnées :

$(1; 11); (11,1)$

$(2,10); (10,2)$

$(3,9); (9,3)$

$(4,8); (8,4)$

$(5,7); (7,5)$

$(6,6)$.

Il y a donc 11 nœuds. Soit P_2 cette probabilité.

$\mathrm{P}_2 = \frac{11}{1156}$.

2. $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots + (n-1) + n.$
   a. S_n est la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 .

$$S_n = n\left(\frac{1+n}{2}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

b. $S_n \leqslant 1225$

$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} \leqslant 1225$

$\Delta = 99^2$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 2450 \leqslant 0$

$n_1 = -50$ et $n_2 = 49$ donc $n \in]0; 49]$.

Il y a donc 49 entiers naturels non nuls n tels que $S_n \leqslant 1225$.

3. a. D'après 2 ., il y a 49 valeurs de k pour que $S_n = k$. Appelons P_3 la probabilité du "succès".

$P_3 = \frac{49}{1225} = \frac{1}{25}$.

b. Appelons P_4 cette probabilité.

$$P_4 = C_5^3\left(\frac{1}{25}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{25}\right)^4\left(\frac{24}{25}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{25}\right)^5$$
$$= \frac{10\times24^2+5\times24+1}{25^5}$$
$$P_4 = \frac{5881}{9765625}$$

EXERCICE 2

Posons $P(z) = (1-6i)z^2 - (17+8i)z - 33 + 30i$

1.

a. $P(-3) = (-3)^3 + (1-6i)(-3)^2 - (17+8i)(-3) - 33 + 30i$

$$= -27 + 9 + 51 - 33 + i(-54 + 24 + 30)$$
$$= 60 - 60 + i(54 - 54)$$
$$= 0$$

Donc -3 est une solution de l'équation (E). $z_0 = -3$.

b. $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$. Déterminons a, b et c par division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l}
z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)\ z - 33 + 30i & z+3 \\
z^3 + 3\ z^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
(-2-6i)z^2 - (17+8i)\ z - 33 + 30i & z^2 - (2+6i)\ z - 11 + 10i \\
(-2-6i)\ z^2 - (6+18i)\ z \qquad\quad & \\
\hline
(-11+10i)\ z - 33 + 30i & \\
(-11+10i)\ z - 33 + 30i & \\
\hline
0 \quad + \quad 0 &
\end{array}$$

Résolvons l'équation $z \in \mathbb{C}, z^2 - (2+6i)z - 11 + 10i = 0 (*)$

$\Delta = [-(2+6i)]^2 - 4(-11+10i) = 12 - 16i$

Cherchons les racines carrées de Δ. Soit δ une racine carrée de Δ.

Posons $\delta = x + \mathrm{i}y$. On a $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2xyi; |\delta^2| = x^2 + y^2$

$|12 - 16i| = \sqrt{144 + 256} = 20.$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$\delta_1 = 4 - 2i$ et $\delta_2 = -4 + 2\mathrm{i}$. Les solutions de l'équation (*) sont donc :

$$z' = \frac{2 + 6i + 4 - 2i}{2} = 3 + 2i = z_2$$

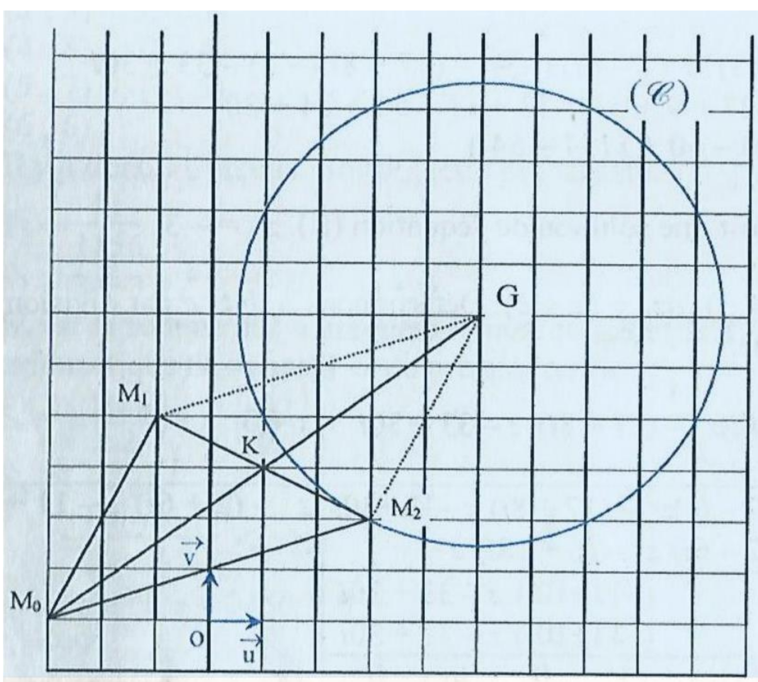
$$z'' = \frac{2 + 6i - 4 + 2i}{2} = -1 + 4i = z_1$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$\{-3; -1 + 4i; 3 + 2i\}$

2. a. $z_0 = -3; z_1 = -1 + 4i; z_2 = 3 + 2i$

$M_0\binom{-3}{0} M_1\binom{-1}{4} M_2\binom{3}{2}$



b. $\overrightarrow{M_1M_0}\binom{-2}{-4}\ \overrightarrow{M_1M_2}\binom{4}{-2}$

$M_1M_0 = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$M_1M_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -2 \times 4 + (-4)(-2) = 0.$

$M_1M_0 = M_1M_2$ et $\overrightarrow{M_1M_0} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle
et isocèle en M_1.

3. a. Soit K le milieu $[M_1M_2]$. G est le barycentre des points pondérés $(M_0,-1)$ et (K,2).

On a donc : $-\overrightarrow{M_0G} + 2\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{M_0G} + 2\overrightarrow{KM_0} + 2\overrightarrow{M_0G} = \vec{0}$
$\overrightarrow{M_0G} = 2\overrightarrow{M_0K}$

Donc K est le milieu du segment $[M_0G]$. Par conséquent G est le symétrique de M_0 par rapport à K.

Méthode de construction de G

Construire le milieu K de $[M_1M_2]$ puis le symétrique G de M_0 par rapport à K.
b. $-MM_0^2 + MM_1^2 + MM_2^2 = -GM_2^2$

$\Leftrightarrow MG^2 - GM_0^2 + GM_1^2 + GM_2^2 = -GM_2^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = GM_2^2 - GM_1^2 - 2GM_2^2$

Calculons $GM_0^2; GM_1^2$ et GM_2^2.

K est le milieu commun des segments $[M_0G]$ et $[M_1M_2]$, donc $M_0M_1GM_2$ est un parallélogramme.

- $GM_1 = M_0M_2$

$GM_1^2 = M_0M_2^2 = (3+3)^2 + (2-0)^2 = 40$

- $GM_2 = M_0M_1 = 2\sqrt{5}$

$GM_2^2 = 20$

- $GM_0 = 2M_0K.$

M_0M_1K est un triangle rectangle en M_1 et $M_1K = \frac{M_1M_2}{2} = \sqrt{5}$

$M_0K^2 = M_0M_1^2 + M_1K^2 = 20 + 5 = 25$

$GM_0^2 = 4M_0K^2 = 100$

$GM^2 = GM_0^2 - GM_1^2 - 2GM_2^2 \Leftrightarrow GM^2 = 100 - 40 - 2 \times 20$
$\Leftrightarrow GM^2 = 20$
$\Leftrightarrow GM = 2\sqrt{5}$

$GM = 2\sqrt{5} = GM_2$; donc $M_2 \in (\mathbb{C})$

$(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre G et de rayon GM_2.

Construction de ($\mathcal{C}$), (voir figure).

PROBLEME

Partie A

1. Étude de la continuité de f_n à droite en 0 .

$\mathrm{D}_{f_n} = [0; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \text{ car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0.$$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x) = f_n(0)$. Donc f_n est continue à droite en 0 .

2.

- I^{er} cas : $n = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{f_1(x)-1}{x} = \frac{x \ln x - x}{x} = \ln x - 1.$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f_1(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x - 1 = -\infty.$

f_n n'est pas dérivable à droite en 0 mais la représentation graphique de f_1 admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

- 2^e cas : $n > 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{f_n(x)-\frac{1}{n}}{x} = \frac{x^n \ln x - \frac{x^n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{x}$$

$$= x^{n-1} \ln x - \frac{x^{n-1}}{n}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f_n(x)-\frac{1}{n}}{n} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(x^{n-1} \ln x - \frac{x^{n-1}}{n}\right)$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{n-1} \ln x = 0$$

f_n est donc dérivable à droite en 0 et a pour nombre dérivé 0 .

La représentation graphique de f_n admet au point d'abscisse 0 une demitangente horizontale.

3.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n'(x) = n x^{n-1} \ln x + \frac{x^n}{x} - \frac{1}{n}(n x^{n-1}) = n x^{n-1} \ln x.$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = 1$$
$$f_n'(x) < 0 \iff 0 < x < 1$$
$$f_n'(x) > 0 \iff x > 1$$

f_n est donc strictement décroissante sur $[0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n\left(\ln x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-1}\left(\ln x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{nx} = +\infty$$

(C_n) admet donc une branche parabolique de direction (OJ).

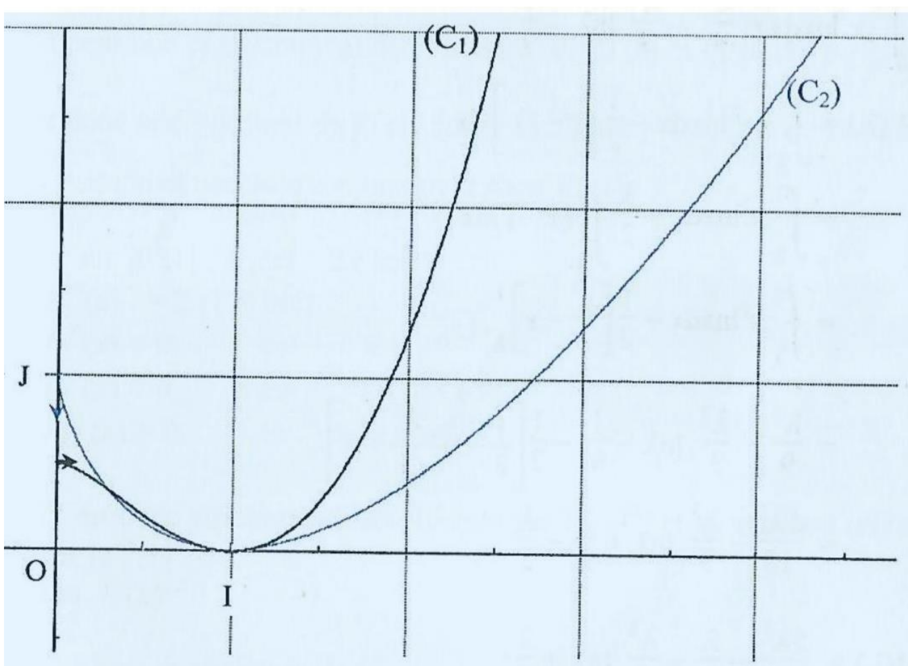
Tableau de variation de f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation de $f_n (n > 1)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construction de (C_1) et (C_2)



Partie B

1. Calculons $\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x dx$.

Posons : $\mathrm{U}(x) = \ln(x)$ et $\mathrm{V}'(x) = x^2$

On a : $\mathrm{U}'(x) = \frac{1}{x}$; choisissons $\mathrm{V}(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\lambda}^{1}$$

$$= -\frac{1}{9} - \left(\frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda - \frac{\lambda^3}{9}\right)$$

$$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda^3}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda - \frac{1}{9}.$$

2. $\mathrm{I}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \left[x^2 \ln x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}(x^2 - 1)\right] \mathrm{d}x$

$$= \int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{1} (x^2 - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\lambda}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{\lambda}^{1}$$

$$= \frac{\lambda^3}{9} - \frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - 1 - \frac{\lambda^3}{3} + \lambda\right]$$

$$= \frac{5\lambda^3}{18} - \frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda + \frac{2}{9} - \frac{\lambda}{2}$$

$$I(\lambda) = \frac{5\lambda^3}{18} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{3}\ln \lambda + \frac{2}{9}$$

3. $\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \frac{2}{9}$ car $\lim_{\lambda \to 0} \lambda^3 \ln \lambda = 0$.

L'aire en cm^2 de la portion du plan limité par la courbe (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $\frac{2}{9} \times 4 \ \mathrm{cm}^2$, c'est-à-dire $\frac{8}{9} \ \mathrm{cm}^2$.

Partie C

1. $\forall x \in]0;1[\, g(x) = f_2(x) - x$

$g'(x) = f_2'(x) - 1$. Or $\forall x \in]0;1[, f_2'(x) < 0$ donc $f_2'(x) - 1 < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $]0;1[$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_2(x) - x = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_2(x) - x = -1$$

Tableau de variation de g

x	0			1
g	‖	$-$		‖
$g(x)$	‖ $1/2$	$\searrow$	-1	‖

g est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ et $g(]0;1[) =]-1;\frac{1}{2}[$. g est donc une bijection de $]0;1[$ sur $]-1;\frac{1}{2}[.0 \in]-1;\frac{1}{2}[$; donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0;1[$.

2. a. $\forall x \in]0;1], f'(x) = 2x\ln x$

$f_2''(x) = 2(1 + \ln x)$
$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$
$f_2''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$
$f_2''(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

$f_2{}'$ est donc strictement décroissante sur $]0;e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1};1]$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2'(x) = 0$

Tableau de variation de f_2'

x	0		e^{-1}		1
$f_2''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	0

$f_2''(e^{-1}) = -2e^{-1}$
b. On sait que $f_2'(0) = 0$.

D'après le tableau de variation de $f_2', -2e^{-1}$ est le minimum absolu de $f_2{}'$ sur $[0;1]; 0$ est le maximum absolu de f_2' sur $[0;1]$.

Donc $\forall x \in [0;1], -2e^{-1} \leqslant f_2'(x) \leqslant 0$.

$0 \leqslant -f_2'(x) \leqslant \dfrac{2}{e}$

d'où $|f_2'(x)| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}$ pour tout x de $[0;1]$.

3. a. $\mathrm{U}_0 \in [0;1]$

Supposons que pour un entier naturel $n, \mathrm{U}_n \in [0;1]$ et démontrons que $\mathrm{U}_{n+1} \in [0;1]$.

On sait d'après A. 3 que $f_2([0;1]) = \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $\left[0;\frac{1}{2}\right] \subset [0;1]$

Donc si $\mathrm{U}_n \in [0;1]$, alors $f(\mathrm{U}_n) \in [0;1]$, par conséquent $\mathrm{U}_{n+1} \in [0;1]$

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_n \in [0;1]$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{U}_{n-1} - \alpha| = |f(\mathrm{U}_n) - f(\alpha)|$

$\mathrm{U}_n \in [0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$

Pour tout x compris entre U_n et α, x appartient à $[0;1]$ et on a $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$ D'après l'inégalité des accroissements finis,

$|f_2(U_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}|U_n - \alpha|$ c'est-à-dire $|U_{n-1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}|U_n - \alpha|$.

c. $|1-\alpha| \leqslant |1-\alpha|$

Supposons que pour un entier naturel $n, |\mathrm{U}_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1-\alpha|$ et démontrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} |1-\alpha|$

$$\begin{aligned}|U_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{2}{e}|U_n - \alpha| \\ &\leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} |1-\alpha|\end{aligned}$$

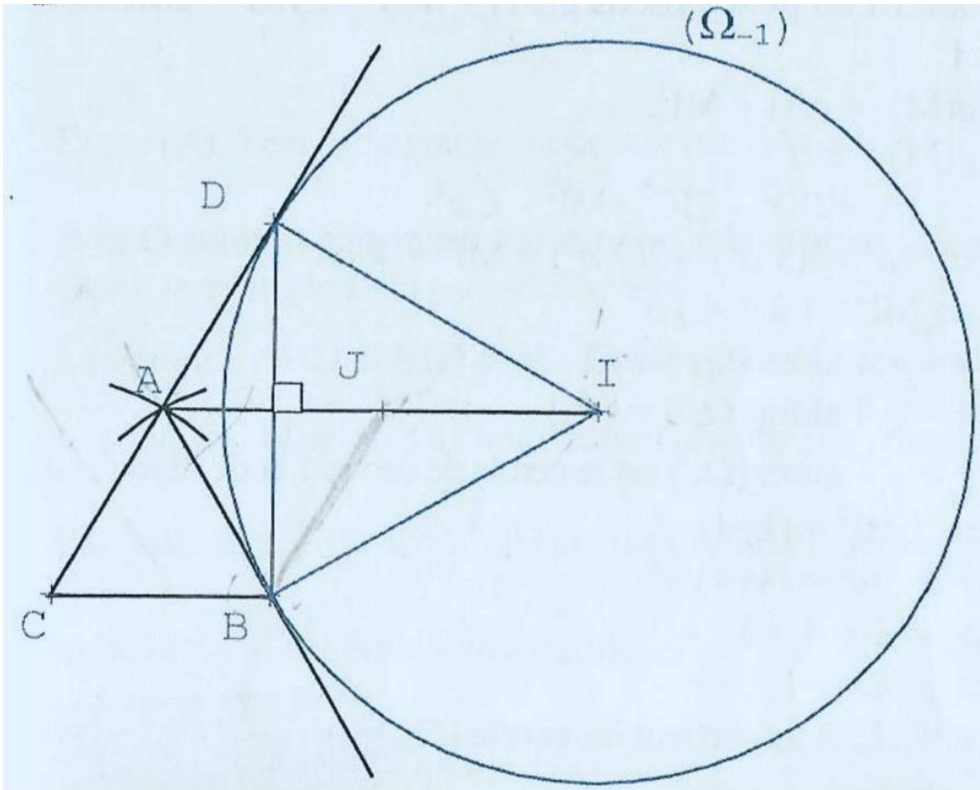
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n |1-\alpha|$

d. $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n |1-\alpha| = 0$

Par suite $\lim \mathrm{U}_n = \alpha$.

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1996 SERIE C

EXERCICE 1



1. I étant le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, -2)$, on a :

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$= 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

I est donc l'image de A par la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

- Calcul de IA^2

$\overrightarrow{\mathrm{IA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ donc $\mathrm{AI} = 2\mathrm{BC} = 2a$.

D'où $\mathrm{IA}^2 = 4a^2$

- Calcul de IB^2

En appliquant le théorème d'Al Kashi dans le triangle BAI, on a :

$\mathrm{IB}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AI}^2 - 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AI} \times \cos \widehat{\mathrm{BAI}}$

$= a^2 + 4a^2 - 2a \times 2a \times \cos\frac{\pi}{3}$ car mes $\widehat{\mathrm{BAI}} =$ mes $\widehat{\mathrm{CBA}} = \frac{\pi}{3}$ (angles alternes-internes formés de deux droites parallèles et une sécante). $\mathrm{IB}^2 = 3a^2$

- Calcul de IC $\mathrm{IC}^{\ 2}$

En appliquant le théorème d'Al Kashi dans le triangle IAC, on a :

$$\begin{aligned} IC^2 &= AC^2 + AI^2 - 2AC \times AI \times \cos \widehat{IAC} \\ &= a^2 + 4a^2 - 2a \times 2a \times \cos\frac{2\pi}{3} \\ &= 7a^2 \end{aligned}$$

3. a. Pour tout point M du plan, posons $g(M) = MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2$ $1 + 2 - 2 = 1$

$1 \neq 0$ donc $g(M) = g(I) + MI^2$.

$$\begin{aligned} & g(M) = ka^2 \\ & \Leftrightarrow IA^2 + 2II^2 - 2IC^2 + MI^2 = ka^2 \\ & \Leftrightarrow 4a^2 + 2(3a^2) - 2(7a^2) + MI^2 = ka^2 \\ & \Leftrightarrow MI^2 = (k+4)a^2 \end{aligned}$$

1^{er} cas : si $k < -4$ alors $(\Omega_k) = \emptyset$.

2^e cas : si $k = -4$ alors $(\Omega_k) = \{I\}$.

3^e cas : si $k > -4$ alors (Ω_k) est le cercle de centre I et de rayon $a\sqrt{k+4}$.
b. $B \in (\Omega_k) \Leftrightarrow BI^2 = (k+4)a^2$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 3a^2 = (k+4)a^2 \\ & \Leftrightarrow k + 4 = 3 \\ & \Leftrightarrow k = -1. \end{aligned}$$

Donc pour $k = -1$, B appartient au cercle $(\Omega_{k \cdot})$.

4. a. $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} &= AB^2 - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AB^2 - AI \times AB \times \cos\frac{\pi}{3} \\ &= a^2 - a^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc (AB) est la tangente au cercle (Ω_{-1}) en B.

b. Déterminons une mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.

- mes $\widehat{CAD}$ = mes $\widehat{CAB}$ + mes $\widehat{BAI}$ + mes $\widehat{IAD}$
- mes $\widehat{BAI}$ = mes $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ (angles alternes internes formés de deux droites parallèles et une sécante).
- mes $\widehat{IAD}$ = mes $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{3}$ (angles symétriques par rapport à (AI)).

Donc mes $\widehat{CAD} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$. Les points A, D et C sont donc

alignés. Par conséquent, D appartient à la droite (AC).
c. Soit D le symétrique de B par rapport à (A).

- $D \in (\Omega_{-1})$car $ID = IB$
- $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{AD}$

$= \text{AD}^2 - \overrightarrow{\text{AI}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}}$
$= \text{AD}^2 - \text{AI} \times \text{AD} \times \cos \widehat{\text{IAD}}$
$= a^2 - 2a \times a \times \frac{1}{2} \text{car AB} = \text{AD}$
$= 0$

Donc (AC) est la tangente au cercle (Ω_{-1}) en D.
d. B et D étant symétriques par rapport à la droite (AI), IB = ID. Donc le triangle IBD est isocèle en I.

Les angles $\widehat{\text{ABD}}$ et BID sont associés; donc 2 mes ABD = mes BID . Les angles $\widehat{\text{ABD}}$ et $\widehat{\text{BAI}}$ sont complémentaires; donc mes $\widehat{\text{ABD}} = \frac{\pi}{6}$. Par suite mes $\widehat{\text{BID}} = \frac{\pi}{3}$. BID est un triangle isocèle qui a un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$; il est donc équilatéral.

EXERCICE 2

1. a. Soit a un réel et S l'ensemble des solutions de (E).

$ia \in \text{S} \Leftrightarrow (ia)^3 + (-1+2i)(ia)^2 - (1+2i)(ia) - 3 + 4i = 0$
$\Leftrightarrow -ia^3 - a^2(-1+2i) - (1+2i)(ia) - 3 + 4i = 0$
$\Leftrightarrow (a^2 + 2a - 3) + i(-a^3 - 2a^2 - a + 4) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 0 & (\text{E}_1) \\ -a^3 - 2a^2 - a + 4 = 0 & (\text{E}_2) \end{cases}$

Les solutions de (E_1) sont -3 et 1 .

Seul 1 est solution de (E_2). Donc la solution imaginaire pure est i.
b.

- Pour tout nombre complexe z, posons $\text{P}(z) = z^3 + (-1+2i)z^2 - (1+2i)z - 3 + 4i$. Puisque i est un zéro de P, il existe deux nombres complexes b et c tels que: $\text{P}(z) = (z - i)(z^2 + bz + c)$ pour tout z.

Calculons b et c

$\forall z \in \mathbb{C}, \text{P}(z) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$

Ce qui donne après identification membre à membre

$\begin{cases} b - i = -1 + 2i \\ c - ib = -1 - 2i \\ -ic = -3 + 4i \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} b = -1 + 3i \\ c = -4 - 3i \end{cases}$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \text{P}(z) = (z - i)(z^2 + (-1+3i)z - 4 - 3i)$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (-1+3i)z - 4 - 3i = 0$

$\Delta = (-1+3i)^2 + 4(4+3i)$

$= 8 + 6i.$

Soit δ une racine carrée de Δ.

Il existe un couple (x, y) de réels tel que :

$\delta = x + yi$

$\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy; |\delta|^2 = x^2 + y^2; |\Delta| = 10$

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \\ x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

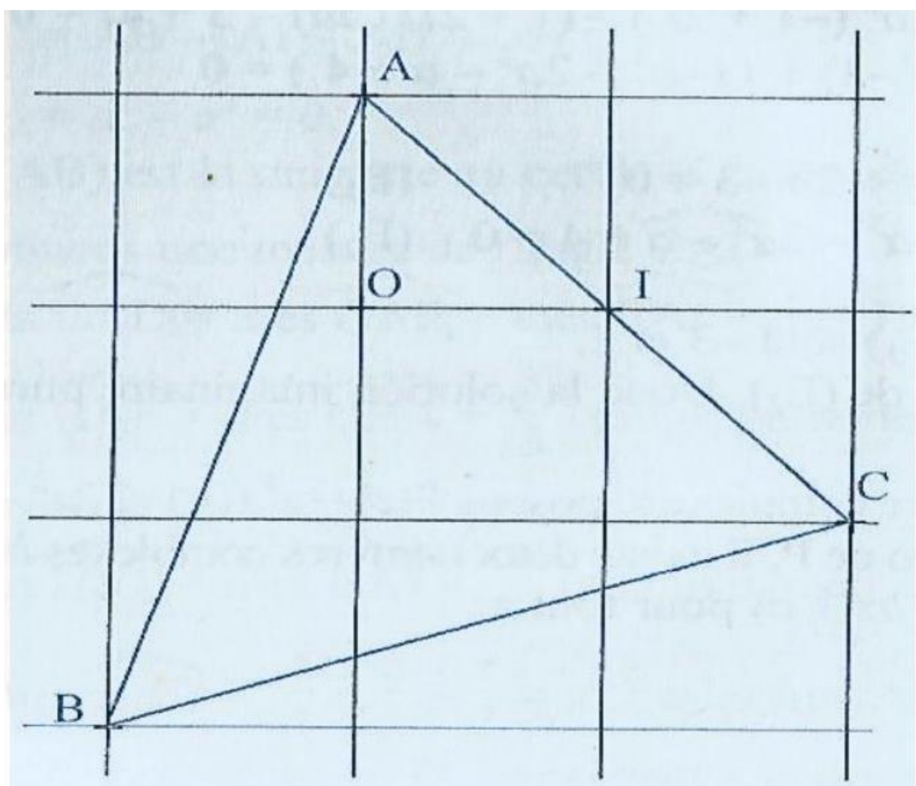
On prend $\delta = 3 + i$

Les solutions de l'équation $z^2 + (-1 + 3i)z - 4 - 3i = 0$ sont :

$\frac{1-3i+3+i}{2} = 2 - i$; $\frac{1-3i-3-i}{2} = -1 - 2i.$

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont $i, -1 - 2i$ et $2 - i$.

2. a



$\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = \sqrt{10}; \mathrm{BC} = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}| = \sqrt{10}$

On a $AB = BC$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

b. On doit avoir $1 + b + c \neq 0$

et $(1 + b + c)\overrightarrow{\mathrm{AO}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

En utilisant les affixes des vecteurs on a :

$(1 + b + c)(-i) = b(-1 - 2i - i) + (2 - i - i)c$

$= b(-1 - 3i) + (2 - 2i)c$

$= -(b - 2c) - (3b + 2c)i$

D'où $\begin{cases} b - 2c = 0 \\ 1 + b + c = 3b + 2c \\ 1 + b + c \neq 0 \end{cases}$

Par conséquent, $\begin{cases} b = \frac{2}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Autre méthode: On peut utiliser les coordonnées des vecteurs.

PROBLEME

Partie A

1. Soit M un point du plarrêt (x, y) ses coordonnées.

$M \in (\boldsymbol{h}) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 16$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$

($\boldsymbol{h}$) est donc une hyperbole équilatère.

A est le point de coordonnées $(0{,}4)$.

Tracé de ($\boldsymbol{h}$) (voir figure).

2. R est une similitude directe car sa transformation complexe est du type

$z \mapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Le rapport de R est $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right|$ qui vaut 1

R est donc un déplacement.

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ est différent de 1 , alors R est une rotation de centre O (car $b = 0$) et d'angle ARG $\left.\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right)$ qui est $-\frac{\pi}{4}$.

3. a. $S(M) = M \Leftrightarrow z = z'$

$$\Leftrightarrow x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x - iy)$$

$$\Leftrightarrow x + iy = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = -x + y \\ \sqrt{2}y = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+\sqrt{2})x \\ (-1+\sqrt{2})y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (1+\sqrt{2})x \\ y = (1+\sqrt{2})x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x$$

(D) est donc la droite d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b. Cherchons la transformation complexe associée à $\mathrm{RoS}_{(\mathrm{OJ})}$.

Soit r la transformation complexe associée à R, g la transformation complexe associée à $\mathrm{S}_{(\mathrm{O})}$, s la transformation complexe associée à S.

On a : $\forall z \in \mathbb{C}, r(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

$g(z) = -\bar{z}$

$\mathrm{rog}(z) = r[g(z)] = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(g(z)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z} = s(z)$.

$rog = s$ donc $\mathrm{RoS}_{(\mathrm{OJ})} = \mathrm{S}$.

c. L'application S est la composée de deux isométries donc elle est une isométrie. De plus S admet la droite (D) comme ensemble de points invariants. Donc S est la symétrie orthogonale d'axe (D).

4. a. $r(4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(4i) = 2\sqrt{2}(i - i^2) = 2\sqrt{2}(1+i)$

$s(4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(-4i) = 2\sqrt{2}(i - i^2) = 2\sqrt{2}(1+i)$.

$r(4i) = s(4i)$; donc $\mathrm{R(A)} = \mathrm{S(A)}$

$\mathrm{A}'(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

b. Soit M un point de coordonnées (x, y).

$$M \in (D) \cap (\boldsymbol{h}) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 16 & (\mathrm{E}_3) \\ y = (\sqrt{2}+1)x & (\mathrm{E}_4) \end{cases}$$

Avec (E_4), on a : $y^2 = (3+2\sqrt{2})x^2$ d'où en remplaçant dans (E_3) on a : $(2+2\sqrt{2})x^2 = 16$.

En conséquence, $x^2 = \frac{8}{1+\sqrt{2}}$. L'équation $x^2 = \frac{8}{1+\sqrt{2}}$ admet deux solutions distinctes ; donc (D) coupe ($\boldsymbol{h}$) en deux points E et F.

5. a. Déterminons d'abord les expressions analytiques de R et S.

On a :

$$\mathrm{M}' = \mathrm{R}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z$$
$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases} \text{(expression analytique de R).}$$

De même :

$$\mathrm{M}'' = \mathrm{S}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\overline{\mathrm{z}}$$
$$\Leftrightarrow x'' + iy'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(x-iy)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases} \text{(expression analytique de S)}$$

On a : $x'y' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2); x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

D'où : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b. $\mathrm{M} \in (\boldsymbol{h}) \Leftrightarrow\ x'y' = 8$ (équation de $\mathrm{S}(\boldsymbol{h})$.

$\mathrm{M} \in (\boldsymbol{h}) \Leftrightarrow\ x''y'' = 8$ (équation de $\mathrm{R}(\boldsymbol{h})$.

$\mathrm{S}(\boldsymbol{h})$ et $\mathrm{R}(\boldsymbol{h})$ ont la même équation $xy = 8$ ou encore $y = \frac{8}{x}$ qui est
l'équation d'une hyperbole rapporté à ses asymptotes. On en déduit que ($\boldsymbol{\kappa}$) à même image par R et S qui est t'hyperbole ($\mathfrak{H}$) d'équation $\mathrm{y} = \frac{8}{x}$.

6. a. E appartient $\mathrm{a}(\mathrm{D})$, donc $\mathrm{S}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

E appartient à ($\boldsymbol{h}$), donc $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ appartient à $\mathcal{H}$ image de (h) par S

Par conséquent E appartient à ($\mathfrak{H}$)

Il en est de même pour F.

b. Tracés de ($\mathbf{h}$), (D) et ($\mathfrak{H}$) (voir figure).

Partie B

1. a. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y)

$$M \in (\boldsymbol{h}+) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\boldsymbol{h}) \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ y \geqslant 0 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 16}$$

b. Une équation de la droite (ON) est de la forme $z = a$. Puisque N a pour coordonnées $\left(x, \sqrt{x^2 + 16}\right)$ alors $z = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} t$

On en déduit que $\mathrm{U}(x)$ vaut $\int_0^x \left[f(t) - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} t\right] \mathrm{d}t$.

D'où : $\mathrm{U}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 16}\, \mathrm{d}t - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} \int_0^x t\, \mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{t^2 + 16}\, \mathrm{d}t - \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \int_0^x \sqrt{t^2 + 16}\, \mathrm{d}t - \frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}$.

c. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on a :

$$\mathrm{U}'(x) = \sqrt{x^2 + 16} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2 + 16} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{x^2+16}}.$$

$$\mathrm{G}'(x) = 8 \times \frac{1 + \frac{1}{2}\left(x^2+16\right)^{-1/2} \times 2x}{x + \sqrt{x^2+16}} = 8\left[\frac{\sqrt{x^2+16} + x}{\sqrt{x^2+16}\left(x + \sqrt{x^2+16}\right)}\right]$$

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{8}{\sqrt{x^2+16}}$$

$U(0) = 0$ et $G(0) = 8\ln 4$

U et G ayant la même fonction dérivée, elles sont les primitives d'une même fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Il existe donc un réel c tel que : $\forall x \in [0, +\infty[, \mathrm{U}(x) = \mathrm{G}(x) + c$.

$\mathrm{U}(0) - \mathrm{G}(0) = c$

$= -8\ln 4$

D'où $U(x) = 8\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right) - \ln 4\right] = 8\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+16}}{4}\right)$.

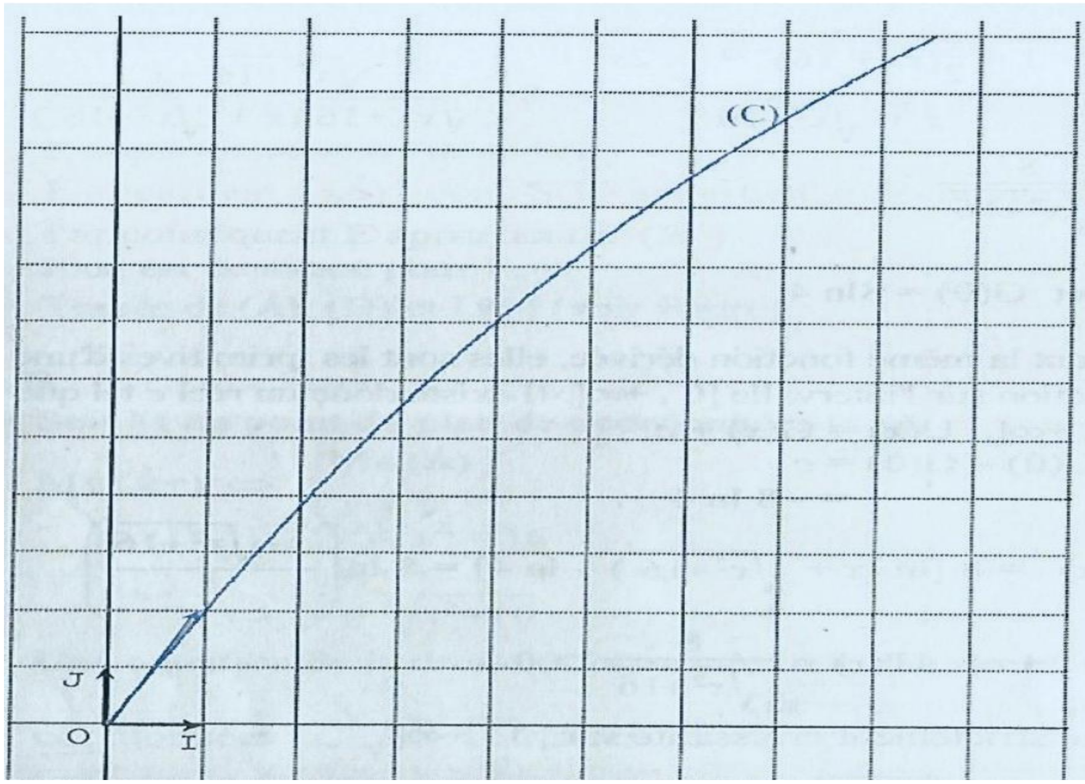
2. a. $\forall x \in \left[0; +\infty\right[, \mathrm{U}'(x) = \frac{8}{\sqrt{x^2+16}} > 0$

U est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. $\mathrm{U}'(0) = \frac{8}{\sqrt{0+16}} = 2$

(C) admet donc une demi-tangente à l'origine de coefficient directeur 2.

c. Courbe (C) (voir figure).



Partie C

1. Puisque N' appartient à $(\mathcal{H}_+)$d'après la partie $\mathrm{A}5 \cdot$ b., $\mathrm{N}_1 = \mathrm{R}^{-1}(\mathrm{~N}')$ appartient à $(\boldsymbol{h})$. Soit (x, y) les coordonnées de N_1

(x', y') les coordonnées de N'

on a : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$

Puisque N' appartient à $(\mathcal{H}_+)$alors y' 'est positif.

D'où

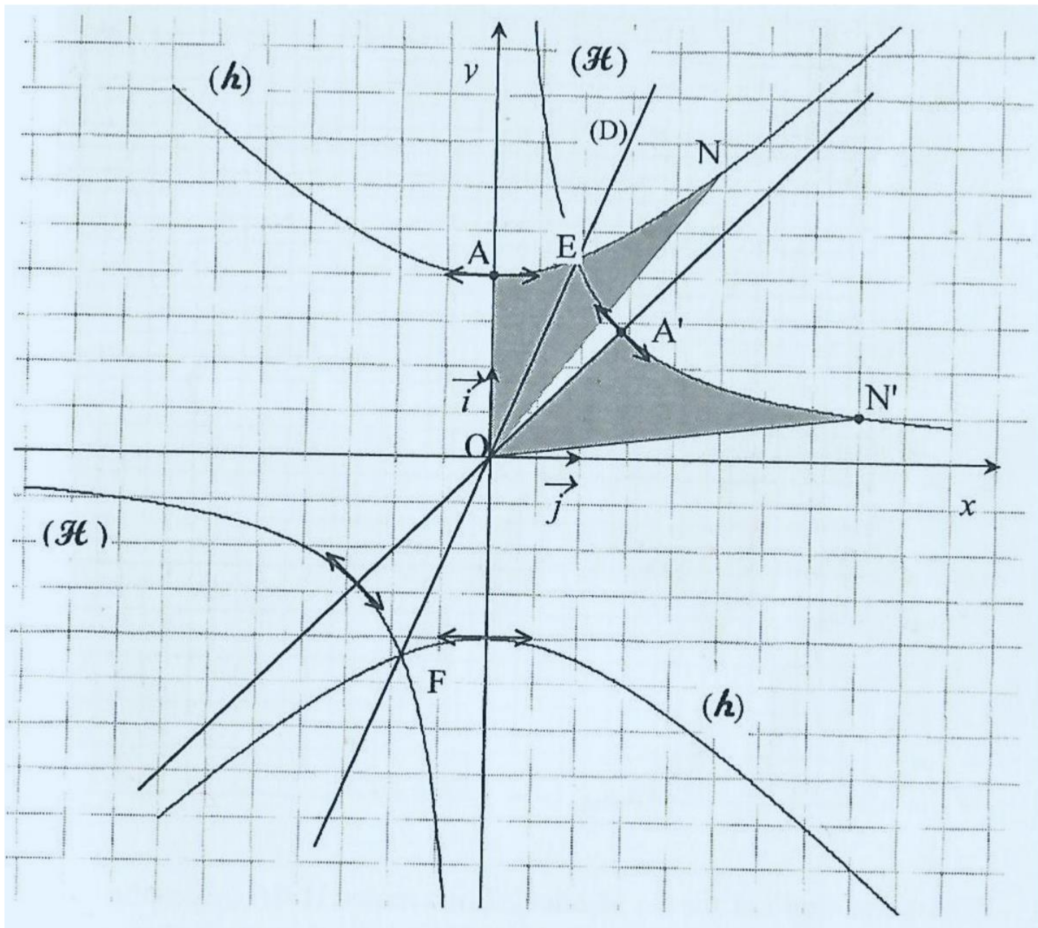
$\begin{cases} x' \geqslant 2\sqrt{2} \\ y' \geqslant 0 \end{cases}$ entraîne $y \geqslant 0$

N_I appartient donc à $(\boldsymbol{h}_+)$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - \frac{8}{x'}\right) \text{ car } \mathrm{N}' \in (\mathcal{H}) \text{ d'équation } y = \frac{x}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x'^2-8}{x'}\right) \end{aligned}$$

d'où $x \geqslant 0$ car $x' \geqslant 2\sqrt{2}$.

2. (Δ ') est l'image de (Δ) par R qui est une rotation (donc une isométrie). Or les isométries conservent les aires, donc (Δ) et (Δ') ont la même aire.



CORRECTION SESSION NORMALE 1996 SÉRIE C

EXERCICE 1

$\xrightarrow{f}$	
O	O
A	B
B	C
D	F

$\xrightarrow{R}$	
A	A
D	B
C	E

1. a. Construction des points (voir figure).

   b.

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$

$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB})$

$\operatorname{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{2\pi}{3} + \pi\ [2\pi]$ car f étant une similitude directe d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et A et B ayant pour images B et C par f, on a : $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{2\pi}{3}$.

$$\operatorname{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

Donc $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

- Une similitude de rapport 2 multiplie les distances par 2 donc $\mathrm{BC} = 2\mathrm{BA}$
- D'après le théorème d'Al Kashi, $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{BA} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \mathrm{ABC}$

$= BA^2 + BC^2 - 2BA \times 2BA\cos\frac{\pi}{3}$

$= BC^2 - BA^2$

$$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BA}^2 = \mathrm{BC}^2$$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. a. Construction des points D, E et F (voir figure).

   b.

$$R(D) = B \Leftrightarrow \begin{cases} AD = AB \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Le triangle ABD est isocèle en A et $\operatorname{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$. Donc ce triangle est équilatéral.

On a :

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$
$\equiv \frac{4\pi}{3} \; [2\pi]$
$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$

$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right) + \pi[2\pi]$ donc les points A, B ,D O sont cocycliques.

- L'image d'un cercle par une similitude directe est un cercle. Comme A,B,D et O sont cocycliques, alors leurs images B, C, F et O par f sont cocycliques.

$\mathcal{C}$ est le cercle passant par $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}$ et O.

$\mathcal{C}'$ est le cercle passant par $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{F}$ et O.

$O \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

Démontrons que $O \in \mathcal{C}''$.

$$\mathrm{R(C)} = \mathrm{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{AC} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ \text{mes}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})) = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

ACE est un triangle isocèle ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral direct. On a :

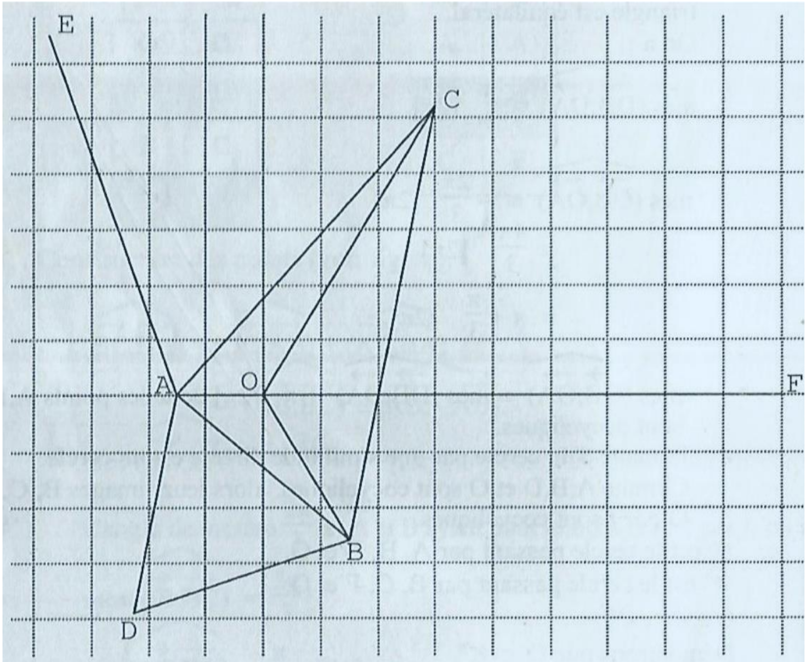
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}}) \equiv +\frac{\pi}{3} [2\pi]$

mes$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \; [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} [2\pi]$
$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}}) + \pi \; [2\pi]$

Donc A,C,E et O sont cocycliques. Par suite O appartient à $\mathcal{C}''$ Les cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ ont donc le point O en commun.



EXERCICE 2

1. a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- $u_0 > 0$.
- Supposons que pour un entier naturel $n, u_n > 0$ et démontrons que $u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{u_n+5}$

Or $u_n > 0$ donc $2u_n + 4 > 4 > 0$ et $u_n + 5 > 5 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Remarque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \Leftrightarrow u_n + 5 > 0$. Donc la suite ($(_n)$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.

b. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

- $u_0 \neq 1$
- supposons que pour un entier naturel $n, u_n \neq 1$ et démontrons que $\mathrm{U}_{n+1} \neq 1$.

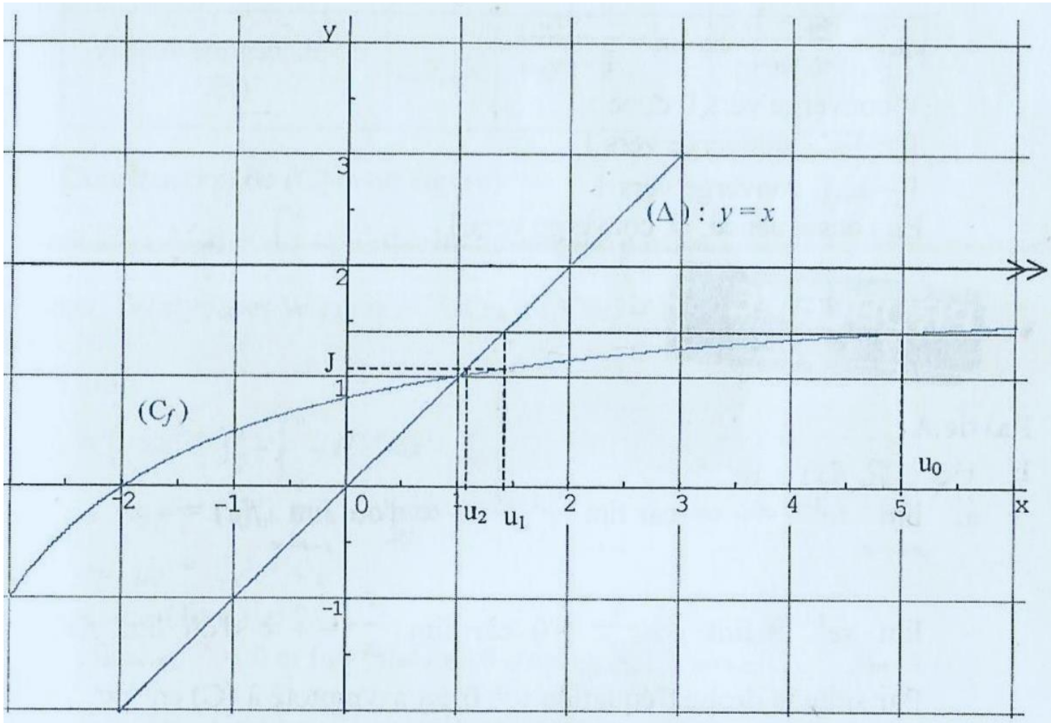
$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 4 - u_n - 5}{u_n + 5} = \frac{u_n - 1}{u_n + 5}$$

$u_n - 1 \neq 0$ donc $u_{n+1} - 1 \neq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

2. Détermination graphique de u_0, u_1 et u_2 (voir figure).

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f: x \mapsto \frac{2x+4}{x+5}$.



On peut conjecturer que :

- U est décroissante,
- U converge vers 1 .

3. a. $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$

$v_1 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 4} = \frac{4}{9}$

$v_{n+2} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} - 1}{\frac{2u_n + 4}{u_n + 5} + 4}$

$v_{n+2} = \frac{u_n - 1}{6(u_n + 4)} = \frac{1}{6} v_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{6} v_{n+1}$

V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme V_1 égal à $\frac{4}{9}$.

b. $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$ donc V est convergente et $\lim \mathrm{V} = 0$.

c. $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 4v_{n+1}}{1 - v_{n+1}}$

V converge vers 0 donc :

$1 + 4v_{n+1}$ converge vers 1 .

$1 - v_{n+1}$ converge vers 1

En conséquence, U converge vers 1.

PROBLĖME

Partie A

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{1-x}$

   a. $\lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e \times \frac{x}{e^x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Par suite la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Le tableau de variation de f est :

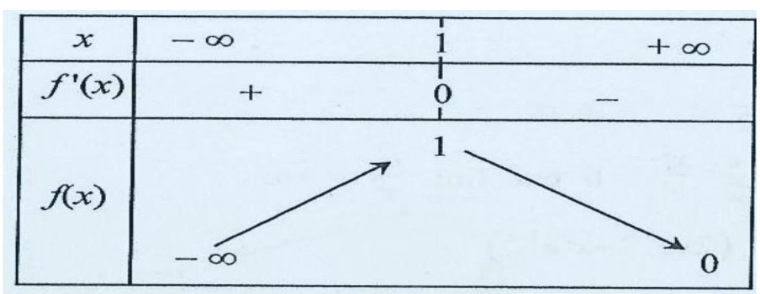


Tableau de valeurs

x	$-0{,}5$	0	2	3	4
Valeur approchée de $f(x)$	$-2{,}24$	0	0,74	0,39	0,2

c. Construction de (C) (voir figure).

2. $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{A}(u) = \int_0^u xe^{1-x}\,\mathrm{d}x$. Intégrons par parties.

Posons $\mathrm{V}(x) = x$ et $\mathrm{W}'(x) = e^{1-x}$. On a : $\mathrm{V}'(x) = 1$; choisissons $\mathrm{W}(x) = -e^{1-x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(u) &= [-xe^{1-x}]_0^u - \int_0^u -e^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -ue^{1-u} + 0 + [-e^{1-x}]_0^u \\
&= -ue^{1-u} - e^{1-u} + \mathrm{e} \\
&= e - (1+u)e^{1-u}
\end{aligned}$$

3. On a : $\lim_{u\to+\infty} e^{1-u} = 0$ et $\lim_{u\to+\infty} ue^{1-u} = 0$ d'après A.1.

   Donc $\lim\limits_{u\to+\infty} [e-(1+u)e^{1-u}] = e$, c'est-à-dire $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{A}(u) = e$

Partie B

1. a. $f_2(x) = \frac{x^2}{2}e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2}e^{1-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{2}\cdot\frac{x^2}{e^x} = 0$car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}(2xe^{1-x} - x^2e^{1-x})$

$= \frac{1}{2}(2-x)xe^{1-x}$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = 0)$

$f_2'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
$f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; 2[.$

f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $[2; +\infty[$ et strictement croissante sur $[0; 2]$.

Tableau de variation de f_2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

c. Construction de (C_2) (voir figure).

2. a. $f_3(x) = \frac{x^3}{6}e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{6}e^{1-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{6}\cdot\frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = \frac{1}{6}[3x^2\mathrm{e}^{1-x} + x^3(-e^{1-x})]$

$= \frac{1}{6}x^2(3-x)e^{1-x}$

$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 3$ ou $x = 0)$

$f_3'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 3$

$f_3'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$

f_3 est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty; 3]$.

Tableau de variation de f_3

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2e^2}$	$\searrow$	0

c. Construction de (C_3) (voir figure).

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{n!}[nx^{n-1}e^{1-x} + x^n(-e^{1-x})]$

$= \frac{x^{n-1}}{n!}(n-x)e^{1-x}$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $x = n)$.

1^{er} cas : n est pair $(n \in \mathbb{N}^*)$

- Si n est pair alors $n-1$ est impair et x^{n-1} a le même signe que x.

d'où $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]n; +\infty[$

$$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; n[.$$

- $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{n!}e^{1-x} = +\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{n!} \cdot \frac{x^n}{e^x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f_n(n)$	↘	0

$f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{1-n}$.

2^{e} **cas : n est impair.**

- Si n est impair alors $n-1$ est pair et x^{n-1} est supérieur ou égal à 0 . d'où $f_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]; +\infty[$

$$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; n[.$$

- $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{n!}!^{1-x} = -\infty.$
- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{n!} \cdot \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0.$

Tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f_n(n)$	↘	0

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{n}{n!}\ ^{n-1}e^{1-x} - \frac{1}{n!}!^n\,\mathrm{e}^{1-x}$

$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-x} - \frac{x^n}{n!}e^{1-x}$
$= f_{n-1}(x) - f_n(x)$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n' = f_{n-1} - f_n$

Partie C

1. $\mathrm{J}_n(x) - \mathrm{J}_{n-1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t. - \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$

$= \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t))dt$

$= \int_0^x \ -f_n'(t)dt$ d'après B. B.b 2
$= [-f_n(t)]_0^x$.

Donc $J_n(x) - J_{n-1}(x) = -f_n(x)$

- D'après ce qui précède, on a :

$J_2(x) - J_1(x) = -f_2(x)$

$J_3(x) - J_2(x) = -f_3(x)$
$J_{n-1}(x) - J_{n-2}(x) = -f_{n-1}(x)$

$J_n(x) - J_{n-1}(x) = -f_n(x)$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient après simplification :

$J_n(x) - J_1(x) = -\sum_{k=2}^{n} \ f_k(x)$

- $J_1(x) = \int_0^x te^{1-1}dt = \mathrm{A}(x)$

$= e - (1+x)e^{1-x}$

$J_n(x) = e - (1+x)\mathrm{e}^{1-x} - \sum_{k=2}^{n} \ f_k(x)$
$\quad = e - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{1-x}$

$= e - \left(\sum_{k=0}^{n} \ \frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{1-x}$

Donc $J_n(x) = e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ donc $\forall x \in [0;1]$,

$f_n(0) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1)$

$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1)$.
b. $0 \leqslant \int_0^x f_n(t)dt \leqslant \int_0^x f_n(1)dt$

$0 \leqslant J_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{1}{n!}dt$

$0 \leqslant J_n(x) \leqslant \left[\frac{1}{n!}t\right]_0^x$

$0 \leqslant J_n(x) \leqslant \frac{x}{n!}$.

Or $\forall x \in [0;1]; 0 \leqslant \frac{x}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$ donc $0 \leqslant J_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geqslant n > 0$ d'où $0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$.

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$, par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n(x) = 0$.

d. $\lim_{n\to+\infty} J_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}\right) = \frac{e}{e^{1-x}}) = \mathrm{e}^{1-1+x} = e^x$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$

Partie D

$\forall x \in \mathbb{R}, J_n'(x) = f_n(x)$

1. Supposons n est pair.

Comme n est pair, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geqslant 0$ d'après B.3.
Donc J_n est strictement

$\lim\limits_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e - e^{l-x} \times \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = -\infty$
car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^n}{n!} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} J_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e}{k!}\times\frac{x^k}{e^x}\right) = e\text{car} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k} = +\infty\right.$

Tableau de variation de J_n.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$J_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e

J_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $J_n(\mathbb{R}) =]-\infty; \mathrm{e}[$. J_n est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty; e[$. $e \notin]-\infty; \mathrm{e}[$ donc l'équation $J_n(x) = e$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ pour n pair.

- Supposons n impair.

D'après B.3., on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_n(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$
$f_n(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$

J_n est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- $\lim_{x\to-\infty} J_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e - e^{1-x} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = +\infty$

car $\lim_{x\to-\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{n!} = -\infty$ puisque n est impair.

$\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = e.$

Tableau de variation de J_n

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$J_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$J_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e

- J_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et $J_n(]-\infty;0]) = [0;+\infty[$.

D'où J_n réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur $[0;+\infty[$. $e \in [0;+\infty[$ donc l'équation $J_n(x) = e$ admet une unique solution dans $]-\infty;0]$.

- J_n est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $J_n([0;+\infty[) = [0;e[$.

J_n réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;e[$.

$e \notin [0;e[$, donc l'équation $J_n(x) = e$ n'a pas de solution dans $[0;+\infty[$

Conclusion

Pour n impair, l'équation $J_n(x) = e$ admet une unique solution négative dans $\mathbb{R}$.

3. $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$

$\Leftrightarrow e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(e - e^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\right) = e$

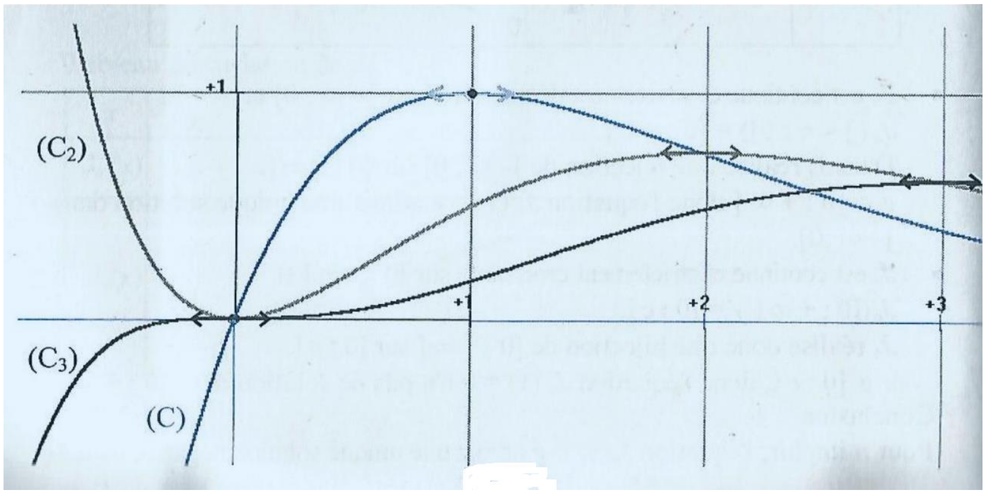
$\Leftrightarrow J_n(x) = e.$

D'après la question D.1.,

Si n est pair, alors l'équation $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

D'après D.2., si n est impair, alors l'équation $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0$ admet une

solution négative dans $\mathbb{R}$.



SESSION DE REMPLACEMENT 1995 SÉRIE E

EXERCICE 1

1. Déterminons l'ensemble E_1 des nombres complexes a pour lesquels f est une translation.

f est une translation si, et seulement si, $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}; c'$ 'est-à-dire $a^3 = 1$. a est une racine cubique de 1 donc $a \in \{1; j; \bar{j}\}$ où $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ainsi, $\mathrm{E}_1 = \left\{1; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Caractérisons f pour chacune des valeurs trouvés.

- si $a = 1$ alors $z' = z$. Donc f est la translation de vecteur nul c'est-à-dire l'application identique.
- si $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, alors $z' = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = z - \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- si $a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ alors $z' = z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}\left(\frac{-3}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Déterminons l'ensemble E_2 des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie. fest une homothétie si, et seulement si, $z' = z$ ou $z' = kz + b$ où $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

1^{er} cas :

$z' = z \Leftrightarrow a^3 = 1$ et $a - 1 = 0$
$\Leftrightarrow a = 1.$
$\mathrm{S}_1 = \{1\}$

2^{e} cas :

$k \in \mathbb{R}^* - \{1\} \Leftrightarrow a^3 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Posons $a = x + iy; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$a^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ (1)

$a^3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (y = 0$ ou $y = \sqrt{3}x$ ou $y = -\sqrt{3}x)$

- Si $y = 0$ alors $a = x$

$a^3 = x^3$

$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
$S_2 = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Si $y = \sqrt{3}x$ alors $a = x + \sqrt{3}xi$

Dans (1), $a^3 = -8x^3 = -(2x)^3$

$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$
$S_3 = \{x + \sqrt{3}xi, x \in \mathbb{R}^*\}\{\bar{j}\}$

- Si $y = -\sqrt{3}x$ alors $a = x - \sqrt{3}xi$

Dans (1), $a^3 = -8x^3 = -(2x)^3$

$a^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$a^3 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = j$

$S_4 = \{x - \sqrt{3}xi, x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{j\}$

$E_2 = \{1\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}) \cup (\{x(1 + \sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}*\} \setminus \{\bar{j}\})$

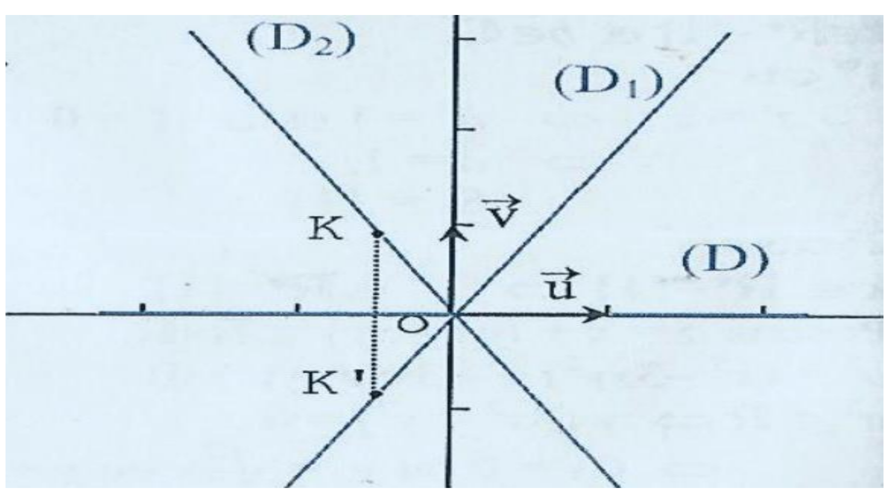
$\cup \left(\{x(1 - \sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\} \setminus \{j\}\right)$.

$E_2 = \left(\mathbb{R}^* \cup \{x(1 + \sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{x(1 - \sqrt{3}i), x \in \mathbb{R}^*\}\right) \setminus \{j; \bar{j}\}$.

E_2 est représenté graphiquement par la réunion des droites :

(D) : $y = 0$; (D_1): $y = \sqrt{3}x$; (D_2): $y = -\sqrt{3}x$ privée des points $O(0; 0)$

$K\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $K'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



3. Pour $a = 1 + i$

$z' = (1 + i)^3 z + i$

$z' = (-2 + 2i)\mathrm{z} + i. z'$ est de la forme $az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Donc f est une similitude directe.

- $|-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $-2 + 2i$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d'où $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Soit Ω le centre de f.

$$z_\Omega = -\frac{i}{1 - (-2 + 2i)} = \frac{i}{3 - 2i}$$

$z_\Omega = -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$.

fest donc la similitude directe de rapport $2\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre

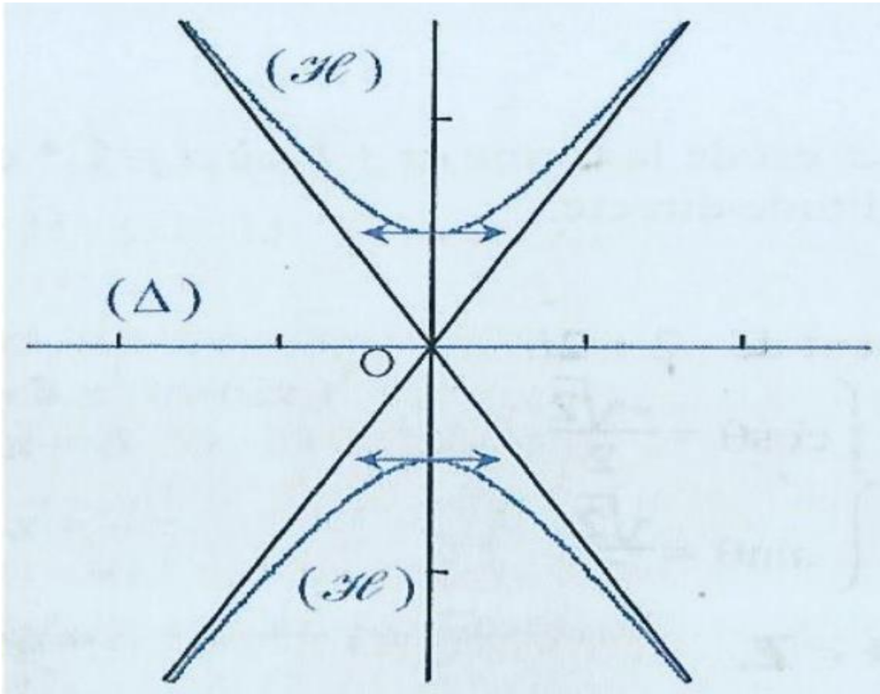
$\Omega\left(-\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$.

4. a. Soit z_0' l'affixe de M_0'.

$z_0' = a^3 + a - 1$ et $z_0' \in \mathbb{R}$.
$z_0' = (x + iy)^3 + x + iy - 1$
$z_0^1 = (x^3 - 3xy^2 + x - 1) + i(-y^3 + 3x^2y + y)$.
$z_0' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -y^3 + 3x^2y + y = 0$
$\Leftrightarrow y(-y^2 + 3x^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $3x^2 - y^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $y^2 - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

(Γ) est donc la réunion de la droite (Δ) d'équation $y = 0$ et de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $y^2 - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$.

b. Les sommets de $(\mathcal{H})$ sont $\mathrm{B}\binom{0}{1}$; $\mathrm{B}'\binom{0}{-1}$; $\mathrm{A}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix}$; $\mathrm{A}'\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix}$



EXERCICE 2

1. a. $4\overrightarrow{\mathrm{AG}_1} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$4\overrightarrow{\mathrm{AG}_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2} = \overrightarrow{\mathrm{AG}_2} - \overrightarrow{\mathrm{AG}_1}$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

$= \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

b. Les points A, B et C sont non alignés. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont

non colinéaires ; par conséquent $-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.
Par suite $G_1 \neq G_2$.

2. a. $\overrightarrow{\mathrm{MM}_1} = 4\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$

$\overrightarrow{\mathrm{MG}_1} + \vec{\mathrm{G}}_1\mathrm{M}_1 = 4\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$

$\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{M}_1} = -3\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{M}}$

$\mathrm{M_1}$ est l'image de M par l'homothétie de centre $\mathrm{G_1}$et de rapport -3. Lorsque M décrit une droite (D), $\mathrm{M_1}$ décrit l'image (Δ) et (D) par cette homothétie.

b. $\overrightarrow{\mathrm{MM_2}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MG_2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} = \overrightarrow{\mathrm{M_1M}} + \overrightarrow{\mathrm{MM_2}} = 4\overrightarrow{\mathrm{G_1M}} + 4\overrightarrow{\mathrm{MG_2}} = 4\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}$

Le vecteur $4\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}$ ne dépend pas de M; donc $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ est constant.

3. $\overrightarrow{\mathrm{MM_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MM_2}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\overrightarrow{\mathrm{MG_1}}\right) \cdot \left(4\overrightarrow{\mathrm{MG_2}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IG_1}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} - \overrightarrow{\mathrm{IG_1}}\right) = 0$ (I étant le milieu du segment $[\mathrm{G_1G_2}]$)

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2 = \mathrm{IG}_1^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{IM} = \mathrm{IG_1}$

S est la sphère de centre I et de rayon $\mathrm{IG_1}$.

PROBLĖME

Partie A

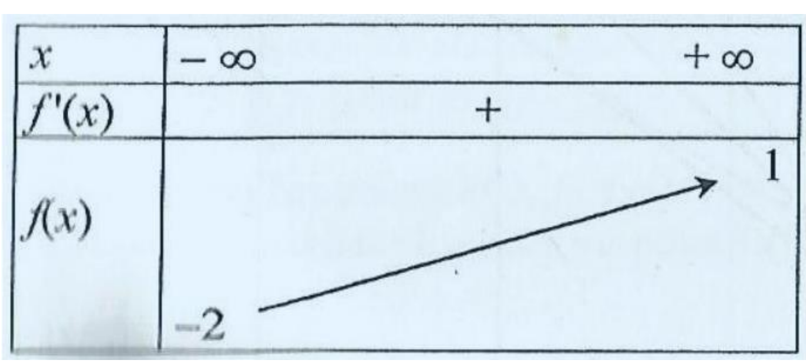
1. a.

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1} = -2$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\frac{e^x-2}{e^x+1} = \frac{1-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f.



x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	1

2. $f(0) = -\frac{1}{2}$.

A $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C) si, et seulement si, la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ est impaire.

$\mathrm{D}_g = \mathrm{D}_f = \mathbb{R} \cdot \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

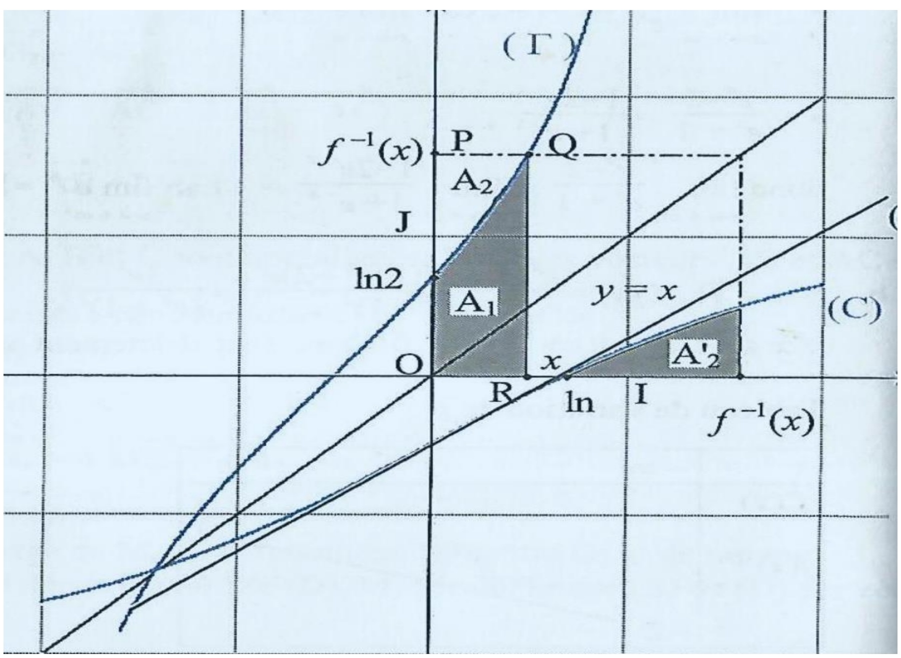
$g(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1} + \frac{1}{2} = \frac{3(e^x-1)}{2(e^x+1)}$.

$$g(-x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-e^x}{1+e^x} = -g(x)$$

donc g est impaire. Par suite $\mathrm{A}(0; -1/2)$ est un centre de symétrie de (C).

- $x = 0, y = -\frac{1}{2} \cdot f'(0) = \frac{3}{4}$. Le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) en A est $\frac{3}{4}$.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point $\mathrm{B}\binom{0}{\ln 2}$ est $\frac{2}{3}$
- Tracé de (C)



4. a. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur]-2; 1[(d'après le tableau de variation). Par suite f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $]-2; 1[$.
b. $\forall y \in]-2; 1[, \exists! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x-2}{e^x+1} &\Leftrightarrow y(e^x+1) = e^x - 2 \\ &\Leftrightarrow e^x(1-y) = 2 + y \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{2+y}{1-y}. \end{aligned}$$

$\forall y \in]-2; 1\left[, \frac{2+y}{1-y} > 0\right.$ d'où $x = \ln\left(\frac{2+y}{1-y}\right)$.

Ainsi, $f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{1-x}$.

c. (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Construction de (Γ) : voir figure

5. a. Déterminons a et b tels que $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1}$.

On a : $f(x) = \frac{ae^x+a+be^x}{e^x+1} = \frac{e^x(a+b)+a}{e^x+1}$

$$\frac{e^x-2}{e^x+1} = \frac{e^x(a+b)+a}{e^x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $f(x) = -2 + \frac{3e^x}{e^x+1}$.

b. $I(\lambda) = \int_{\ln 2}^{\lambda} f(t)dt = \int_{\ln 2}^{\lambda}\left(-2 + \frac{3e^t}{e^t+1}\right)dt = [-2t + 3\ln(e^t+1)]_{\ln 2}^{\lambda}$

$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^{\lambda}+1) + 2\ln 2 - 3\ln 3$

$I(\lambda) = -2\lambda + 3\ln(e^{\lambda}+1) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$

6. a. $x \in [0;1[$. Démontrons à l'aide de considération géométrique que :

$I(f^{-1}(x)) + \int_0^x f^{-1}(t)dt = xf^{-1}(x)$.

Considérons les points $P(0, f^{-1}(x)), Q(x, f^{-1}(x))$ et $R(x, 0)$.

(C) coupe l'axe des abscisses au point $B(\ln 2; 0)$.

L'aire du rectangle OPQR est $xf^{-1}(x)$.

Soit A_1 la région du plan comprise entre (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = x$.
Comme (Γ) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0; x]$, alors l'aire de A_1 est $\int_0^x f^{-1}(t)dt$.

Soit A_2 la partie du plan comprise entre (Γ), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = \ln 2$ et $y = f^{-1}(x)$.

Comme (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, alors A_2 a la même aire que la région A_2' du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = \ln 2$ et $t = f^{-1}(x)$, car les symétries orthogonales conservent les aires.

L'aire de A_2' vaut $\int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)dt$, car (C) est au-dessus de l'axe des absciisses sur $[\ln 2; +\infty[$.

Donc l'aire de A_2 est $\int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)dt$.

Or, aire $(OPQR) = \text{aire}(A_1) + \text{aire}(A_2)$.

On déduit donc de (1), (2) et (3) que :

$xf^{-1}(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt + \int_{\ln 2}^{f^{-1}(x)} f(t)dt$.

$xf^{-1}(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt + I(f^{-1}(x))(4)$ d'après A.5.b.

b. Calculons $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ où $x \in [0;1[$.

De la relation (4), on a : $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf^{-1}(x) - \mathrm{I}(f^{-1}(x))$;

soit $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf^{-1}(x) + 2f^{-1}(x) - 3\ln\left(\mathrm{e}^{f^{-1}(x)} + 1\right) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$ (d'après A.5.b.)

Donc $\int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t = (x+2)\ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right) - 3\ln\left(\frac{3}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{4}{27}\right)$ (d'après A.4.).

PARTIE B

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{3e^x(e^x+1)(1-e^x)}{(e^x+r)^4}$$

Le signe de $f''(x)$ dépen&-de $1-e^x$.

$1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

et $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$\forall x \in]-\infty;0[, f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

$\forall x \in]0;+\infty[f''(x) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Tableau de variation de f'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	

f' admet un maximum qui est $\frac{3}{4}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$. De plus $\frac{3e^x}{(e^x+1)^2} > 0$. Par suite $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

2. a. $\varphi(x) = f(x) - x$.

- $x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) - 1$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$:

$-1 < f'(x) - 1 < -\frac{1}{4} < 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0$. Par suite φ est

strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} x = -\infty$

$\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

φ est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
b. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α. Par conséquent l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. $\varphi(-1{,}5) \simeq 0{,}04$

$\varphi(-1{,}4) \simeq -6{,}5 \cdot 10^{-3}$.

$\varphi(-1{,}5) \times \varphi(-1{,}4) < 0$ donc $\alpha \in]-1{,}5; -1{,}4[$.

3. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$
$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$

b. - $|U_1 - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_0 - \alpha|$

$$|U_2 - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_1 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|U_{n-1} - \alpha|$$

en faisant le produit membre à membre on obtient :

$|U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$. Par suite $\lim(U_n - \alpha) = 0$, d'où $\lim U_n = \alpha$.

Donc la suite (U_n) converge vers α.
c. $U_0 = -1$.

- $U_0 - \alpha = -1 - \alpha$ or $-1{,}5 < \alpha < -1{,}4$.

donc $1{,}4 < -\alpha < 1{,}5$

$0{,}4 < -1 - \alpha < 0{,}5$
$|U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$

Par conséquent $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

- $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) + n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -3\ln 10$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -3\ln 10 + \ln 2$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-3\ln 10+\ln 2}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ car $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2}{1000}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$.

$\Leftrightarrow n \geqslant 22$. A partir de $n = 22$, on est sur d'avoir $|U_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

CORRECTION SESSION NORMALE 1995 SÉRIE C

EXERCICE 1

1. a. $1+x+x^2$ a un discriminant strictement négatif, alors pour tout réel x, $1+x+x^2 \neq 0$

La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur

l'intervalle $[0;1]$. Par conséquent U_n est bien défini pour tout entier naturel non nul n.

b. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1+x+x^2>0$.

Par conséquent : $\forall x \in [0;1], \frac{x^n}{1+x+x^2} \geqslant 0$.

Par suite $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_n \geqslant 0$.

2. a. $\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{U}_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\forall x \in [0;1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leqslant 0$, donc $\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{U}_n \leqslant 0$.

Par conséquent $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

b. La suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 , elle est donc convergente.

a. $\mathrm{V}_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{V}_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

$(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite qui converge vers 0.

b. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1+x+x^2 \geqslant 1$,

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+x+x^2} \leqslant 1$,

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x+x^2} \leqslant x^n, n \in \mathbb{N}^*$,

$\Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{V}_n$.

Comme $\lim \mathrm{V}_n = 0$, alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim \mathrm{U}_n = 0$.

EXERCICE 2

1. Comme une symétrie centrale est une rotation d'angle π alors F est la composée de 3 rotations.

La somme des angles est égale à $\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$; d'où F est une symétrie centrale.

Pour caractériser F, il suffit de trouver son centre, que l'on peut noter Ω.

Soit $C = R^{-1}(B)$. On a $R(C) = B$; donc OCB est un triangle isocèle rectangle en O de sens direct.

$F(C) = R' \circ S \circ R(C) = R' \circ S(B) = R'(B)$.

Notons $E = R'(B)$. Le triangle ABE est isocèle rectangle en A de sens indirect.

D'après les coordonnées de A et de B, OAB est un triangle isocèle rectangle en A de sens direct; d'où E est le symétrique de O par rapport à A. Le milieu de $[EC]$ est donc Ω.

2. Déterminons les coordonnées des points E, C et Ω. Utilisons les affixes de ces points.

$\mathrm{R(C)} = \mathrm{B} \Rightarrow z_{\mathrm{B}} = iz_{\mathrm{C}} \Rightarrow z_{\mathrm{C}} = -iz_{\mathrm{B}} = -i(a + ai) = a - ai;$

d'où C a pour coordonnées $(a, -a)$.

$\mathrm{R'(B)} = \mathrm{E} \Rightarrow z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}} = -i(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) \Rightarrow z_{\mathrm{E}} = -i(z_{\mathrm{B}} + iz_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{A}}).$

$z_{\mathrm{E}} = 2a$. D'où E a pour coordonnées $(2a; 0)$

Ω est le milieu de [C E] d'où $z_{\Omega} = \left(\frac{z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{C}}}{2}\right)$

Ω a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}a, \frac{-a}{2}\right)$.

(D) est la droite d'équation $y = -x + a$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ a pour coordonnées $(a; a)$ et le vecteur $\vec{\mathrm{u}}$ de coordonnées $(1, -1)$ est un vecteur directeur de (D).

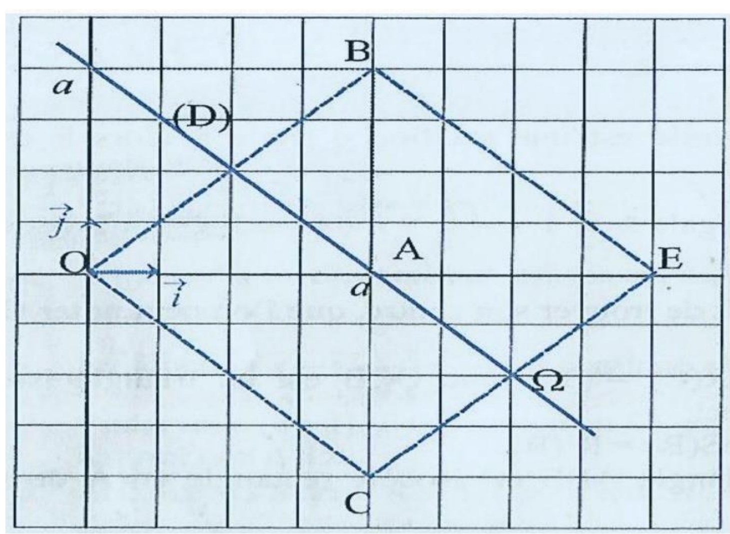
$\overrightarrow{\mathrm{CE}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0$; d'où les droites (CE) et (D) sont perpendiculaires.

En remplaçant les coordonnées de Ω dans l'équation de la droite (D) on obtient que Ω appartient à (D).

(CE) et (D) sont deux droites perpendiculaires en Ω. Alors on peut écrire :

$\mathrm{S}_{\Omega} = \mathrm{S}_{(\mathrm{D})})\mathrm{S}_{(\mathrm{CE});}$ d'où $\mathrm{S}_{(\mathrm{D})} \circ \mathrm{FF} = \mathrm{S}_{(\mathrm{D})}0\ \mathrm{S}_{\Omega} = \mathrm{S}_{(\mathrm{D})}\mathrm{OS}_{(\mathrm{D})}0\ \mathrm{S}_{(\mathrm{CE})} = \mathrm{S}_{(\mathrm{CE})}$.

$\mathrm{S}_{(\mathrm{D})}\mathrm{OF}$ est la symétrie orthogonale d'axe (CE).



PROBLÈME

PARTIE A

1. $\forall x \in]-\infty; 0[,\ g(x) = x^2 + 1 - \ln(-x)$.

$\forall x \in]0; +\infty[,\ g(x) = -x^2 + 1 - \ln(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $x > 0, g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{(2x^2+1)}{x}$

$g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x < 0, g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x} = \frac{2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x}$. $\left.\begin{array}{l} x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ x < 0 \end{array}\right\}$ $g'(x)$ est du signe de $x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[, g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$

Si $x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0[, g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0[$.

D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$g(x)$		↘	$\frac{3+\ln 2}{2}$	↗	‖	↘	

2. a. Sur $]-\infty; 0[, g$ admet un minimum strictement positif qui vaut $\frac{3+\ln 2}{2}$.

Donc si $x < 0, g(x) > 0$.

b. $g(1) = 0$; comme g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ alors :

si $0 < x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ donc $g(x) > 0$,

si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.

Voici le signe de g résumé dans un tableau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

Partie B

a. Pour tout $x \in]-\infty; 0\Big[, f(x) = x + \frac{\ln(-x)}{x}$.

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et on a $f'(x) = \frac{1-\ln(-x)}{x^2} + 1 = \frac{x^2+1-\ln(-x)}{x^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty\Big[, f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f'(x) = -1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-x^2+1-\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On peut donc écrire :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[,\ f'(x) > 0$:

f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$.

$\forall x \in]1, +\infty[,\ f'(x) < 0; f$ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
b. Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{\ln(-x)}{-x}\right) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(-x + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty \\ \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = -\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(x + \frac{\ln(-x)}{x}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \ln(-x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty \\ \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty. \end{cases}$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

2. Sur $]0; +\infty[, f$ admet un maximum négatif, alors $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) < 0$.

3. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;

d'où la droite (Δ') d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0$;

d'où la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique en $-\infty$.

4. a. $\forall x \in]0; +\infty[$,

$f(x) = -x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

Donc (C_f) et (Δ') se coupent au point de coordonnées $(1, -1)$.
b. $\forall x \in]0; +\infty\left[, f(x) - (-x) = \frac{\ln(x)}{x}\right.$

$\frac{\ln x}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1. \forall x \in \left]0; 1\right[, f(x) - (-x) < 0$; donc (Cf) est en dessous $\mathrm{de}(\Delta')$.

$\frac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1. \forall x \in \left]1; +\infty\right[, f(x) - (-x) > 0$; donc (C C_f) est au-dessus de (Δ').

5. a. $\forall x \in]-\infty; 0\left[\frac{\ln(-x)}{x} = 0\right. \Leftrightarrow -x = 1$

$\Leftrightarrow x = -1$

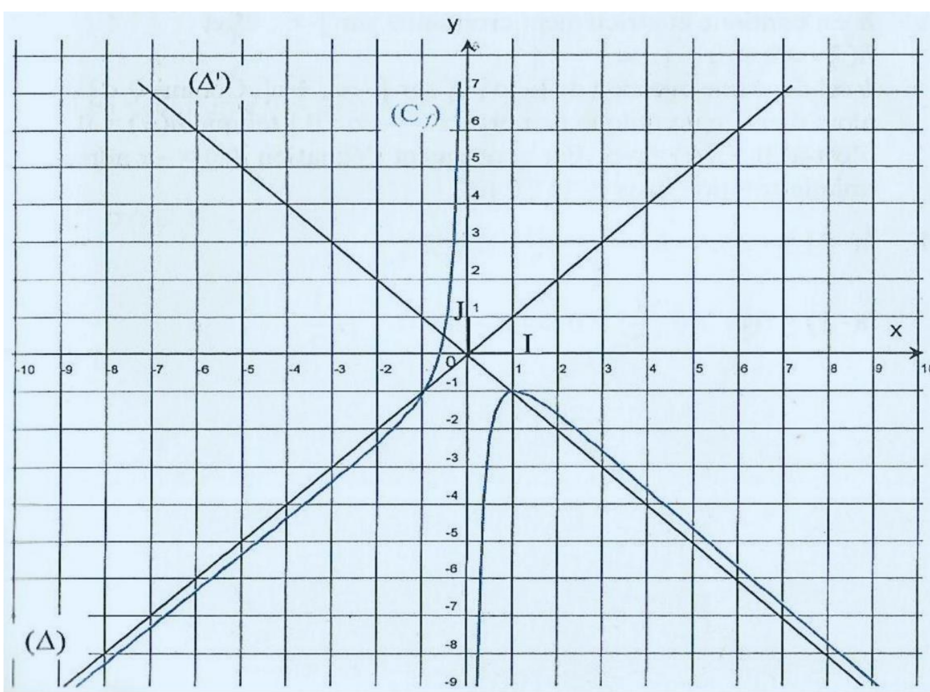
(C_f) et (Δ) se coupent au point de coordonnées $(-1, -1)$.
b. $\forall x \in]-\infty; 0\left[, f(x) - x = \frac{\ln(-x)}{x}\right.$

$\frac{\ln(-x)}{x} < 0 \Leftrightarrow \ln(-x) > 0 \Leftrightarrow x < -1. \forall x \in \left]-\infty; -1\right[, f(x) - x < 0$

donc (C_f) est en dessous de (Δ).

$\frac{\ln(-x)}{x} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0. \forall x \in \left]-1; 0\right[, f(x) - x > 0$; donc (C_f) est au-dessus de (Δ).

6. Tracé de $(C_f), (\Delta)$ et (Δ')



Partie C

1. a. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x + \frac{\ln(-x)}{x}\right) = -\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(-x)}{x} = +\infty$

b. h est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et on a $h'(x) = f'(x) + 1$.

Comme $f'(x) > 0$, alors $h'(x) > 0$. Donc h est strictement croissante sur$]-\infty; 0[$.

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0
$h'(x)$		$+$	‖
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

2. a. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et $h(]-\infty; 0[) =]-\infty; +\infty[$;

h est donc une bijection de]- $-0[$ sur $]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, alors il existe un unique nombre $\alpha \in]-\infty; 0[$ tel que $h(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = -\alpha$. Par conséquent l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution dans $]-\infty; 0[$.

b. $h(-1) = -2$; $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 2\ln 2$.

$h(-1) < 0$ et $h\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ donc $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Partie D

1. Sur $]1, +\infty[$, $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ') d'après B4.b.

D'où $\mathcal{A}(\mathrm{t}) = \int_1^t (f(x) - x)\mathrm{d}x = \int_1^t \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^t = \frac{1}{2}(\ln t)^2.$

2. a. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ on a donc $u'(x) = \frac{1}{x}$. Choisissons $v(x) = -\frac{1}{x}$.

$J(\mathrm{t}) = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\mathrm{dx} = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t$ $J(\mathrm{t}) = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1.$

b. Si $x \geqslant 1$, alors $\ln x \geqslant 0$ et $\frac{\ln x}{x^2} \geqslant 0$ d'où $\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}\, dx \geqslant 0$; par suite $\boldsymbol{J}(\mathrm{t}) \geqslant 0$. Si $t \geqslant 1$ alors $\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} \geqslant 0$ et $1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t} \leqslant 1$ c'est-à-dire $\boldsymbol{J}(\mathrm{t}) \leqslant 1$, On en déduit que $0 \leqslant J(t) \leqslant 1$.

c. $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{J}(\mathrm{t}) = 1$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0 \end{cases}$$

SESSION DE REMPLACEMENT 1994 SÉRIE C

EXERCICE 1

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{H}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \; y_2}{\left(\frac{1}{2}\right)_2 \left(\frac{1}{2}\right)_2} = 1$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{H}) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{X}^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\mathrm{Y}^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \left(\mathrm{X} = x + \frac{1}{2}, \mathrm{Y} = y\right)$;

(H) est une hyperbole équilatère de centre Ω.

Éléments de symétrie dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$:

$\Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ est le centre de symétrie,

la droite d'équation $y = 0$ (l'axe focal) est un axe de symétrie,

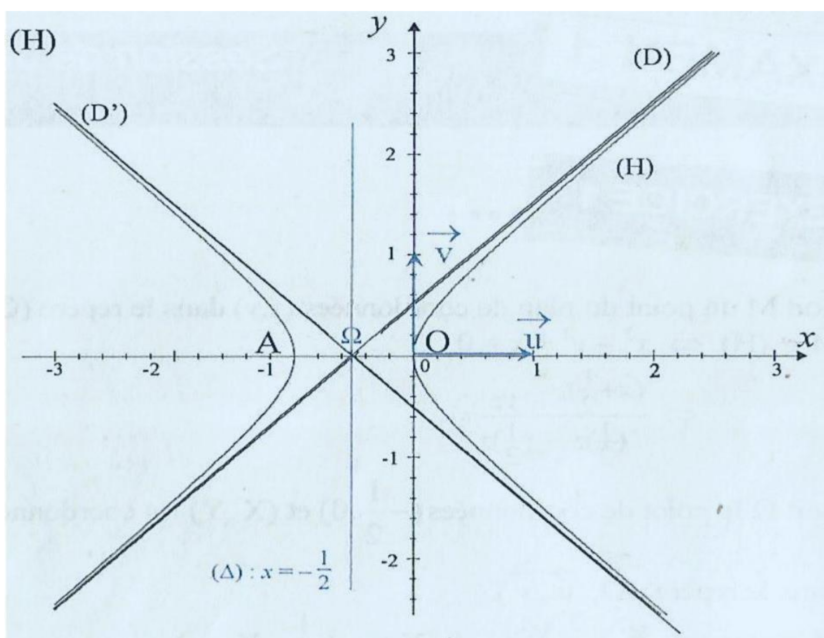
la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie.

Asymptotes dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$:

(D) : $y = x + \frac{1}{2}$

(D') : $y = -x - \frac{1}{2}$

b. Tracé de (H)



2. a. z' est réel $\Leftrightarrow \overline{z'} = z'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{z^2+z} = \dfrac{2}{\bar{z}^2+\bar{z}} \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+z = \bar{z}^2+z \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z^2-\bar{z}^2)+(z-\bar{z}) = 0 \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{z}-\bar{z})(\bar{z}+z+1) = 0 \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = z \text{ ou } \mathrm{R_e}(z) = -\dfrac{1}{2} \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

Soit ($\mathrm{O}x$) l'axe des abscisses et (Δ) la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, A le point de coordonnées $(-1,0)$.

L'ensemble des points M tels que z ' est réel est

$$((\mathrm{O}x) - \{\mathrm{O}, \mathrm{A}\}) \cup (\Delta)$$

b. z' imaginaire pur $\Leftrightarrow z' = -\overline{z'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{z^2+z} = -\dfrac{2}{\bar{z}^2+\bar{z}} \# (1) \\ z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

Posons $z = x+iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$,

$(x,y) \neq (0,0)$ et $(x,y) \neq (-1,0)$, la relation (1) est équivalente à

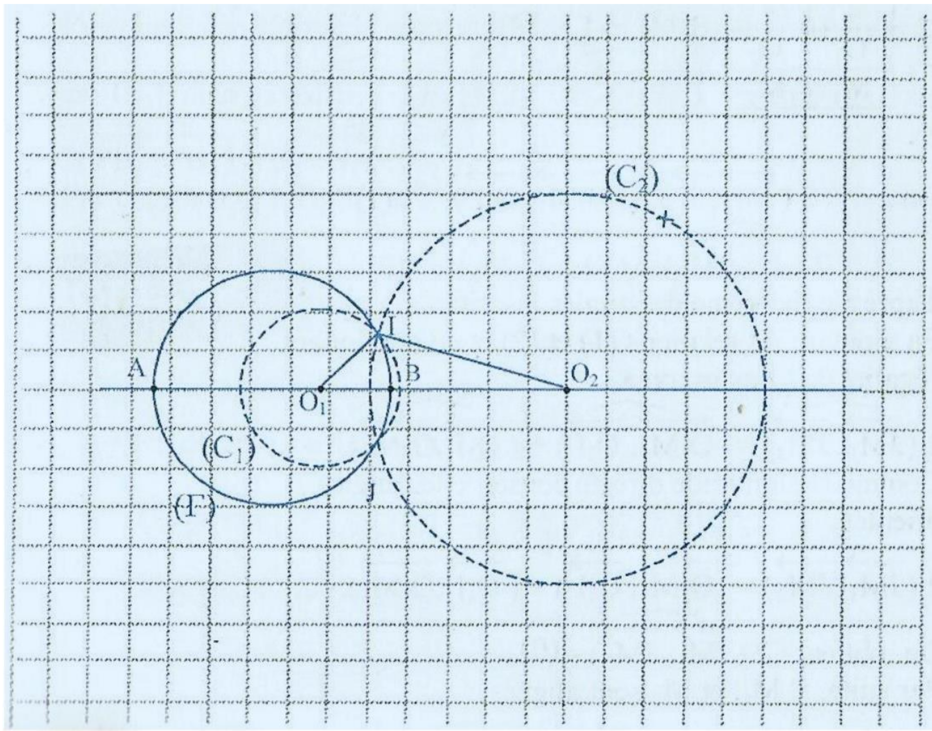
$2x^2-2y^2+2x = 0$ soit $x^2-y^2+x = 0$.

Donc l'ensemble cherché est l'hyperbole (H) privée de ses sommets A et O.

Construction : voir figure.

EXERCICE 2

1. Figure 1



2. a. s a pour rapport $\frac{5}{2}$. En effet si α désigne le rapport de s, r_1 le rayon de (C_1) et r_2 celui de (C_2), alors $s(C_1) = (C_2)$. Ce qui entraîne $\alpha r_1 = r_2$.

Par suite $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$.

Comme $r_1 = 2$ et $r_2 = 5$, on a $\alpha = \frac{5}{2}$.
b. $s(N) = N$ et $s(O_1) = O_2$ alors $\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{5}{2}$.
c. $\frac{NO_2}{NO_1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow NO_2^2 - \frac{25}{4}NO_1^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NO_2} - \frac{5}{2}\overrightarrow{NO_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{NO_2} + \frac{5}{2}\overrightarrow{NO_1}\right) = 0$$

Soit A le barycentre des points pondérés $(O_2, 1)$ et $\left(O_1, \frac{-5}{2}\right)$ et B celui des points pondérés $(O_2, 1)$ et $\left(O_1, \frac{5}{2}\right)$, l'ensemble (Γ) est le cercle de diamètre $[AB]$.

3. On a la correspondance suivante :

$$\overset{S}{\curvearrowright}$$

I	I
O_1	O_2
M_1	M_2

On a : $2(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JI}) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right)$ (1)

$2(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM_2}) = (\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2})$ (2)

d'après le théorème des angles inscrits.

En ajoutant les relations (1) et (2) et en appliquant l'égalité de Chasles, on a :

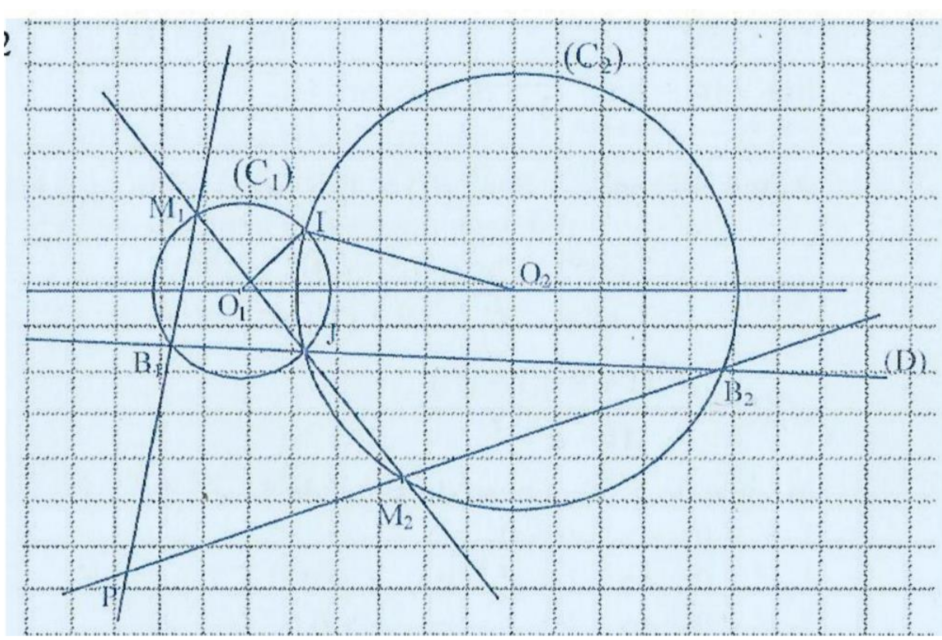
$$2(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) + (\overrightarrow{O_2I}, \overrightarrow{O_2M_2})$$

Comme la similitude directe conserve les angles orientés,

$$2\left(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}\right) = \left(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_1I}\right) + (\overrightarrow{O_1I}, \overrightarrow{O_1M_1}).$$

On obtient : $2(\overrightarrow{JM_1}, \overrightarrow{JM_2}) = (\hat{0})$.

Par suite, J, M_1, et M_2 sont alignés.
b. Figure 2



4. a. L'image du point B_1 est un point du cercle (C_2) qui est aligné avec J et B_1. C'est donc B_2. De plus $S(M_1) = M_2$ donc la droite (B_2M_2) est l'image de la droite (B_1M_1) par S.

Comme S est une similitude directe dont l'angle n'est ni plat, ni nul, les deux droites (B_1M_1) et (B_2M_2) sont sécantes.
b. P, B_1, M_1 sont alignés et P, B_2, M_2 sont alignés alors

$$2(\overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{PB_2}) = 2(\overrightarrow{M_1B_1}, \overrightarrow{M_2B_2})$$

⋆

Puisque S transforme le segment $[M_1B_1]$ en $[M_2B_2]$ et le segment $[B_1]$ en $[\mathrm{IB}_2]$, on a : $2(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\ \mathrm{B}_1, \mathrm{M}_2\ \mathrm{B}_2}) = 2(\overrightarrow{\mathrm{IB}_1}, \overrightarrow{\mathrm{IB}_2})$. On en déduit que $2(\overrightarrow{\mathrm{PB}_1}, \overrightarrow{\mathrm{PB}_2}) = 2(\overrightarrow{\mathrm{IB}_1}, \overrightarrow{\mathrm{IB}})$

Par conséquent P, B_1, B_2 et I sont cocycliques.

PROBLEME

PARTIE A

1. a. $\mathrm{D}_g = \mathbb{R}$; donc $\forall t \in \mathrm{D}_g, -t \in \mathrm{D}_g$.

$g(-t) = \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} = \frac{e^t}{e^{2t}(1+e^{-2t})} = \frac{e^t}{1+e^{2t}} = g(t)$

g est donc une fonction paire.
b. $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{-t}+e^t} = 0$ car

$\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \\ \lim\limits_{t\to-\infty} (1+e^{2t}) = 1 \end{cases}$

Autre méthode : $\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} g(-t) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ car g est paire.
c. $g'(t) = \frac{e^t(1+e^{2t})-2e^{2t}(e^t)}{(1+e^{2t})^2} = \frac{e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}$

$g'(t) = \frac{e^t(1+e^t)(1-e^t)}{(1+e^{2t})^2}$

le signe de $\mathrm{g}'(t)$ dépend du signe de $1-e^t$:

$1 - e^t = 0 \Leftrightarrow t \leqslant 0$

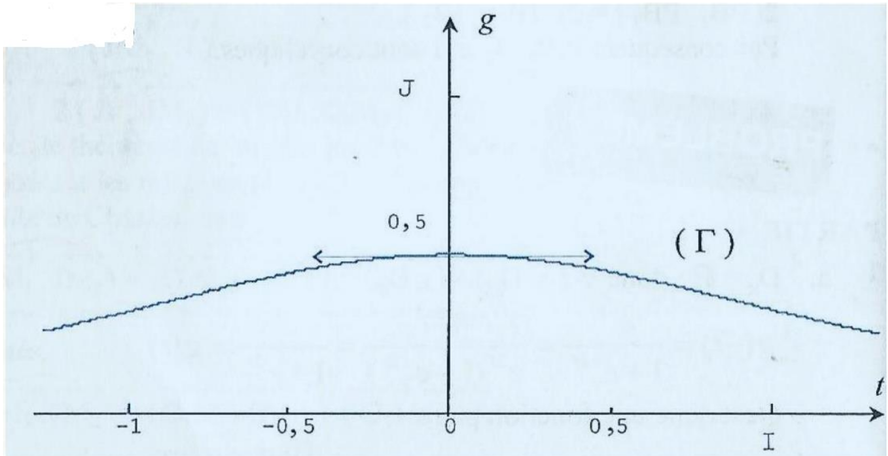
$1 - e^t > 0 \Leftrightarrow 1 > e^t \Leftrightarrow t < 0$

$1 - e' < 0 \Leftrightarrow 1 < e^t \Leftrightarrow t > 0$

g est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Tableau de variation de g

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

d. Tracé de (Γ)



2. $G(x) = \int_0^x g(t)dt$
   a. G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 .
   b. $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = g(x)$. Comme $g(x) > 0, G$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   c. $G(0) = 0$ et G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

d'où: $\forall x \in]-\infty, 0[\; \mathrm{G}(x) < 0$

$\forall x \in]0, +\infty[\; \mathrm{G}(x) > 0$

PARTIE B

1. a. $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

b. f est bien définie sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ d'après 1. a.

Si $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[, -x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$
et $f(-x) = \ln\left(\tan\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right] = \ln\left[\text{cotan}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
$= -\ln\left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.
c. $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$u'(x) = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ d'où le résultat : $f'(x) = \frac{1+\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

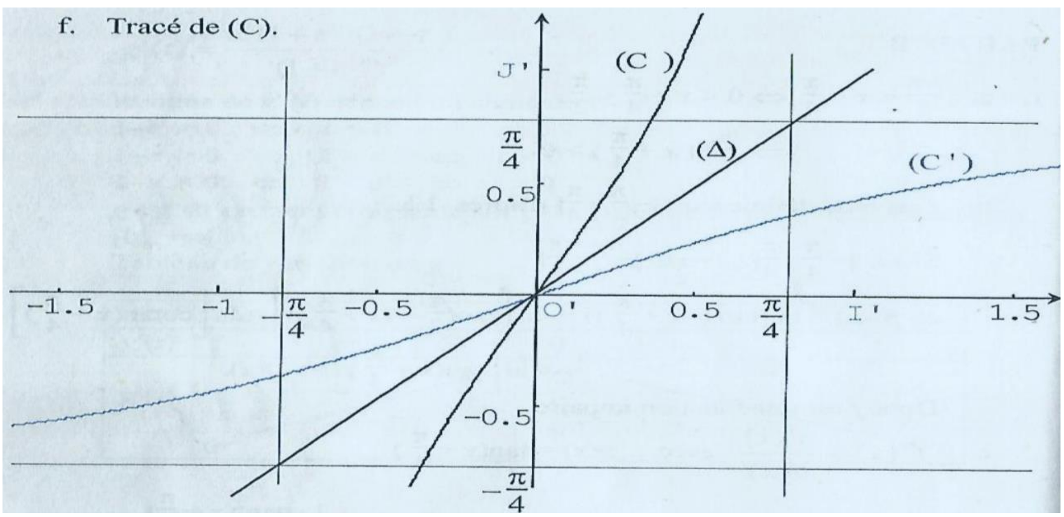
Par suite $f'(0) = \frac{1+\tan^2\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = 2$
d. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = +\infty$.

e. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[$.

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f. Tracé de (C)



2. a. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[$ et $f(]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[) = \mathbb{R}$

Donc f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent f admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}[$.

b. $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4}$; $\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{4}$

$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$. Comme $f'(0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en 0 et on a : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

Tableau de variation de f^{-1}

x	$-\infty$		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		$+$	
$(f^{-1})(x)$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{4}$

Tracé de (C') : voir figure. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y' = x$ dans le repère orthonormé (O, I, J).

c. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \ x = f(y)$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \quad e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$

d. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1+\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = g(x) = \mathrm{G}'(x).$

D'où f^{-1} est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Comme $f^{-1}(0) = 0$ alors f^{-1} est la primitive de g qui s'annule pour $x = 0$.

Par conséquent $f^{-1} = G$.

CORRECTION SESSION NORMALE 1994

EXERCICE I

1°) a) z_1 est solution réelle de (E) ssi

$\begin{cases} {z_1}^3 - 5z_1^2 + 6z_1 = 0 \\ -3z_1^2 + 11z_1 - 10 = 0 \end{cases}$ d'où $z_1 = 2$

b) $(E) \Leftrightarrow (z-2)[z^2 - (3+3i)z + 5i] = 0$

$\Delta = -2\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})^2; \mathrm{z}_2 = 2 + \mathrm{i}; \mathrm{z}_3 = 1 + 2\mathrm{i}$

2°) a) L'affixe du barycentre est $Z = 2z_1 - 2z_2 + z_3$ donc $Z = 1$. Le barycentre est donc le point I.

b) Première méthode:

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{|\mathrm{z}_3 - \mathrm{z}_2|}{|\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1|} = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \mathrm{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right)$$

$= \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

Ω étant le centre de la similitude directe on doit donc avoir ΩAB isocèle rectangle et le triplet (Ω, A, B) direct on vérifie que $\Omega = I$ en montrant que

$\mathrm{mes}(\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{IB}}) = \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}} = \sqrt{2}$.

Deuxième méthode: La relation complexe associée à S est de la forme $z' = az + b$,

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 + i \\ (2+i)a + b = 1 + 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + i \\ b = -i \end{cases}$$

Donc S est associée à la relation $\mathrm{z}' = (1 + \mathrm{i})\mathrm{z} - \mathrm{i}$

$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

L'affixe du centre Ω vérifie la relation $\mathrm{z} = (1 + \mathrm{i})\mathrm{z} - \mathrm{i}$ donc $\mathrm{z} = 1$ et $\Omega = \mathrm{I}$.

S est donc la similitude directe de centre I, de rapport $\mathrm{k} = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c) $Z_{C'} = (1 + i)z_3 - i = -1 + 2i$. Donc $C'(-1; 2)$.

d) S étant une application affine conserve le barycentre. I est barycentre de (A, 2), (B, -2), (C, 1) donc $S(I) = I$ est barycentre de $(B, 2), (C, -2), (C', 1)$.

EXERCICE II

$1°$) a) Première méthode: disjonction des cas: En posant $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$ et $q = 2k'$ ou $q = 2k' + 1$, on vérifie que $p + q$ et $p - q$ ont la même parité.

Deuxième méthode: utilisation des

congruences $(p + q) - (p - q) = 2q$ donc

$\mathrm{p} + \mathrm{q} \equiv \mathrm{p} - \mathrm{q}\ [2]$
b) $\mathrm{p}^2 - \mathrm{q}2 = (\mathrm{p} + \mathrm{q})(\mathrm{p} - \mathrm{q})$. C'est donc le produit soit de deux nombres impairs donc un nombre impair, soit de deux nombres pairs donc un multiple de 4 .

$2°$ a) En posant $n = 2k + 1 = (k' + 1)^2 - k'^2$, on

vérifie que $k' = k$.

b) Si $n = 4k$ et $n = p^2 - q^2$, on sait que $p + q$ et $p - q$ doivent être tous deux pairs. Posons alors $p - q = 2r$ et $\mathrm{p} + \mathrm{q} = 2\mathrm{r}'$. On doit donc avoir $\mathrm{rr}' = \mathrm{k}$. r est donc un diviseur de k, prenons par exemple $r = 1$, alors

$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 2k \end{cases} \Leftrightarrow=> \begin{cases} p = k + 1 \\ q = k - 1 \end{cases}$

$3°$) Si n est impair ou multiple de 4 alors d'après $2°$) n est différence de deux carrés.

Réciproquement si n est une différence de deux carrés, d'après $1°$) b) , n est impair ou multiple de 4 .

Une condition nécessaire et suffisante pour que n soit une différence de deux carrés est qu'il soit impair ou multiple de 4 .

PROBLEME

Partie A:

$1°$ Soit $p(n)$ la proposition $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

- $\frac{1}{1!} = 1$ et $\frac{1}{2^0} = 1$ donc $p(1)$ est vraie.
- Supposons $p(n)$ vraie

$\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 22^{n-1} \leq n!$

$\Leftrightarrow> (n + 1)2^{n-1} \leq (n + 1)n!$

or $2 \leq n + 1$ car $n \geq 1$ donc

$(\alpha) => 2.2^{\mathrm{n}-1} \leq (\mathrm{n} + 1)\ !$

$\Leftrightarrow 2^n \leq (n + 1)\ !$

$\Leftrightarrow=> \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

- On a donc : $\forall n \in IN^* \ \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2° a) $1 \leq 1$

$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$
$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$
$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$
$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$\mathrm{u_n} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots .. + \frac{1}{2^{n-1}}$

donc $\mathrm{u_n} \leq 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

$u_n \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$\mathrm{u_n} \leq 3$
b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Donc (u_n) est croissante.

Toute suite croissante et majorée est convergente.

(u_n) est donc convergente.

Partie B:

10. $\mathrm{f_0'(x) = -e^{-x}}$ tableau de variations 1

$f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$ tableau de variations 2

$\mathrm{f_1(x) - f_0(x) = (x-1)e^{-x}}$ donc

sur $]-\infty; 1[(C_1)$ est au-dessous de (C_0);

sur $]1; +\infty[(C_1)$ est au-dessus de (C_0)

BERENGER B. TC

Représentations graphiques de (C_0) et (C_1) sur fig 1

$2°) f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

Tableau de variations 3 dans le cas où n est pair.

Tableau de variations 4 dans le cas où n est impair.

3°) Courbes (C_2) et (C_3) sur la fig 2 . Il est intéressant de vérifier que sur] - ;; $1[(C_3)$ est au-dessous de (C_2) et sur $]1; +\infty[(C_3)$ est au-dessus de (C_2)

Partie C:

10. $F_o(x) = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$

$F_1(x) = \int_0^x te^{-t}dt$ Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

alors on $a: u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_1(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt$

$F_1(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = 1$

2o) $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}dt$ Posons $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-t}$ alors on a : $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_n(x) = [-t^n e^{-t}]_0^x - \int_0^x -nt^{n-1}e^{-t}dt$

$F_n(x) = -x^n e^{-x} + nF_{n-1}(x)$

Partie D.

$1°)$ a) Pour $x = 1, F_n(1) = -e^{-1} + nF_{n-1}(1)$ donc

$\forall n \in IN^* \dfrac{F_n(1)}{n!} = -\dfrac{e^{-1}}{n!} + \dfrac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$

b) $\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$

$$\frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!} = -\frac{e^{-1}}{(n-1)!} + \frac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!}$$

$$\frac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!} = -\frac{e^{-1}}{(n-2)!} + \frac{F_{n-3}(1)}{(n-3)!}$$

$$\frac{F_2(1)}{2!} = -\frac{e^{-1}}{2!} + \frac{F_1(1)}{1!}$$

$$\frac{F_1(1)}{1!} = -\frac{e^{-1}}{1!} + \frac{F_0(1)}{0!}$$

$\frac{F_n(1)}{n!} = -e^{-1}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \cdots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\right) + \frac{F_0(1)}{0!} = -e^{-1}u_n + 1$

De plus $\frac{F_0(1)}{0!} = F_0(1) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1}u_o$

donc $\forall n \in IN \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1}\mathbf{u}_n.$

$2°)$ a) En étudiant les tableaux de variations 2,3 et 4 on vérifie que $\forall n \in IN^*, f_n$ est croissante sur $[0,1]$ donc $\forall t \in [0,1]$ $f_n(0) \le f_n(t) \le f_n(1)$ c'est à dire $0 \le f_n(t) \le e^{-1}$

b) Donc $\int_0^1 0dt \le \int_0^1 f_n(t)dt \le \int_0^1 e^{-1}dt$

c'est à dire que: $\forall n \in IN^* \ 0 \leq F_n(1) \leq e^{-1}$.

3°)$0 \leq F_n(1) \leq e^{-1} <\Rightarrow 0 \leq n!\,(1 - e^{-1}u_n) \leq e^{-1}$

$$<=> 0 \leq e - u_n \leq \frac{1}{n!}$$

Or d'après la partie A°) on a $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2n-1}$ donc

$\forall n \in IN^* \ 0 \leq e - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$\lim \frac{1}{2^n-1} = 0$ d'où $\lim(e - \mathbf{u_n}) = 0$ soit: $\lim \mathbf{u_n} = \mathbf{e}$