FICHE DE REVISIONS NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$.

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Unité graphique : $2cm$

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$

a) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera

b) Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-1 - i; 2 - 2i$ et $2i$

a) Placer les points $A; B$ et C

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme

4) On considère le point E d'affixe $2 + 2i$

a) Placer le point E

b) Demontrer que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

EXERCICE 3

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

a) $z' = -3z + 1 - i$; b) $z' = z + i$;

c) $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)z + \frac{1}{2}i$; d) $z' = (2-2i)z$.

e) $z' = -z + i$

EXERCICE 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe $1 - i$ de rapport 3 et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.

b) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point B d'affixe $i\sqrt{3}$, de rapport 4 et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

c) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

EXERCICE 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

1) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 4i$.

2) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 6

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J).

A, B et D sont les points d'affixes respectives $-1 + 3i$; -2 et $2 + 2i$.

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point J d'affixe i.

1- a) Fais une figure.

b) Démontre que l'écriture complexe de r est : $z' = iz + 1 + i$

2- a) Justifie que B est l'image du point A par la rotation r.

b) Justifie que D est l'antécédent du point A par r.

3- Soit C l'image du point A par la symétrie centrale de centre J.

a) Calcule l'affixe du point C.

b) Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Soient A(2 ; 2), B(-4 ; 2) et C(2 ; -1) trois points du plan.

1. Faire une figure et démontrer que ABC est un triangle rectangle.

2. Soit la similitude directe S du plan de centre A telle que S(B) = C.

a) Démontrer la transformation de C associée à S

b) En déduire l'affixe de l'image C' du point C par S et placer C'.

c) Donner les éléments caractéristique de S.

3. a) Démontrer que A, B et C' sont alignés et que BCC' est un triangle rectangle.

b) Soit (D) la d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ et (D') son image par la similitude S. Construire les droites (D) et (D').

c) Ecrire une équation cartésienne de (D').

EXERCICE 8

A/ 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (4+2i)z + 7 + 4i = 0$.

2- On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme complexe : $P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (5+8i)z + 4 - 7i$.

On note (E) l'équation complexe : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

a) Vérifie que i est une solution de (E).

b) Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

B/ Dans le plan muni du repère orthonormé (O ; $\vec{u}; \vec{v}$) d'unité graphique 1 cm, on donne les points : $A(i); B(2+3i) et\ c(2-i)$.

1- Démontre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2- Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que: $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 7$.

a) Vérifie que le point B appartient à (Γ).

b) On pose que : $z = x + iy$.

Démontre que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 7$.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristique de (Γ).

3-a) Place les points A, B et C.

b) Construire (Γ).

4- Soit B' l'image de B par la symétrie centrale de centre A.

a) Calcule l'affixe du point B'.

b) Justifie que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{B'C}; \overrightarrow{B'B}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique 2cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i;\ 2\ \ et\ 1 + i\sqrt{3}$.

1. a) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Soit φ la similitude directe de centre O qui transforme en C.

a) Justifie que l'expression complexe de φ est :$z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.

b) Justifie que φ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.

a) Détermine et construis (E).

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par φ.

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.

a) Détermine et construis (F).

b) Justifie que le point O et K milieu du segment [BC] appartiennent à (F).

c) Justifie que l'image de (F) par φ est la droite (OJ).

EXERCICE 10

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O : I ; J), unité 2 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme :

$P(z) = z^3 - 2iz^2 + (4+4i)z + 16 + 16i$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + (-2-2i)z + 8 + 8i = 0$.
2. a) Vérifie que : $P(z) = (z+2)[z^2 + (-2-2i)z + 8 + 8i]$.

   b) Déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3. On considère les points $A(-2), B(4i)\ et\ C(2-2i)$.

   a) Place A, B, et C dans le plan complexe.

   b)Justifie que $MES\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

   c) Détermine la nature du triangle ABC.

4. Soit le point D (4+2i) tel que ABCD soit un carré et S la similitude directe de centre A qui transforme B en D.
a) Détermine les éléments caractéristiques de S.
b). Détermine les affixes des points C' et D', images respectives de C et D par S.
c) Construis le point E image par S du point K, milieu du segment [AD].

EXERCICE 11

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

a) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}})$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. On note (z_n) la suite de nombre complexes définie par : $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$, pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Démontrer que les points A_2, A_3, et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + i\sqrt{3}$, $2 + 2i\sqrt{3}$ et $2i\sqrt{3}$. On remarque que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_3 = C$

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z + 2$.

d) Établir que pout tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$ où ω désigne le nombre complexe définit à la question 1. b). (On utilisera le fait que : $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega + 2$).

e) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

f) Justifier par récurrence que. que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.

g) Déterminer l'affixe du point A_{2020}.

EXERCICE 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique le centimètre. On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et $4 + 4i$.

1. On considère la similitude directe S de centre O telle que : S(A) = B.

a) Justifie que la similitude directe S a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

b) Détermine le rapport et l'angle de S.

2. On considère les points A_n tels que : $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$

On désigne par z_n l'affixe du point A_n

a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 8(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$.

b) Démontre que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.

3. a) Place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

b) Justifie que l'aire a_1 en Cm^2, du triangle OA_0A_1 est 16.

c) Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm², du polygone $A_0A_1A_2A_3\,A_4$.