



PREPA MATHS 2025 : FICHE A (EQUA-DIFF)

Exercice 1

Soit θ la température d'un corps à l'instant t . La température ambiante est 30°C .

A chaque instant t , on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie : $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$). A l'instant $t = 0$, la température de ce corps est 70°C et au bout de 5 minutes, elle n'est plus que de 60°C .

- 1) Détermine $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
- 2) Détermine la température de ce corps au bout de 20 minutes.

Exercice 2

On considère dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.

1. Vérifie que la fonction g telle que $g(x) = (x + 1)e^{-2x}$ est une solution de (E).
2. Démontre qu'une fonction $h + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction h est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
3. Détermine les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E').
4. a) Dédus des questions précédentes, les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E).
b) Détermine la solution f de (E) vérifiant la condition $f(0) = -2$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$.

1. Détermine le nombre réel m pour que la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = me^{-x}$ soit solution de (E).
2. Résous dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$.
3. Démontre qu'une fonction $h - g$ est solution de (E') si et seulement si la fonction g est solution de (E).
4. Dédus des questions précédentes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E).

Exercice 1

- 1) On a : $\theta(t) = x(t) + 30$; or $x'(t) = -k^2x$ d'où $x(t) = c e^{-k^2t}$, $c \in \mathbb{R}$ par suite $\theta(t) = c e^{-k^2t} + 30$
 Comme $\theta(0) = 70$ alors $c = 70 - 30 = 40$ et $\theta(5) = 60$ alors $-k^2 = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{4}$ donc $\theta(t) = 40 e^{\frac{1}{5} \ln \frac{3}{4} t} + 30$.
- 2) Pour $t = 20$, on a : $\theta(20) = 42,66^\circ$, donc la température de ce corps au bout de 20mn est $42,66^\circ$.

Exercice 2

- On a : $g'(x) + 2g(x) = (-2x-1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = e^{-2x}$ donc g est une solution de (E).
- On a : $h+g$ solution de (E) $\Leftrightarrow (h+g)' + 2(h+g) = e^{-2x}$
 $\Leftrightarrow h' + 2h = 0$ car $g' + 2g = e^{-2x}$
 Par suite, h est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$
- Les solutions sur \mathbb{R} sont les fonctions h définies sur \mathbb{R} par $h(x) = ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$
- a) Ainsi les solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R}
 Par $f(x) = ke^{-2x} + (x+1)e^{-2x} = (k+x+1)e^{-2x}$
 b) On a : $f(0) = 1 \Leftrightarrow (k+1)e^0 = 1 \Leftrightarrow k = 0$ donc $f(x) = (x+1)e^{-2x}$

Exercice 3

1. Déterminons le nombre réel m pour que la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = me^{-x}$ soit solution de (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R} h(x) = me^{-x}$ et $h'(x) = -me^{-x}$

$$h \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow h'(x) + 3h(x) = 2e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -me^{-x} + 3me^{-x} \Leftrightarrow 2me^{-x} = 2e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Donc la fonction h définie par : $h(x) = e^{-x}$ est solution de (E).

2. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$.

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$ sont les fonctions :
 $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. On a : $h-g$ solution de (E') $\Leftrightarrow (h-g)' + 3(h-g) = 0 \Leftrightarrow h' + 3h - (g' + 3g) = 0$, or $h + 3h = 2e^{-x}$
 Donc $g' + 3g = 2e^{-x}$; par suite g est solution de l'équation (E).

4. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur par : $x \mapsto e^{-x} - ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$