



**PREPA MATHS 2025**

**DERNIER VIRAGE BONUS : SUITE NUM, EQUA. DIFF et STAT**

**EXERCICE 1 : SUITE GEOMETRIQUE**

Soit  $u$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{3} \end{cases}$$

1. a) Calcule  $u_1$  et  $u_2$ .  
 b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel  $u_n \geq 2$ .  
 c) Démontre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
 d) Déduis – en que la suite  $(u_n)$  est convergente. Puis détermine sa limite.
2. On pose que pour tout nombre entier naturel,  $v_n = u_n - 2$ .  
 a) Montre que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .  
 b) Exprime  $u_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) En déduis la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Calcule la somme  $S = v_3 + v_4 + \dots + v_{19}$

**EXERCICE 2 : SUITE ARITHMETIQUE**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, I, J)$ , la courbe  $(C)$  ci-dessous représente la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty ; 6[$  par :  $f(x) = \frac{9}{6-x}$ .

1. a) construis la courbe  $(C)$  et de droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ , placer les termes  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sur l'axe  $(OI)$ . Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ ?
2. Démontre par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ .  
 a) Démontre que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.  
 b) exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) Calculer la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 3 : SUITE GEOMETRIQUE**

Soit la suite définie  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontre par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$ .
2. En utilisant la question 1, étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est – elle convergente ? Pourquoi ?
4. Soit la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 2$ .  
 a) Démontre que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.  
 b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) Déterminer la limite de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. On pose :  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$   
 Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 4 : EQUATION DIFFERENTIELLE

On se propose de chercher les fonctions dérivables  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle (E):  $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$ .

- Démontrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x - 1$  est solution de (E).
- Soit (E') l'équation différentielle :  $f'(x) + 2f(x) = 0$ .
  - Résoudre (E').
  - Soit  $k$  un nombre réel. Démontre que les fonctions  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$  sont solutions de (E).
- Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Démontre que si  $f$  est solution de (E) alors  $f - g$  est solution de (E').
  - En déduire les solutions de (E).

### EXERCICE 5 : EQUATION DIFFERENTIELLE

Soit l'équation différentielle (E):  $y' + 3y = 2e^{-x}$ .

- Détermine le nombre réel  $a$  pour que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = ae^{-x}$  soit solution de (E).
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E') :  $y' + 3y = 0$
- Montrer qu'une fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction  $f - g$  est solution de l'équation différentielle (E').
- En déduire les solutions de (E).

### EXERCICE 4 : STATISTIQUES

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

| Années                              | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Rang X de l'année                   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| Nombres Y de diplômés (en milliers) | 25   | 27   | 30   | 33   | 34   | 35   | 38   | 41   | 43   |

- Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1 cm). On prendra pour origine du graphique le point  $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ .
- Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X ; Y).
- Justifie que :
  - la variance de X est :  $\frac{20}{3}$  ;
  - la covariance de X et Y est :  $\frac{44}{3}$
- Sachant que la variance de Y est égale à  $\frac{98}{3}$ , déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.
  - Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.
- Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.
  - Déterminer une équation de (D).
  - Tracer (D).
- On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.