Prépa BAC 2021 **Prof : M. NASSA**

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES : T^le C-E

- **SUJET 1**

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), d'unité graphique, un centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n et p.

1- Construire les triangles MNP et ABC sachant que : $m = -1 - 3i$ et $n = 2$.

2- On considère la transformation f du plan dans lui-même, qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :
$z' = -\frac{1}{2}(1+i)[2-(m+n+p)]$.
Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

3- Soit α, β et γ les affixes respectives des points A, B et C.

Démontrer que :

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que : $\alpha = n + p - m$.

b) $\beta = m - n + p$.

c) $\gamma = n - p + m$.

4- On pose : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.
On désigne par α', β' et γ' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a) Démontrer que : $\alpha' = (1+i)m$;
$\beta' = (1+i)n$;
$\gamma' = (1+i)p$.

b) En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que le point A' appartient à la droite (BC).

c) Calculer $\frac{\beta'-n}{n}$ et $\frac{\gamma'-p}{p}$.
En déduire que les points B' et C' appartiennent respectivement aux droites (AC) et (AB).

5- Démontrer que les triangles A'B'C' et MNP sont semblables.

EXERCICE 2

Soit (u_n), la suite définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

1- Démontrer que : $\forall$ n $\in$]0 ; +∞[, f(x) $\geq \sqrt{7}$.

2- a) Démontrer par récurrence que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b) Démontrer par récurrence que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{7}$.

3- a) Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
b) En déduire la convergence de la suite (u_n).

4- Soit ℓ la limite de la suite (u_n).
a) Démontrer que: $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
b) Déterminer la valeur de ℓ.

5- Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.

6- On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2 \end{cases}$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

PROBLÈME

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g_n(x) = nx + (n+1)\ln x$.

1- Déterminer les limites de g_n en 0 et en +∞.

2- a) Calculer $g_n'(x)$ pour x élément de l'intervalle]0 ; +∞[, où g_n' est la dérivée de g_n.
b) En déduire le sens de variation de g_n.

3- Démontrer que l'équation x $\in$]0 ; +∞[, $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans]0 ; 1[.

4- Démontrer que : $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si x $\in$ [α_n ; +∞[.

Partie B

On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie dans la partie **A** et h la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $h(x) = x + \ln x$.

1- Démontrer que l'équation x $\in$]0 ; +∞[, h(x) = 0 admet une unique solution α telle que : $\alpha \in$]0 ; +∞[.

2- Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $\forall$ x $\in$]0 ; +∞[, $g_{n+1}(x) = g_n(x) + x + \ln x$.

3- Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n+1}$.

4- a) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
b) En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

5- Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul différent de 1, f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$f_n(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$et ($\mathscr{C}_{f_n}$) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

1- Selon la parité de n, déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- a) Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $\forall$ x $\in]0\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1} g_n(x)$.
b) En déduire, selon la parité de n, le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

3- Démontrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $f_n(\alpha_n) = (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

4- Construire ($\mathscr{C}_{f_2}$). On prendra : $\alpha_2 \approx 0{,}6$.

- **SUJET 2**

EXERCICE 1

Afin d'éviter des licenciements dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et de la faire passer de cinq à quatre jours.
L'un des trois jours de congés sera dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine.
Dans un sac, on dépose six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé choisit ses deux jours de congé autre que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux de ces boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1. a) Soit A l'évènement « l'un des jours de congé est le lundi » et
B l'évènement « l'un des jours de congé est le samedi ».

Démontrer que : $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

b) On définit les évènements C et D suivants :

C " parmi les jours de congés figurent le lundi, ou le samedi, ou les deux jours ".
D " les jours de congés sont trois jours consécutifs".

Calculer P(C) et P (D).

c) Yao aimerait bien avoir les mêmes jours de congé que Mariam. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte douze employés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Calculer la probabilité pour que 5 employés tirent le samedi comme jour de congé.

d) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux (2) employés tirent le samedi comme jour de congé.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

On appelle ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. I est le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [OI]. Les droites (OA) et (OC) recoupent ($\mathcal{C}$) respectivement en D et E.

1. Placer ces points sur une figure.

2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

c) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G, puis placer G.

3. A tout point M du plan, on fait correspondre par une transformation f, le point M'

tel que : $4\,\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$.

a) Démontrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer les images par f des points B et D.

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et S la transformation telle que : S = R$\circ f$.

a) Caractériser la transformation S.

b) Construire le point H tel que : H = S(G).

c) Soit le point , invariant par S.
Démontrer que les points Ω, O, G et H sont cocycliques ainsi que les points Ω, O, B et D.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y = 0$.

2. a) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = (ax+b)e^{x^2}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit h_2 une fonction. Démontrer que h_2 est solution de (E) si et seulement si $h_2 - h_1$ est solution de (E').

3. Déduire de ce qui précède la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x|x|}$.

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire une interprétation graphique.

3. a) Calculer : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-1}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

c) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

5. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$ par : $g(x) = e^{-x^2} - (x\sqrt{2}+2)e^{-\frac{1}{2}}$.

a) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty;-\frac{1}{2}]$, $g''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

b) Étudier les variations de g'.

c) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup]-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{1}{2}[$, $g'(x) < 0$.

d) En déduire le sens de variation de g sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$.

e) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}]$, $g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}[$, $g(x) > 0$.
En déduire les positions de ($\mathcal{C}$) relativement à (T).

6. Tracer (T) puis ($\mathcal{C}$).

- **SUJET 3**

EXERCICE 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\, dx$ et pour tout nombre entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x\, dx$.

1- a) Calculer I_0.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2- a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Vérifier que : $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.

3- a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\, dx$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque homogène P d'épaisseur négligeable.
Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

La plaque P représente la portion du plan délimitée par la courbe (Cf), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

1- a) Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; \pi]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Tracer la courbe (Cf) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

2- Démontrer que, l'aire exprimée en cm^2, de la plaque est égale à $4\pi^2$.

3- On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :

$$x_G = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} xf(x)\,dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\left(f(x)\right)^2 dx.$$

On pose $I = \int_0^{\pi} \sin^2(2x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$.

a) Vérifier que: $x_G = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2}{3}\pi^3 + J\right)$ et $y_G = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{4}{3}\pi^3 + 4J + I\right)$

b) Calculer I. (on pourra utiliser la formule $\sin^2(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}$)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer J.

d) Déduire des questions 3.a),b) et c) les coordonnées du point G.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives 2 ; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$ et -1.

Partie A

Soit (Γ) l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B et dont l'axe focal est l'axe (OI).

1- Construire les points A, B, C et Ω.

2- *a)* Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ).
b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, I, J).
c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe (OJ).

3- Tracer (Γ) dans le repère (O, I, J).

Partie B

On désigne par s la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Soit E l'image du point C par h.

1- a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

b) Démontrer que s(E) = B.

c) Construire les points F et K tels que s(C) = F et s(B) = K.

2- Le cercle circonscrit au triangle BCE recoupe la droite (AB) en un point G et le cercle circonscrit au triangle BFK recoupe la droite (AK) en un point D.

a) Construire les points G et D.

b) Démontrer que s(G) = D.

3- Soit $S_{(OA)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a) Démontrer que $S_{(OA)}(E) = G$

b) Justifier que h(B) = G

c) Démontrer que le triangle ABD est équilatéral de sens indirect.

4- Démontrer que le quadrilatère ADBC est un losange.

5- Démontrer que l'image du triangle DBA par h^{-1} est le triangle KAF (où h^{-1} est la réciproque de h).

- **SUJET 4**

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. M(t) est un point mobile de coordonnées

$x(t)$ **;** $y(t)$ **définies par :** $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - cost \\ y(t) = sint \end{cases}$ **; (t∈ ℝ)**

(C) est la courbe décrite par la trajectoire de M(t).

1)a)Montrer que les fonctions $x: t \longmapsto x(t)$ et $y: t \longmapsto y(t)$ sont périodiques de période T que l'on précisera.

b) Que peut dire positions des points M(t) et M(t+T) ?

c)Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et en déduire les positions des points M(-t) et M(t).

d) Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude de $[0;\pi]$.

2) Soit la courbe (C') définit par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - cost \\ y(t) = sint \end{cases}$; t$\in$ $[0;\pi]$

a)Comment obtient-on (C) à partir de (C') ?

b) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation de x et y

c)Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est verticale

d) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale

e) Tracer avec soin la courbe (C')

3) Tracer la courbe(C).

On donne : $\sqrt{3}$=1,7

Exercice 2

Soit $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}[$

1)a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(2\sin\theta)z + 1 = 0$ (e_0).

b) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions de (e_0)

2) On considère l'équation différentielle : $y'' + (2sin\theta)y' + y = 0$ (e_1)

a)On pose $y_0(x = ax + b$ avec a et b des nombres réels.

Déterminer les nombres réels a et b tels que y_0 soit solution de (e_1).

b) Montrer qu'une fonction y est solution de (e_1) si et seulement si $y - y_0$ d'une équation différentielle homogène du second ordre que l'on résoudra

3) Déterminer toutes les solutions de (e_1)

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par g(x) =$\sqrt{e^{2x} - 1}$.

1) Calculer g'(x) et étudier le sens de variation de g.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Quelle conséquence graphique a-t-on ?

3) Dresser le tableau de variations de g

4) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

Tracer la courbe g et celle de g^{-1} dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, g^{-1} étant la réciproque de g. Unité : 2cm.

Partie B

Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $G(x)=\int_0^x g(t)dt$

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $H(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

a) Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer H'(x)

b) Calculer $(Hotan)'(x)$ pour tout $x\in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. En déduire que $(Hotan)'(x)=x$, pour tout $x\in]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Calculer H(1).

Pour tout $x\in [0,+\infty[$, on pose $F(x)=g(x)-(Hotan)(x)$

a)vérifier que F et G sont dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $\in]0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$

b) En déduire que $G(x)=F(x)$. calculer alors $I=\int_0^{\ln(2)}\sqrt{e^{2t}-1}\,dt$

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{2x}-1$.

On pose : $\begin{cases} I_n=\int_0^{ln2}[f(x)]^{\frac{n}{2}}d(x) & \forall\, x\, n\in\mathbb{N}^* \\ I_0=ln\sqrt{2} \end{cases}$

1) **a Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $\in[0,+\infty[$,**

$f'(x)=2(1+f(x))$ (e_0).

b) En utilisant (e_0),montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}f'(x)dx$ puis en déduire que $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+2}$ (e_1) .

c)Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}$. En déduire alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ((0,5 + 0,25) point)

2) On pose : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+4}-I_n$

a)En remplaçant n par n + 2 dans la relation (e_1), montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$

B) En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n.

c) calculer $\sum_{n=0}^{p} U_{4n+1}$ en fonction de U_{4n+5} et de I_1.

d) Calculer alors la limite lorsque $p \to +\infty$ de la somme

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5}$$

- **SUJET 5**

Exercice 1 :

On place dans un sac six jetons indiscernables au toucher, marqué : -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3. On tire un jeton du sac, on note « a » son numéro. On le remet dans le sac, puis on tire un deuxième jeton et on note « b » son numéro.

Au couple (a, b) obtenu, on associe l'ensemble $(E_{a,b})$ des points M dont les coordonnées (x, y) dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient l'équation : $bx^2 + ay^2 - bx + ay + \frac{a+b-4ab^2}{4} = 0$.

1- Démontrer que pour tout couple (a, b), l'ensemble $(E_{a,b})$ est une conique à centre. Préciser les coordonnées du centre.

2- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « $(E_{a,b})$ est un cercle ».

E : « $(E_{a,b})$est une ellipse non réduite à un cercle ».

H : « $(E_{a,b})$ est une hyperbole ».

H' : « $(E_{a,b})$ est une hyperbole équilatère ».

3- On donne $a = 3$ et $b = 2$.

Déterminer les éléments géométriques de $(E_{3,2})$: axe focal, foyers, sommets.

4- On donne $a = -3$ et $b = 2$.

Déterminer les éléments géométriques de $(E_{-3,2})$: axe focal, foyers, sommets.

5- Construire $(E_{3,2})$; $(E_{-3,2})$ et $(E_{2,2})$ dans un même repère.

Exercice 2 :

Dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère

l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $z_1 = i\bar{z} + a + ib$; où a et b sont deux réels quelconques donnés.

On appelle A le point de coordonnées (a, b).

1- Montrer que f est une isométrie.

2- Comment faut-il choisir le point A pour que f soit une symétrie orthogonale. Donner la caractéristique de cette symétrie.

3- On choisit A de telle sorte que f ne soit pas une symétrie orthogonale.

a) Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments qui définissent f.

b) On pose $f_{-1} = f$ et pour tout entier naturel $n \geq 2, f^n = f^{n-1}\ o\ f$.

Montrer que pour tout entier naturel p non nul, f^{2p} est une translation dont on donnera le vecteur.

Quelle est la nature de f^{2p+1} ?

Problème :

I- Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x+sinx}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1- Déterminer les nombres réels x de $[0, +\infty[$ tels que $f(x) = -1$.

2-a) Prouver que pour tout réel x positif non nul, $\frac{-x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1-x}{x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels x tels que $f(x) = \frac{1-x}{x}$ et ceux tels que $f(x) = \frac{-1-x}{x}$.

c) En déduire dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la position relative de la courbe représentative (C) de (f)et des courbes (γ_1) et (γ_2) représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{-1-x}{x}$ et $\frac{1-x}{x}$ respectivement.

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

4-a) Etudier le signe de $tan\ x - x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) Prouver que pour tout k appartenant à IN^*, il existe un élément x_k et un seul de $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\ ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ tel que $tan\ x_k = x_k$; montrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur $]0, x_1[$ puis sur chaque intervalle $]x_k\ ; x_{k+1}[$, où $k = 1, 2, \ldots$ (On distinguera k pair et k impair).

5-a) Prouver que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $0 \leq x - sinx \leq \frac{x^3}{6}$.

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = sinx - x + \frac{x^3}{6}$.

On calculera les dérivées $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ et on déduire le signe de φ).

b) Prouver que f est dérivable en 0.

6-a) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.

b) Tracer sur une même figure les courbes $(\gamma_1), (\gamma_2)$ et (C) en se limitant à l'intervalle $[0, 3\pi]$. On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4,49$ et $x_2 \approx 7,73$.

(Unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 6 cm sur l'axe des ordonnées).

II- On considère l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x) + 1)dx$.

1- Pour tout élément u de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on pose : $F(u) = \int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{sint}{t} dt$ et pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on pose : $G(x) = \int_0^x \frac{sin\pi t}{1-t} dt$.

Prouver que pour tout élément x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

En déduire que $J = \int_0^{1/2} \frac{sin\pi t}{1-t} dt$.

2- Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \int_0^{1/2} sin\pi t dt$ et $U_n = \int_0^{1/2} t^n sin\pi t\, dt$ si $n \geq 1$.

a) Prouver que, pour tout $n \geq 1, J = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + r_n$, où $r_n = \int_0^{1/2} \frac{t^n sin\pi t}{1-t} dt$.

b) Etablir que, pour tout élément t de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{t^n sin\pi t}{1-t} \leq 2t^n$.

En déduire une majoration simple de r_n.

c) Montrer que $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1})$.

3-a) Calculer U_0 et U_1.

b) Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right]$.

4- A partir des résultats obtenus au $II - 2$ et $II - 3$, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul).

- **<u>SUJET 6</u>**

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 FCFA pour les hommes et 700F CFA pour les femmes.

Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000F CFA.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

1. **On considère l'équation (E) :** $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.

   a) soit (x, y) **un couple d'entiers relatifs solution de** (E).

   Démontrer que $2x \equiv 1[7]$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$**, l'équation** $2x \equiv 1[7]$.

   c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. **Résoudre l'équation** (E'): $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.

3. **En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.**

EXERCICE 2

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- **Y prend les valeurs** $1, -1$ *et* 2 **avec les probabilités respectives** e^a, e^b *et* e^c**où** a, b *et* c **sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison** r **tels que :** $a = b - r$ **et** $c = b + r$.
- **L'espérance mathématique** $E(Y)$ **de** Y **est égale à** 1.

1. a) Justifie que le couple (b, r) **est solution du système (S)** $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = ln\left(\frac{1}{7}\right)$ **et** $c = ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2. Justifie que la variance $V(Y)$ **de Y est égale à** $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) **les points** A, B *et* C **d'abscisses respectives** 1 ; -1 *et* 2.

On désigne par G **le barycentre des points pondérés** $(A, 1), (B, 2)$ *et* $(C, 4)$.

On note (Γ) **l'ensemble des points** M **de la droite** (D) **tels que :** $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ **et on pose :** $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ).

Problème :

A- Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O,I,J). On considère les points $A\binom{1-\lambda}{-\lambda}$ et $B\binom{\lambda}{1+\lambda}$ où λ est un réel non nul. Soit f_λ l'application affine du plan telle que :

$f_\lambda(0) = 0, f_\lambda(I$à $= A$ et $f_\lambda(J) = B$.

1-a) Montrer que f_λ est une transformation affine.

b) Soit $g_\lambda: M\binom{x}{y} \mapsto M'\binom{x'}{y'}$ l'application affine d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = (1-\lambda)x + \lambda y \\ y' = -\lambda x + (1+\lambda)y \end{cases}$$

Montrer que les applications g_λ et f_λ sont égales.

c) Comparer $f_{-\lambda}$ et l'application réciproque de f_λ notée f_λ^{-1}.

2- On considère l'application θ_λ de P dans IR qui, au point $M\binom{x}{y}$ associe le réel $(1-\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2$.

a) Démontrer que : $\forall\lambda \in IR^*, \theta_{-\lambda}$ o $\mathrm{f}_\lambda = \theta_\lambda$.

b) En déduire l'application θ_λ *o* $f_{-\lambda}$.

3-a) On note $C_{(\lambda,k)}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\theta_\lambda(M) = k,\ k \in IR$.

Démontrer que $f_\lambda\left(C_{(\lambda,k)}\right) = C_{(-\lambda,k)}$.

b) Représenter sur le même graphique $C_{\left(-\frac{5}{13},\frac{72}{13}\right)}$ et sa transformée par $f_{\frac{5}{13}}$.

c) a étant un réel strictement positif, déterminer suivant les valeurs de λ la nature de $C_{(\lambda,a)}$.

4- A chaque réel λ, on associe la droite (D_λ) d'équation $(1-\lambda)x + ((1+\lambda)y = 0$.

Montrer que : $\forall\ \lambda \in IR$, la droite (D_λ) n'a jamais la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

5- Soit S_λ la symétrie d'axe (D_λ) et de direction $\vec{u}$ qui, à tout point $M\binom{x}{y}$ on associe $M'\binom{x'}{y'}$.

a) Montrer que l'expression analytique de S_λ est : $\begin{cases} x' = \lambda x - (1+\lambda)y \\ y' = (\lambda-1)x - \lambda y \end{cases}$

b) Montrer que $C_{(\lambda,k)}$ est globalement invariant par S_λ.

c) Donner les éléments caractéristiques de f_λ *o* S_λ.

d) On note $S = f_\lambda$ *o* S_λ, montrer que l'écriture complexe associée à S est : $z \mapsto -i\bar{z}$.

B- Soit f l'application du plan dont l'écriture complexe est : $z \mapsto \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$.

1-a) Montrer que f est involutive.

b) Montrer que f *o* S est une rotation dont on donnera les éléments caractéristiques où

S est l'application définie en A5-c.

2- On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' tel que : $z'' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \sqrt{3} - 3i$.

a) Montrer que $g = T\ o\ f$ où T est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{v}$.

b) Déterminer l'écriture complexe associée à $f\ o\ T$; que peut-on dire de $T\ o\ f$ et $f\ o\ T$?

3- $\forall\ n \in IN^* \setminus \{1\}$, on note $g\ o\ g\ o \ldots\ldots\ldots o\ g = g^n$ composée de g n fois.

a) Donner la nature des applications g^{2n} et g^{2n+1} puis caractériser g^{2n}.

b) Mettre sous forme trigonométrique l'affixe z_0 de $g^{2n}(0)$.

- **SUJET 7**

Exercice 1 :

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur IR_+^*. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur IR_+^* par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$.

1- Montrer que F est dérivable sur IR_+^* puis calculer sa fonction dérivée F'.

2-a) Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas.

b) Définir la fonction F pour $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \mapsto cost$.

3-a) Déterminer les signes de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout t de IR_+^*, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée.

c) Démontrer que pour tout x de IR_+^*, $sinx \leq x$.

d) Démontrer que pour tout x de IR_+^*, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$ et que $0 \leq F(x) + 3 \leq 2x^2$.

En déduire la limite de F à droite en 0.

4-a) Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que $\forall x \in IR_+^*$, $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

b) Montrer que $\forall x \in IR_+^*, F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$.

5- Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a) Dresser le tableau de variation de F_1.

b) Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1- Déterminer les affixes des points A_1; A'_1; A_2 et A'_2.

2-a) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

d) Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}.

3-a) Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}A_{n-1}A_n$.

b) Déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \dots\dots.. A_{n-1}A_n$.

c) Calculer la limite de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème :

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et (D') non coplanaires et orthogonales.

Partie A

1-a) Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan ε laisse invariante une droite donnée.

b) Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D').

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2-a) Déterminer l'intersection des plans (P) et (P').

b) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

3- Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite (AB) comme axe de symétrie.

4- Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Partie B

La droite (D) passe par le point A de coordonnées $(0,0,1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. La droite (D') passant par B de coordonnées $(0,0,-1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

1-a) Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point O appartient à (Γ).

b) Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x=t \\ y=t, t\in IR \\ y=1 \end{cases}$$

Soit M un point de coordonnées (x,y,z) et Q un point de (D).

Exprimer MQ^2. Soit la fonction : $t\mapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D).

c) Calculer de même la distance du point M à la droite (D').

d) En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a : $xy+2z=0$.

2- Déduire de cette relation :

a) Que les intersections de (Γ) avec le plan orthogonal à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.

b) La nature des intersections de (Γ) avec les plans orthogonaux à l'axe $(O,\vec{\imath})$ ou à l'axe $(O,\vec{\jmath})$.

Partie C

Soit $(M(t)$ le point de (Γ) d'abscisse $(x(t)$ et d'ordonnées $y(t)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ avec $x(t)=4cost$ et $y(t)=sin2t$.

Lorsque t varie sur IR, le point M décrit une courbe (C) incluse dans (Γ).

1-a) Montrer que la courbe (C_z) projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $z=0$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t)=4cost \\ y(t)=sin2t \end{cases}$$ $(t\in IR)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b) Etudier les positions des points $M(t)$ et $M(\pi-t)$.

c) Construire (C_z). On prendra $2\ cm$ comme unité.

2- On désigne par (C_x) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $x = 0$ et par (C_y) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $y = 0$.

Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.

Une étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.

« ON NE DEVIENT JAMAIS LEADER PAR HASARD »

BON COURAGE !