

# CORRIGE DU SUJET N°1: PREPA BAC 2026

## EXERCICE N°1

- ①- VRAI
- ②- FAUX
- ③- FAUX
- ④- VRAI

## EXERCICE N°2

- ①. D
- ②. C
- ③. C
- ④. D

## EXERCICE N°3

### ①. Calculons $P(i)$

$$P(i) = i^3 - (3 + 2i)(i^2) + (1 + 4i)i + 1 - 2i$$

$$P(i) = -i - (3 + 2i)(-1) + (1 + 4i)i + 1 - 2i$$

$$P(i) = -i + 3 + 2i + (i + 4i^2) + 1 - 2i$$

$$P(i) = -i + 3 + 2i + i - 4 + 1 - 2i$$

$$P(i) = (3 - 4 + 1) + (-i + i + 2i - 2i) ; \text{ donc } P(i) = 0.$$

### ②. Vérifions que: $\forall z \in \mathbb{C}, (z) = [(z - i)(z^2 - (3 + i)z + 2 + i)]$

$$\text{On a: } P(z) = [(z - i)(z^2 - (3 + i)z + 2 + i)]$$

$$P(z) = z^3 - (3 + i)z^2 + (2 + i)z - iz^2 + (3i - 1)z - 2i + 1$$

$$P(z) = z^3 - 3z^2 - iz^2 + 2z + iz - iz^2 + 3iz - z - 2i + 1$$

$$P(z) = z^3 - (3 + i + i)z^2 + (2 - 1 + i + 3i)z + 1 - 2i$$

$$P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i.$$

### ③. Vérifions que $1+i$ est une racine carrée de $2i$

$$\text{On a: } (1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 \text{ donc } (1 + i)^2 = 2i, \text{ alors } 1 + i \text{ est une racine carrée de } 2i.$$

**Autre méthode: Déterminons les racines carrées de  $z = 2i$**

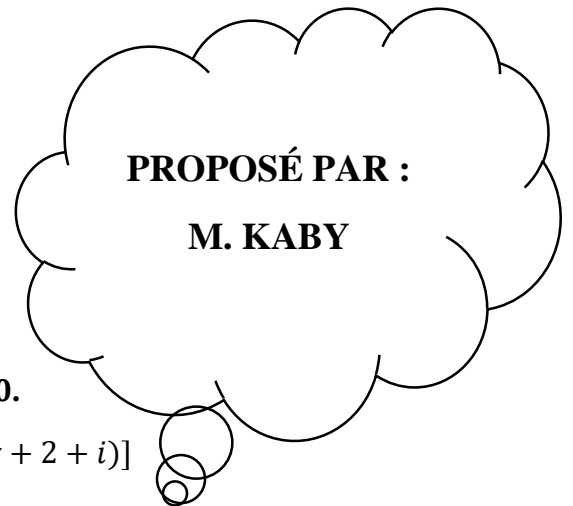
$$|z| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$$

Soit  $z = x + iy$  une racine carrée de  $z$ .

$$z^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = 2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 & (1) + (2) \\ 2y^2 = 2 & (2) - (1) \\ xy = 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Les racines carrées de  $2i$  sont:  $1 + i$  et  $-1 - i$

Donc  $1 + i$  est une racine carrée de  $2i$ .



④. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation:  $P(z) = 0$ .

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - (3 + i)z + 2 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - i) = 0 \text{ ou } (z^2 - (3 + i)z + 2 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - i = 0 \text{ ou } z^2 - (3 + i)z + 2 + i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \quad \text{ou } \Delta = [-(3 + i)]^2 - 4 \times 1 \times (2 + i)$$

$$\Delta = (3 + i)^2 - 4(2 + i)$$

$$\Delta = 9 + 6i - 8 - 4i = 2i$$

D'après la question (3) les racines carrées de  $2i$  sont:  $\delta_1 = 1 + i$

et  $\delta_2 = -1 - i$ .

$$\checkmark \quad z_1 = \frac{3+i+1+i}{2} = \frac{4+2i}{2} = \frac{2(2+i)}{2} = 2 + i.$$

$$\checkmark \quad z_2 = \frac{3+i-1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc  $S_{\mathbb{C}} = \{i; 1; 2 + i\}$

#### EXERCICE N°4

①. a) Démontrons que la suite  $(u_n)$  est croissante.

On a:  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$  puis on admet que:  $0 \leq u_n \leq 1$ .

- Calculons la différence  $u_{n+1} - u_n$  et montrons que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

$$\text{On a: } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n^2}{u_n+2} \text{ et de plus } u_n + 2 \geq 0 \text{ et } 0 \leq u_n \leq 1 \text{ donc } 0 \leq 1 - u_n^2 \leq 1$$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

b) Déduisons que la suite  $(u_n)$  est convergente.

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1 alors la suite  $(u_n)$  est convergente.

②. a) Démontrons que:  $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ .

- Déterminons la dérivée de la fonction  $f$ .

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)' = \frac{(2x+1)'(x+2) - (x+2)'(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

- Démontrons que:  $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ .

$$\forall x \in [0; 1], 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x + 2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq (x+2)^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3 \times \frac{1}{9} \leq 3 \times \frac{1}{(x+2)^2} \leq 3 \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9} \leq \frac{3}{(x+2)^2} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3}{(x+2)^2} \leq \frac{3}{4} \text{ donc } |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

**b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrons que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_n - 1|$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis.

$\forall x \in [0; 1], |f(x) - f(1)| \leq \frac{3}{4} |x - 1|$ . Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$ , posons  $x = u_n$ .

On a:  $|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{3}{4} |x - 1|$  or  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(1) = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 2} = 1$  d'où  $f(1) = 1$

**Donc**  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_n - 1|$ .

**c) Démontrons par récurrence que :**  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

- **Vérifions que la proposition est vraie au rang 0.**

On a:  $|u_0 - 1| = |0 - 1| = |-1| = 1$

D'où  $|u_0 - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq 1$  or  $1 \leq 1$ .

**Donc la proposition est vraie au rang 0.**

- **Soit k un entier naturel tel que  $k \geq 0$ .**

Supposons que la proposition soit vraie au rang k c'est-à-dire  $|u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$  démontrons

que la proposition est vraie au rang  $k + 1$  c'est-à-dire  $|u_{k+1} - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $|u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$ .

On déduit que:  $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_k - 1|$  alors on a:  $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_k - 1| \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k$ .

**D'où**  $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4} |u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$ .

Donc la proposition est vraie au rang  $k + 1$ .

**Conclusion:**  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d) Dédudison la limite de la suite  $(u_n)$

On sait que:  $|u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 1| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

### EXERCICE N°5

①. a) Calculons la limite de  $f$  en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 2x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

b) Calculons la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

②. a) Démontrons que:  $\forall x \in ]0; +\infty[; f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$ .

$$\forall x \in ]0; +\infty[; f'(x) = \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)' = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 2)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^x + 2 - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}; \text{ or } (2e^x - 1)(e^x - 2) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]0; +\infty[; f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}.$$

b) Dédudisons que:  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; \ln 2[$  et  $f$  strictement croissante sur  $]\ln 2; +\infty[$ .

▪ Étudions le signe de la dérivée  $f'(x)$

$\forall x \in ]0; +\infty[, (e^x - 2)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  depend de  $(2e^x - 1)(e^x - 2)$ .

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2e^x - 1)(e^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2e^x - 1) = 0 \text{ ou } (e^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \text{ ou } e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln \frac{1}{2} \text{ ou } \ln e^x = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 2 \text{ or } -\ln 2 \notin ]0; +\infty[$$

▪ Tableau de signe

$x$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

- $\forall x \in ]0 ; \ln 2[ , f'(x) < 0$
- $\forall x \in ]\ln 2 ; +\infty[ , f'(x) > 0$

▪ **Sens de variation**

- $f'$  est strictement décroissante sur  $]0 ; \ln 2[$
- $f$  Strictement croissante]  $\ln 2 ; +\infty[$ .

c) **Dresse le tableau de variation**

$x$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\ln 2)$	$+\infty$

③. a) **Justifion que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).**

Étudions le signe de  $f(x) - (2x - 1)$ .

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[ , [f(x) - (2x - 1)] = 2x - 1 + \frac{1}{e^{x-1}} - (2x - 1) = \frac{1}{e^{x-2}}$$

$\forall x \in ]0 ; +\infty[ , \frac{1}{e^{x-2}} > 0$ , donc  $f(x) - (2x - 1) > 0$  alors  $f(x) > (2x - 1)$ .

**Par consequent la courbe (C) est au-dessus de (D).**

b) vérifions que:  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^{x-1}}$

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^{x-1}} = \frac{(2x-2)(e^x-1)+e^x}{e^{x-1}} = \frac{2xe^x-2x-2e^x+2+e^x}{e^{x-1}} = \frac{(2x+1)e^x-2x+2}{e^{x-1}}$$

$$\text{Or } 2x - 1 + \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{(2x-1)(e^x-1)+1}{e^{x-1}} = \frac{2xe^x-2x-e^x+1+1}{e^{x-1}} = \frac{(2x+1)e^x-2x+2}{e^{x-1}}$$

Donc  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^{x-1}}$ .

c) **Démontrons que:  $A(k) = 4[\ln 2 + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)] cm^2$**

$$\begin{aligned} A(k) &= \int_{\ln 2}^{\ln k} [f(x) - (2x - 1)] dx \times ua \text{ or } ua = OI \times OJ = 2cm \times 2cm = 4cm^2 \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln k} \left[ 2x - 2 + \frac{e^x}{e^{x-1}} - (2x - 1) \right] dx \times 4 cm^2 \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln k} \left[ 2x - 2 + \frac{e^x}{e^{x-1}} - 2x + 1 \right] dx \times 4 cm^2 \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln k} \left[ -1 + \frac{e^x}{e^{x-1}} \right] dx \times 4 cm^2 = [-x + \ln(e^x - 1)]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4cm^2 \end{aligned}$$

$$A(k) = 4[\ln 2 + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)] \text{ cm}^2$$

d) Calculons  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$ .

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = 4[\ln 2 + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)]$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = 4\ln 2 \text{ car } \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = 0.$$

### EXERCICE N°6

Pour apporter une réponse à la préoccupation des organisateurs cette lotterie, je vais utiliser la notion de probabilité conditionnelle et variable aléatoire.

Pour cela, je vais:

- Utiliser une variable aléatoire et donner ses valeurs;
- Calculer son espérance mathématique en fonction de sa mise;
- Poser que cette espérance mathématique est inférieure ou égale à zéro puis résoudre l'inéquation.

❖ Déterminons les valeurs prises par X.

Soit S la valeur de la mise.

X est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Les valeurs prises par X sont :  $-S$  ;  $500 - S$  et  $S$ .

❖ Calculons l'espérance mathématique E(X).

- **Loi de probabilité de X**

- **Déterminez la probabilité de chaque événement.**

Déterminons le nombre de tirage possible

Le tirage se fait de façon simultanée, un tel tirage est une combinaison de 2 boules parmi 6.

Le nombre de tirage possible est:  $C_6^2 = 15$  possibilités.

#### **Déterminons la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes**

Soit A "tirer deux boules de couleurs différentes"

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{2 \times 3 + 2 + 1 + 3 \times 1}{15} = \frac{11}{15}$$

#### **Déterminons la probabilité d'obtenir deux boules noires**

Soit B "tirer deux boules noires"

$$P(B) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}.$$

Déterminons la probabilité d'obtenir deux boules noires

Soit B "tirer deux boules blanches"

$$P(B) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

- **Loi de probabilité de X**

$x_i$	$-S$	$500 - S$	$S$
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

- Calculons l'espérance mathématique.

$$E(X) = -S \times \frac{11}{15} + (500 - S) \times \frac{3}{15} + S \times \frac{1}{15}$$

$$E(X) = \frac{-11S}{15} + \frac{3(500-S)}{15} + \frac{S}{15} = \frac{-11S+1500-3S+S}{15}$$

$$E(X) = \frac{1500-13S}{15}$$

- ❖ **Déterminons le montant minimal**

$$E(X) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1500-13S}{15} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1500 - 13S \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -13S \leq -1500$$

$$\Leftrightarrow -S \leq -\frac{1500}{13}$$

$$\Leftrightarrow -S \leq -115,38$$

$$\Leftrightarrow S \geq 115,38 \text{ donc } S \approx 116 \text{ francs CFA}$$

**Conclusion:** Le montant minimal à fixer comme mise pour que les organisateurs ne perdent pas ce jeu est de 116 francs CFA.

# CORRIGE DU SUJET N°2: PREPA BAC 2026

## EXERCICE N°1

- ①- VRAI
- ②- VRAI
- ③- FAUX
- ④- VRAI

## EXERCICE N°2

- ①. b
- ②. c
- ③. c
- ④. a

## EXERCICE N°3

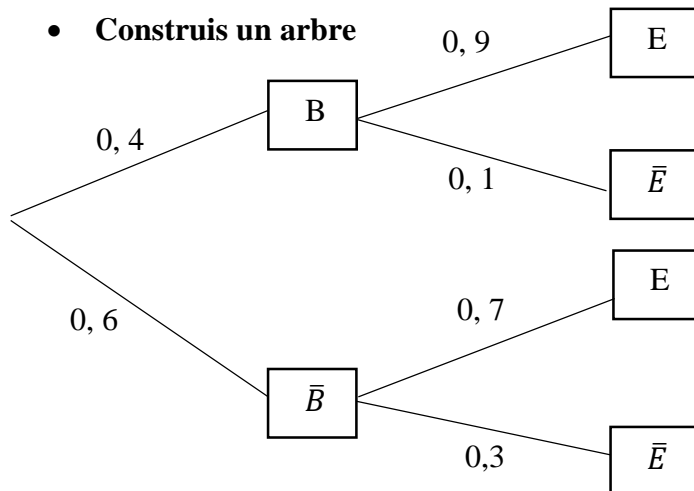
- Choix des évènements

On considère les évènements suivants:

**B** : « l'élève choisi est un bachelier »

**E** : « l'élève choisi ait obtenu un emploi »

- Construis un arbre



- ①. **Démontrons que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78.**

$$P(E) = P(B \cap E) + P(\bar{B} \cap E) = P(B) \times P_B(E) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(E)$$

$$P(E) = 0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,7 = 0,78 \text{ donc } P(E) = \mathbf{0,78}.$$

- ②. a) **Calculons l'espérance mathématique E(X) de X.**

On sait que X suit une loi binomiale de parameter  $n = 5$  et  $P = 0,78$

$$\text{Donc } E(X) = np = 5 \times 0,78 = 3,9 \text{ donc } \mathbf{E(X) = 3,9}.$$

- Interprétation du résultat:

Lorsqu'on effectue plusieurs choix de cinq (05) élèves de ce centre de formation professionnelle, en moyenne presque quatre (04) élèves aient un emploi.

b) Calculons la probabilité qu'au moins 3 élèves aient obtenu un emploi.

### Loi de probabilité de X.

$$P(X = 0) = C_5^0 (0,78)^0 (1 - 0,78)^5 = 0,0005 \quad ; \quad P(X = 1) = C_5^1 (0,78)^1 (1 - 0,78)^4 = 0,0091$$

$$P(X = 2) = C_5^2 (0,78)^2 (1 - 0,78)^3 = 0,0648 \quad ; \quad P(X = 3) = C_5^3 (0,78)^3 (1 - 0,78)^2 = 0,2297$$

$$P(X = 4) = C_5^4 (0,78)^4 (1 - 0,78)^1 = 0,4072 \quad ; \quad P(X = 5) = C_5^5 (0,78)^5 (1 - 0,78)^0 = 0,2287$$

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,0005	0,0091	0,0648	0,2297	0,4072	0,2287

- **Calculons  $P(X \geq 3)$**

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 3) = 0,2297 + 0,4072 + 0,2287$$

$$P(X \geq 3) = \mathbf{0,9256.}$$

### EXERCICE N°4

①. Démontrons que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $h(x) = 2x + 3$  est une solution de (E).

$h(x) = 2x + 3$  est solution de (E) si et seulement si  $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$ .

On a:  $h(x) = 2x + 3$  donc  $h'(x) = (2x + 3)' = 2$

D'où  $h'(x) - 2h(x) = 2 - 2(2x + 3) = 2 - 4x - 6 = -4x - 4$ .

Alors  $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$ . **Donc  $h(x) = 2x + 3$  est solution de (E).**

②. **Déterminons les solutions sur  $\mathbb{R}$  de (E').**

(E') est de la forme  $y' - ay = 0$  avec  $a = -2$ .

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de (E') sont les fonctions:  $x \rightarrow ke^{2x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

③. a) Démontrons que  $g$  est solution de (E) si et seulement si  $g - h$  est une solution de (E').

**La fonction  $g - h$  est solution de (E')  $\Leftrightarrow (g - h)'(x) - 2(g - h)(x) = 0$**

$$\Leftrightarrow g'(x) - h'(x) - 2g(x) + 2h(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = h'(x) - 2h(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = -4x - 4 \text{ car } h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$$

Ainsi, la fonction  $g - h$  est une solution de (E')  $\Leftrightarrow g$  est une solution de (E).

b) D'après les questions précédentes  $g$  est solution de (E) si et seulement si la fonction  $g - h$  est solution de (E). Or les solutions de (E') sont les fonctions  $x \rightarrow ke^{2x}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Donc  $g(x) - h(x) = ke^{2x}$ ;  $k \in \mathbb{R}$ . D'où  $g(x) = ke^{2x} + h(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de (E) sont les fonctions  $g(x) = ke^{2x} + 2x + 3$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

c) Justifions que la fonction  $f$  cherchée est définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$ .

Posons  $g(x) = f(x)$

On sait que:  $f(x) = ke^{2x} + 2x + 3$ . En utilisant la condition initiale  $f(0) = 1$ , trouvons la constante  $k$ . on a  $f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{2 \times 0} + 2 \times 0 + 3 = 1$

$$\Leftrightarrow k + 3 = 1 \text{ donc } k = -2.$$

Ainsi, la fonction  $f$  cherchée est de la forme:  $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$ .

④. a) Justifions que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

Déterminons la dérivée  $f'(x)$

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[, f'(x) = (-2e^{2x} + 2x + 3)' = -4e^{2x} + 2.$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]0 ; +\infty[, f'(x) = -4e^{2x} + 2.$$

Etudions le signe de  $f'(x)$

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[, -4e^{2x} + 2 < 0, \text{ donc } \forall x \in ]0 ; +\infty[, f'(x) < 0.$$

Sens de variation

$f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

b) Démontrons que l'équation  $x \in [0 ; +\infty[, f(x) = -1$ , admet une solution unique

$\alpha$  telle que:  $0,4 < \alpha < 0,5$

$f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

De plus  $f([0 ; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(0)] = ]-\infty ; 1]$  Or  $-1 \in ]-\infty ; 1]$ , donc l'équation  $f(x) = -1$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[0 ; +\infty[$ .

Vérifions que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

Calculons  $f(0,4)$  et  $f(0,5)$

$$f(0,4) = -2e^{2 \times 0,4} + 2 \times 0,4 + 3 = -0,65 ; \quad f(0,5) = -2e^{2 \times 0,5} + 2 \times 0,5 + 3 = -1,44$$

Par conséquent:  $-1 \in ]-1,44 ; -0,65[$  donc  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

### EXERCICE N°5

①. Démontrons que:  $\forall x \in ]1 ; +\infty[, 1 + x + \ln x > 0$ .

On remarque que:  $\forall x > 1, 1 + x > 0$  et  $\ln x > 0$ . Donc  $\forall x \in ]1 ; +\infty[, 1 + x + \ln x > 0$ .

②. a) Calculons la limite de  $h$  à droite en 1, puis interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+\frac{1}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty. \quad \text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$$

Interprétation graphique: La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à (C).

b) Démontrons que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) de  $h$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln x} = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0. \text{ Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

③. a) Démontrons que:  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x \ln x)^2}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ]1; +\infty[, h'(x) &= \left(\frac{x+1}{x \ln x}\right)' = \frac{(x+1)'x \ln x - (x \ln x)'(x+1)}{(x \ln x)^2} = \frac{x \ln x - [(x)' \ln x + (\ln x)'(x)](x+1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{x \ln x - [(\ln x + 1)(x+1)]}{(x \ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x \ln x + \ln x + x + 1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{x \ln x - x \ln x - \ln x - x - 1}{(x \ln x)^2} = \frac{-1 - x - \ln x}{(x \ln x)^2} = -\frac{1+x+\ln x}{(x \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]1; +\infty[, h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x \ln x)^2}.$$

b) Justifions que:  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $h'(x) < 0$ .

$$\forall x \in ]1; +\infty[, (x \ln x)^2 > 0 \text{ et } -(1+x+\ln x) < 0 \text{ donc } \forall x \in ]1; +\infty[, h'(x) < 0.$$

④. Démontrons que  $h$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans un intervalle  $K$  à préciser.

$h$  est continue et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ , donc  $h$  est une bijection de

$$]1; +\infty[ \text{ sur } K, \text{ avec } K = h(]1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \right[ = ]0; +\infty[.$$

Car d'après la question ②. b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  et ②. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$ .

⑤. Démontrons que (C) est au-dessus de ( $\gamma$ ) sur  $]1; +\infty[$ .

Étudions le signe de  $h(x) - g(x)$ .

- $h(x) - g(x) = \frac{x+1}{x \ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x+1}{x \ln x} - \frac{x}{x \ln x} = \frac{x+1-x}{x \ln x} = \frac{1}{x \ln x}$  donc  $h(x) - g(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .
- Signe de  $h(x) - g(x)$ .

$$\forall x \in ]1; +\infty[, \frac{1}{x \ln x} > 0, \text{ donc } h(x) - g(x) > 0 \Rightarrow h(x) > g(x).$$

Par conséquent: (C) est au-dessus de ( $\gamma$ ) sur  $]1; +\infty[$ .

⑥. a) Justifions que:  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln 2$ .

$$\text{On a: } \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\text{On pose } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{t}, \text{ ainsi } \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = \ln|t| = [\ln(\ln t)]_e^{e^2}$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = [\ln(\ln e^2) - \ln(\ln e)] = \ln(2 \ln e) - \ln(\ln e)$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2, \text{ Donc } \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln 2.$$

**b) Déterminons l'aire A en cm<sup>2</sup>**

$$A = \int_e^{e^2} [h(x) - g(x)] dx \times ua = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \times ua \text{ avec } u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2$$

$$A = 4 \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \text{ cm}^2$$

$$\text{Soit } = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx, \text{ d'après la question } \textcircled{6}. \text{ a) } I = \ln 2$$

$$A = 4Icm^2 = (4 \times \ln 2)cm^2. \text{ Donc } A = 4 \ln 2cm^2$$

### **EXERCICE N°6**

Pour répondre à la préoccupation du responsable, nous allons utiliser la notion **de suites** numériques particulièrement résoudre une inéquation en utilisant la fonction logarithme ln et l'une de ses propriétés algébrique.

Pour cela, je vais:

- **Déterminons la valeur minimum de n telle que  $V_n \leq 15\,000\,000$ , c'est-à-dire  $60\,000\,000 \times (0,85)^n \leq 15\,000\,000$**
- Déterminer l'année de remplacement du véhicule.
- Conclure

❖ **Résolvons l'inéquation  $V_n \leq 15\,000\,000$**

$$v_n \leq 15\,000\,000 \Leftrightarrow 60\,000\,000 \times (0,85)^n \leq 15\,000\,000$$

$$\Leftrightarrow (0,85)^n \leq \frac{15\,000\,000}{60\,000\,000}$$

$$\Leftrightarrow (0,85)^n \leq 0,25$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,85)^n \leq \ln(0,25)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,85) \leq \ln(0,25)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,85)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8,53 \text{ donc } n = 9.$$

❖ **Déterminons l'année de remplacement du véhicule.**

Le remplacement du véhicule se fait à la 9<sup>ème</sup> année après 2023.

On a: l'an 2023 +9 = 2032

❖ **Conclusion:** L'année à laquelle le véhicule doit être remplacer est 2032.

# CORRIGE DU SUJET N°3: PREPA BAC 2026

## EXERCICE N°1

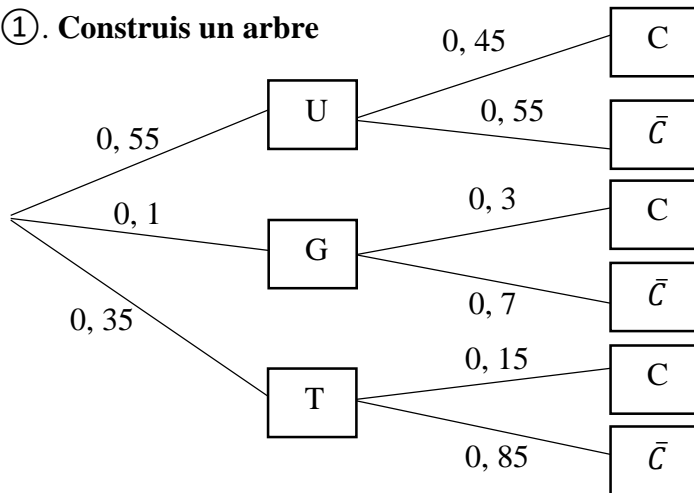
- ① - Faux
- ② - Vrai
- ③ - Faux
- ④ - Faux

## EXERCICE N°2

- ①. A
- ②. B
- ③. B
- ④. C

## EXERCICE N°3

①. Construis un arbre



②. Calculons  $P(U \cap C)$

$$P(U \cap C) = P(U) \times P_U(C)$$

$$P(U \cap C) = 0,5 \times 0,45 \text{ donc } P(U \cap C) = 0,2475$$

③. Justifions que  $P(C)$  est 0,33

$$P(C) = P(U \cap C) + P(G \cap C) + P(T \cap C)$$

$$P(C) = P(U) \times P_U(C) + P(G) \times P_G(C) + P(T) \times P_T(C)$$

$$P(C) = 0,55 \times 0,45 + 0,1 \times 0,3 + 0,35 \times 0,15 \text{ donc } P(C) = 0,33$$

④. Calculons  $P_C(U)$

$$P_C(U) = \frac{P(U \cap C)}{P(C)}$$

$$P_C(U) = \frac{0,2475}{0,33} \text{ donc } P_C(U) = 0,7$$

## EXERCICE N°4

①. a) Justifions que:  $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - (1+i)}{1 - (1+i)}$$

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - 1 - i}{1 - 1 - i} = \frac{(\frac{3}{2} - 1) + (\frac{1}{2} - 1)i}{-i} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{-i}$$

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)i}{-(i^2)} \text{ donc } \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Calculons le module  $r$  de  $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}$

$$\left| \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ donc } \left| \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculons son angle  $\theta$ .

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

En déduisons la forme trigonométrique et exponentielle.

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ par conséquent } \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

b) Déduis de 1. a) que  $S$  a pour rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et pour angle  $\frac{\pi}{4}$ .

On a:  $S(\Omega) = \Omega$  et  $S(A) = B$ , alors  $S$  est la similitude de centre  $\Omega$ , de rapport  $k = \frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et d'angle  $\theta = \left( \widehat{\Omega A}; \widehat{\Omega B} \right) = \frac{\pi}{4}$ . Donc  $S$  a pour rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

c) Démontrons que  $S$  a pour écriture complexe  $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$ .

L'écriture complexe de  $S$  est de la forme  $z' = az + b$ .

$$S(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow az_\Omega + b = z_\Omega \quad (1)$$

$$S(A) = B \Leftrightarrow az_A + b = z_B \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow a(z_\Omega - z_A) = (z_\Omega - z_B) \Rightarrow a = \frac{z_\Omega - z_B}{z_\Omega - z_A} = \frac{1+i - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{1+i-1} = \frac{1+i - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$(2) \Rightarrow az_A + b = z_B \Leftrightarrow b = z_B - az_A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 1$$

Donc  $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$ .

②. a) Justions que l'affixe du point  $K$ , image du point  $J$  par la similitude directe  $S$  est:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_K = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_J + 1$  or l'affixe du point  $J$  est:  $i$ .

$$z_K = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)i + 1 = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ donc } z_K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) Démontrons que les points  $O$ ,  $K$  et  $\Omega$  sont alignés.

$$\frac{z_\Omega - z_O}{z_K - z_O} = \frac{1+i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{1+i}{\frac{1}{2}(1+i)} = \frac{1+i}{\frac{1}{2}(1+i)} = 2 \text{ d'où } 2 \in \mathbb{R}. \text{ Donc les points } O, K \text{ et } \Omega \text{ sont alignés.}$$

## EXERCICE N°5

①. a) Détermine la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

b) Justifie que  $\forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

$$\forall x \in [0; +\infty[$$
,  $f'(x) = (x e^{-x})'$

$$f'(x) = x'(e^{-x}) + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Donc,  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

c) Démontre que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

Etudions le signe de  $f'(x)$

$\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^{-x} > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  dépend de  $1-x$ .

$x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0$  donc  $x = 1$ .

**Tableau de signe**

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

$\forall x \in ]0; 1[$ ,  $f'(x) > 0$

$\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$

**Sens de variation**

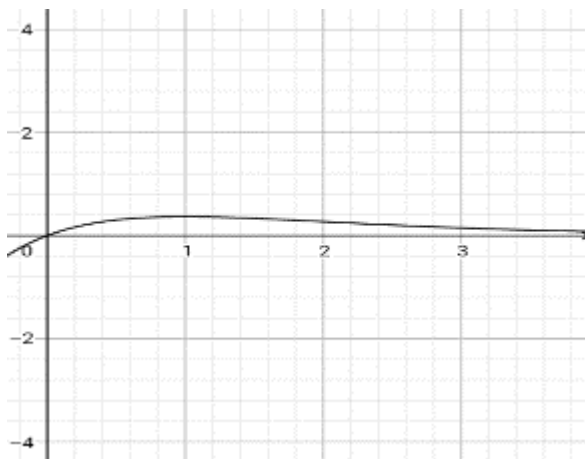
$f$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

d) Dresse le tableau de variation

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$f(1) = e^{-1} \text{ donc } f(1) = \frac{1}{e}$$

e) Construis (C) dans le repère (O, I, J).



②. Démontre que l'équation  $f(x) = \frac{1}{4}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $]0; 1[$  donc elle réalise une bijection de  $]0; 1[$  de

$f(]0; 1[) = ]0; \frac{1}{e}[$  or  $\frac{1}{4} \in ]0; \frac{1}{e}[$  donc l'équation  $f(x) = \frac{1}{4}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ .

③. a) **Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .**

Vérifions que  $u_0$  est vraie au rang 0.

On a  $u_0 = \alpha$  et  $\alpha > 0$  ainsi  $u_0 > 0$  donc la proposition est vraie.

Soit  $k$  un entier naturel tel que  $k \geq 0$ .

Supposons que  $u_k$  est vraie et montrons que  $u_{k+1}$  est vraie.

On a:  $u_{k+1} = u_k e^{-u_k}$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $u_k > 0$ , donc  $u_k e^{-u_k} > 0$  'est-à-dire  $u_{k+1} > 0$ .

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

b) Démontre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ . Calculons  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n e^{-u_n}}{u_n} = e^{-u_n}$  or  $e^{-u_n} < 1$  d'où  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ . Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c) Justifie que la suite  $(u_n)$  est convergente.

D'après les questions 3.a) et 3. b) la suite  $(u_n)$  est minorée et décroissante, par conséquent la suite  $(u_n)$  est convergente.

d) Détermine la limite de la suite  $(u_n)$ .

On a:  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = x e^{-x}$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[0 ; 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0 ; 1]$ , donc la limite de la suite  $(u_n)$  est solution de l'équation,  $x \in [0 ; 1], f(x) = x$ .

Réolvons l'équation:  $f(x) = x$ .

$$x e^{-x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(1) \text{ donc } = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

### EXERCICE N°6

Pour répondre à la préoccupation du gérant de la coopérative, je vais utiliser la leçon sur la dérivabilité et l'étude de fonction.

Pour cela, je:

- Définis la fonction donnant le bénéfice B.
- Calcule la dérivée de la fonction;
- Détermine le signe de la dérivée;
- Dresse le tableau de variation;
- Détermine l'abscisse du point où la fonction atteint son maximum;
- Conclure.
- Fonction donnant le bénéfice B.

$$B(x) = R(t) - C(t)$$

$$B(x) = 150t - (t^3 - 42t + 800)$$

$$B(x) = 150t - t^3 + 42t - 800$$

$$B(x) = -t^3 + 192t - 800$$

