

Pour vos critiques, suggestions et commandes Composez : +26134931440 (WhatsApp) ou [trefindrazaradinabola@gmail.com](mailto:trefindrazaradinabola@gmail.com) Aucune œuvre humaine n'est parfaite !

DOCUMENTS TC ET TS 2026

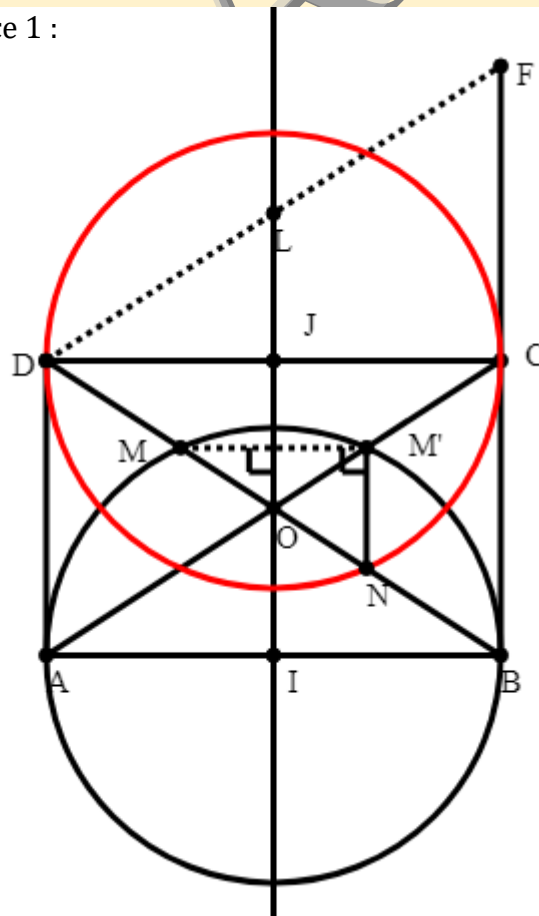
**Exercice 1 :**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle  $ABCD$  de centre  $O$ .

Soient  $I, J$  et  $F$  les points définis par :  $I = A * B$  ;  $J = D * C$  et  $C = B * F$

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $S$  qui envoie  $A$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ .  
b) Caractériser  $S$
- 2) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie  $f$  vérifiant  $f(A) = C$ ,  $f(I) = J$  et  $f(D) = F$   
b) Montrer que  $f$  est antidéplacement  
c) Déterminer  $f(B)$   
d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$
- 3) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$  et  $\mathcal{C}'$  le cercle de diamètre  $[CD]$   
( $BD$ ) recoupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $M$  et recoupe le cercle  $\mathcal{C}'$  en  $N$  ; on pose  $M' = S_{(IJ)}(M)$   
a) Montrer que  $N = S(M)$   
b) Déduire que les droites  $(M'N)$  et  $(BC)$  sont parallèles.
- 4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $g = f \circ S_{(AD)}$ .

Solution de l'exercice 1 :



“ Faites bien l'école et l'école vous fera du bien ”

WhatsApp : +261349321440

1) a) Existence et unicité de  $S$  : On a  $A \neq I$ , donc il existe un unique déplacement  $S$  tel que  $S(A) = C$  et  $S(I) = J$  si et seulement si  $AI = CJ$ . Dans le rectangle  $ABCD$ ,  $I = A * B \Rightarrow AI =$

$$= \frac{1}{2}AB. J = D * C \Rightarrow CJ = \frac{1}{2}CD. \text{ Comme } AB = CD, \text{ on a } AI = CJ.$$

Donc  $S$  existe et est unique.

2) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie  $f$  vérifiant  $f(A) = C, f(I) = J$  et  $f(D) = F$

$f$  est l'unique isométrie définie par les images de trois points non alignés

$(A, I, D)$ . Les distances sont conservées ( $AI = CJ, AD = BC = CF, ID = JF$ ).

b) Montrer que  $f$  est antidéplacement

L'angle  $(\vec{AI}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$  alors que  $(\vec{f(I)f(A)}, \vec{f(I)f(D)}) = (\vec{CJ}, \vec{CF}) = -\frac{\pi}{2}$ .  $f$  change l'orientation, c'est un antidéplacement.

c) Déterminer  $f(B)$

$f(I) = f(A * B)$  ainsi  $f(I) = f(A) * f(B)$  (car la symétrie glissante conserve le milieu),  $J = C * f(B)$

Comme  $J = C * D$ , on en déduit  $f(B) = D$

d) Dédire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

$$f(B) = D, f(D) = F$$

$f \circ f(B) = F \neq B$ , ainsi  $f$  n'est pas une symétrie orthogonale, d'où  $f$  est une symétrie glissée de vecteur  $\frac{1}{2}\vec{BF}$  et d'axe passant par les milieux du segment  $[AC]$  et  $[DF]$ .

$f$  est une symétrie glissée  $f = t_{\vec{IJ}} \circ S_{(OI)}$ .

3) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$  et  $\mathcal{C}'$  le cercle de diamètre  $[CD]$

$(BD)$  recoupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $M$  et recoupe le cercle  $\mathcal{C}'$  en  $N$ ; on pose  $M' =$

$$S_{(IJ)}(M)$$

a) Montrons que  $N = S(M)$ :  $S(C)$  est le cercle de diamètre  $[S(A)S(B)] = [CD]$ , donc

$$S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$$

$S$  transforme la droite  $(BD)$  en elle-même.  $M \in \mathcal{C} \cap (BD) \Rightarrow S(M) \in \mathcal{C}' \cap (BD)$ .

Donc  $S(M) = N$ .

b) Dédire que les droites  $(M'N)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

$MM'N$  est un triangle inscrit dans un cercle de centre  $O$ ,  $MM'N$  est un triangle rectangle

en  $M'$ ,  $(MM') \perp (M'N)$

On a  $[MM']$  et  $[DC]$  ont la même médiatrice.  $(MM')$  et  $(DC)$

$(DC) \perp (M'N)$

Or  $(DC) \perp (BC)$

D'où  $(M'N)$  et  $(BC)$  sont parallèles

4) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de  $g = f \circ S_{(AD)}$ .

1ère méthode :  $g$  est un déplacement car  $g$  est composé des deux antidéplacements.

$g(A) = C$ ,  $f(I) = J$  et  $g(D) = F$  or  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CF}) = 0$ , d'où  $g$  est une translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$

2ème méthode :  $g = f \circ S_{(AD)}$

$$g = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)} ; S_{(OI)} \circ S_{(AD)} = t_{\vec{u}} \text{ avec } (OI) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}((AD))$$

$$g = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ t_{2\overrightarrow{AI}}$$

$$g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$$

$$g = t_{\overrightarrow{AB+BC}}$$

$$g = t_{\overrightarrow{AC}}$$

## Exercice 2 :

### EXERCICE 1

On donne un carré ABCD de centre O tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . On note I, J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AD]. On désigne par  $f$  la symétrie glissante de vecteur  $\overrightarrow{OC}$  et qui envoie A en B.

1. a. Montrer que (IJ) est la médiatrice de [OB]. Dédurre l'axe de  $f$ .

b. Déterminer  $f(B)$  puis montrer que  $f(I) = J$ .

2. On considère l'isométrie  $g = S_{(OI)} \circ f$ .

a. Déterminer les images de A et I par  $g$ .

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $g$ .

3. On pose  $h = S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$  et  $\phi = S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ .

a. Montrer que  $h$  est une translation dont on précisera le vecteur.

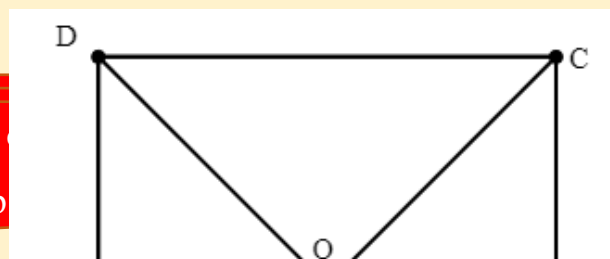
b. Montrer que  $\phi$  est une symétrie glissante. Donner sa forme réduite

CORRIGER

### EXERCICE 1

On donne un carré ABCD de centre O tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . On note I, J et K les milieux respectifs de

[AB], [BC] et [AD].



On désigne par  $f$  la symétrie glissante de vecteur  $OC$  et qui envoie  $A$  en  $B$ .

1. a. Montrons que  $(I J)$  est la médiatrice de  $[OB]$ .

$ABC$  est un triangle,  $I, J$  les milieux respectifs de  $[AB], [BC]$ , ainsi d'après la propriété directe de droites de milieux,  $(I J) // (AC)$  or  $(OB) \perp (AC)$ .

$BOC$  est un triangle,  $J$  est milieu  $[BC], (I J) // (AC)$

Alors d'après la propriété réciproque de droites de milieux  $(I J)$  coupe  $[OB]$  en leur milieu.

Donc  $(I J)$  est la médiatrice de  $[OB]$ .

Déduction l'axe de  $f$ .

l'axe de  $f$  est parallèle à  $(OC)$  et passe par  $I=A*B$

d'où l'axe est  $(I J)$

b. Déterminons  $f(B)$  puis montrons que  $f(I) = J$ .

$$f(B) = C$$

montrons que  $f(I) = J$

$I=A*B$  alors  $f(I) = f(A) * f(B)$  ( car la symétrie glissante conserve le milieu)

ainsi  $f(I) = B*C$  or  $J$  est milieu  $[BC]$  D'où  $f(I) = J$

**2. On considère l'isométrie  $g = S_{(O I)}$  of .**

**a. Déterminer les images de  $A$  et  $I$  par  $g$  .**

$$g(A) = A \text{ et } g(I) = K$$

**b. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de  $g$  .**

la nature  $g$  est une déplacement et  $\begin{cases} g(A) = A \\ AI = AK \end{cases}$

d'où  $g$  est une rotation

Les éléments caractéristiques de  $g$  :  $g$  est une rotation de centre  $A$  et d'angle  $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{2}$

3. On pose  $h = S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$  et  $\phi = S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ .

a. Montrons que  $h$  est une translation dont on précisera le vecteur.

$$h = r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; -\pi)}$$

D'où  $h$  est une translation

$h$  est une translation de vecteur  $2\overrightarrow{AD}$

b. Montrons que  $\phi$  est une symétrie glissante. Donnons sa forme réduite

$\phi$  est un antidéplacement car  $\phi$  est la composée d'un nombre impaire d'antidéplacement

donc  $\phi$  est soit une symétrie axiale soit une glissante.

Il suffit de montrer qu'elle n'est pas une symétrie axiale d'axe  $(\Delta)$  ;

$$S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)} = S_{(\Delta)}$$

On remarque que  $B$  appartient aux deux axes  $(BC)$  et  $(AB)$

D'où l'idée d'utiliser  $S_{(\Delta)}(B)$

$$S_{(\Delta)}(B) = S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}(B)$$

On pose  $S_{(\Delta)}(B) = D$ ,  $(\Delta) = \text{méd}[BD]$

Par conséquent  $(\Delta) = (AC)$  et ceci entraîne  $S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)}$  donc  $S_{(BC)} \circ S_{(AB)} = I_{dp}$  or  $(BC) \perp (AB)$  en  $B$  donc  $S_{(BC)} \circ S_{(AB)} = S_B$  où  $S_B$  est la symétrie centrale de centre  $B$ .

$$S_B \neq I_{dp}$$

Donc la supposition nous a mené à un résultat absurde, la supposition  $S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)} = S_{(\Delta)}$  est fautive

Donc  $\phi$  n'est pas une symétrie axiale

Donc  $\phi$  est une symétrie glissante.

$$\phi = S_{(AC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$$

$\phi = S_{(AC)} \circ S_B$  où  $S_B$  est la symétrie centrale de centre  $B$ . car  $(BC) \perp (AB)$  en  $B$

$\phi = S_{(AC)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D')}$  ou  $(D) \perp (D')$  et  $\{B\} = (D) \cap (D')$

il faut choisir  $(D) // (AC)$  et passant par  $B$ , ainsi  $\{B\} = (D) \cap (D')$  et  $((D); (D')) = -\frac{\pi}{2}$ .

Ainsi  $(D') = (DB)$

$$\phi = S_{(AC)} \circ S_{(D)} \circ S_{(DB)} \text{ on a } (AC) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}}(D)$$

D'où sa forme réduite  $\phi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(DB)}$

**Exercice 3 :**

Dans le plan orienté, on considère un carré direct  $ABCD$  de centre  $O$  et  $E$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $A$ . On pose  $I$  le milieu du segment  $[ED]$

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  tel que  $f(A) = C$  et  $f(E) = D$   
b) Caractériser  $f$
- 2) Soit  $g$  l'isométrie définie par :  $g = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right) \circ S_{(BD)}$ 
  - a) Montrer que  $g$  est une symétrie glissante.
  - b) Déterminer  $g(C)$  et  $g(D)$
- 3) a) Montrer que pour tout  $M$  du plan les points  $g(M)$  et  $f^{-1}(M)$  sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.
  - b) Vérifier que  $g \circ t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(AE)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$
  - c) Dédire alors la forme réduite de  $g$
  - d) Caractériser  $g \circ S_{(BC)}$

**PROBLEME 1 ( 7 points )**

Dans un plan orienté  $P$ , soit  $ABCD$  un carré direct, de centre  $J$ .

**Partie A.**

I - On désigne par  $r$  : la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

$t$  : la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

$h$  : l'homothétie de centre  $C$ , de rapport  $\sqrt{3}$ .

1 - a) Montrer que  $r' = t \circ r$  est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer les images des points  $A$  et  $B$  par  $r'$ .

c) En déduire le centre de  $r'$ .

2 - On note  $f = r' \circ h$ .

a) Montrer que  $f$  est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.

b) Soit  $I$  le centre de  $f$ . Après avoir déterminé l'image de  $C$  par  $f$ , prouver que

$$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } ID = \sqrt{3} \cdot IC.$$

c) En considérant le triangle  $(ICD)$ , donner une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$  et placer  $I$  sur la figure.

d) Déterminer et construire l'ensemble :  $(E) = \{M \in P / MD^2 - 3MC^2 = 0\}$

II - On note  $K$  le milieu de  $[CD]$ . On choisit comme repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

1. Quelles sont les affixes de  $A, C, J, K$  ?

2. On note  $S$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $J$  et  $C$  en  $K$ .

a) Ecrire l'expression complexe de  $S$ .

b) Donner ses éléments géométriques.

**Partie B.**

$E, F, G$  sont trois points non alignés au plan  $P$ ,  $\theta$  un réel donné non nul.

On note :  $R_F$  : la rotation de centre  $F$  et d'angle  $\theta$ .

$R_E$  : la rotation de centre  $E$  et d'angle  $\theta$ .

On note  $H = R_F(E)$ ,  $P = R_F(G)$  et  $Q = R_E(G)$ .

1. Quelle est la nature de  $R_E \circ R_F^{-1}$  ?
2. En déduire que  $EHPQ$  est un parallélogramme.

### PROBLEME 2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle  $OAB$ , rectangle et isocèle en  $O$ .

On note  $R_A$  et  $R_B$  les rotations de centres respectifs  $A$  et  $B$ , de même angle  $\frac{\pi}{2}$ .

$S_O$  : est la symétrie de centre  $O$ . On place un point  $C$  non situé sur la droite  $(AB)$ .

On trace les carrés directs  $BEDC$  et  $ACFG$ .

#### Méthode géométrique :

1° Déterminer  $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ , composée des réflexions d'axes  $(AO)$  et  $(AB)$ .

2° Décomposer  $R_B$  en deux réflexions, puis déduire la nature de  $R_A \circ R_B$ .

3° Déterminer l'image de  $E$  par  $R_A \circ R_B$ . En déduire que  $O$  est le milieu du segment  $[EG]$ .

4° On note  $R_F$  et  $R_D$  les rotations de centres respectifs  $F$  et  $D$ , de même angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a. Déterminer l'image de  $C$  par  $R_F \circ S_O \circ R_D$ .

Préciser la nature et les caractéristiques de  $R_F \circ S_O \circ R_D$ .

b. Placer le point  $H$  symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ . Démontrer que  $R_F(H) = D$  et le triangle  $FOD$  est rectangle et isocèle en  $O$ .

5° Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{CG}$ . On note  $f = R_A^{-1} \circ t$ . En utilisant la méthode de décomposition en produit de deux réflexions, déterminer la nature et les éléments géométrique de  $f$ .

6° Soit  $h = r' \circ r$  ou  $r'$  et  $r$  sont deux rotations de centres respectifs  $C$  et  $G$ , de même angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
décomposition en produit de deux réflexions, caractériser  $h$ .

**Méthode complexe :** On suppose que le plan est rapporté dans un repère  $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG})$

1)- Donner les affixes des points  $A$ ,  $C$  et  $G$

2)- Déterminer les expressions complexes  $r'$  et  $r$ . En déduire l'expression complexe de  $h$ .

3)- En déduire les coordonnées de  $\Omega$ .

#### **PROBLEME 3 : (SESSION 2006)**

Dans le plan orienté  $(P)$ , on considère le triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  tel que  $BC=2AB=4\text{cm}$  et  $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ .

$r_A$  : Rotation de centre  $A$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .

$r_B$  : Rotation de centre  $B$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .

Partie A : Méthode géométrique

1-a) Déterminer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

**Pour vos critiques, suggestions et commandes Composez : +26134931440 (WhatsApp ) ou [trefindrazaradinabola@gmail.com](mailto:trefindrazaradinabola@gmail.com) Aucune œuvre humaine n'est parfaite !**

b) En décomposant  $r_A$  et  $r_B$  en deux symétries orthogonales convenablement choisis, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f = r_A \circ r_B$

2- Soit  $S$  la similitude plane directe de centre  $B$  qui transforme  $A$  en  $C$

- a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude  $S$ .
- b) Faire la construction géométrique du point  $C_1$  image de du point  $C$  par la similitude  $S$
- c) On note  $C_2$  l'image du point  $C_1$  par la similitude  $S$ , montrer que les points  $A, B$  et  $C_2$  sont alignés

Partie B : Utilisation des nombres complexes

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(A; \vec{u}; \vec{v})$   $\vec{u} = \frac{\overline{AB}}{2}$   $\vec{v} = \frac{\overline{AC}}{2\sqrt{3}}$

1- Donner les affixes des points  $A, B$  et  $C$

2- a) Donner l'expression complexes des rotation  $r_A$  et  $r_B$

En déduire celle de  $f = r_A \circ r_B$

b) Donner les éléments caractéristiques de  $f$ .

3- Donner l'expression complexe de la similitude  $S$  définie dans la partie A et en déduire ses éléments caractéristiques

4- Soit  $g$  la transformation définie par sa forme complexe :  $z' = (-1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 4 + 2i\sqrt{3}$

a- Déterminer les affixes de  $B'$  et  $C'$  images respectives de  $B$  et  $C$  par la transformation  $g$ .

b- Vérifier que les points  $A, B$  et  $C'$  sont alignés.

c- En déduire les éléments caractéristiques de  $g$ .

#### **Problème 4**

Dans le plan orienté  $\mathcal{P}$ , on considère le triangle équilatéral  $ABC$  tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Soient  $H$  le milieu du segment  $[BC]$ ,  $I$  le milieu du segment  $[AC]$  et  $\Delta$  la médiatrice du segment  $[BC]$

On désigne par  $S_\Delta$  la réflexion d'axe  $\Delta$  et  $S$  la similitude directe de centre  $A$  et qui envoie  $B$  en  $I$

Soient  $M$  un point quelconque du plan et  $S(M) = M'$  et  $S_\Delta(M) = N$ .

#### **Méthode géométrique**

- 1- Faire une figure
- 2- Déterminer le rapport et l'angle de  $S$
- 3- Construire le point  $J$  antécédent de  $B$  par  $S$
- 4- a) Montrer que  $BM' = BN$  si et seulement si  $JM = 2CM$   
b) En déduire l'ensemble des points  $M$  tels que  $BM' = BN$

#### **Méthode complexe**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  avec  $\vec{u} = \overline{AB}$ .

On considère le point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$

- 1- Donnez les affixes des points  $B, C, I$  et  $H$
- 2- a) Déterminez l'écriture complexe de la similitude  $S$   
b) En déduire les éléments caractéristiques de  $S$   
c) Donnez l'affixe du point  $J$  antécédent de  $B$  par  $S$
- 3- Déterminez l'écriture complexe de la réflexion  $S_\Delta$
- 4- a) Montrer que  $BM' = BN$  si et seulement si  $JM = 2CM$   
b) En déduire l'ensemble des points  $M$  tels que  $BM' = BN$

**" Faites bien l'école et l'école vous fera du bien "**

WhatsApp : +261349321440

Fonctions numériques- Calcul intégral - Suites numériques

**PROBLÈME. 1**

I) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un R.O.N  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer le domaine  $D$  de  $f$ .

2) a) Etudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Etudier les variations de  $f$ .

4) Tracer la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  dans un repère orthonormé.

II) On pose, pour tout  $x \in [0,1[$ ,  $g(x) = f'(x)$ .

1) Etudier les variations de  $g$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq n-2$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$  on a :  $g\left(\frac{k}{n}\right) \leq g(x) \leq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ .

b) En déduire que:  $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ .

3) On pose:  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ .

a) Montrer que  $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{n}$ .

b) Calculer, alors, la limite de la suite  $(U_n)$ .

4) Montrer que  $U_n = \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ .

**PROBLÈME. 2**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty; 1[$  par  $f(x) = (1-x)e^{-x} + \sqrt{1-x}$ .

On note par  $(C)$  la représentation graphique dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 2cm.

**PARTIE A**

1-Etudier le signe de  $f(x)$  pour tout  $x \leq 1$ .

2. pour tout  $x \leq 1$ , on pose  $g(x) = (2-x)e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

Etudier le signe de  $g(x)$ , pour tout  $x \leq 1$ .

**PARTIE B**

1.a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$ .

b) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter.

2.a) calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \leq 1$ .

En déduire les variations de  $f$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3. construire (C) en précisant la demi-tangente à (C) au point d'abscisse en  $x = 1$ . (On ne demande pas de préciser le point d'inflexion).

4. calculer, en  $cm^2$ , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), les deux axes de coordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

5.a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  en précisant le nombre dérivé en  $x = 0$ .

c) Calculer  $(f^{-1})'(2)$ .

d) construire représentation graphique (C') de  $f^{-1}$ .

### PARTIE C

Pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout  $x \in [0; 1[$ , on pose :  $f_n(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} - 1 - x^n$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est une fonction strictement décroissante sur  $[0; 1[$ .

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un réel unique  $a_n \in ]0; 1[$  tel que  $f_n(a_n) = 0$ .

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ .

En déduire que :

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $f_{n+1}(a_n) > 0$ .

b) La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

c) La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

4. Calculer la limite  $\ell$  de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### PROBLÈME. 3

: Pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n$

Pour vos critiques, suggestions et commandes Composez : +26134931440 (WhatsApp) ou [trefindrazaradinabola@gmail.com](mailto:trefindrazaradinabola@gmail.com) Aucune œuvre humaine n'est parfaite !

définie par : 
$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = x(\ln x)^n \end{cases}$$

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité : 2 cm.

**PARTIE I :** On désigne par  $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1.- Calculer  $I_1$ .
- 2.- A l'aide d'une intégration par parties,
  - a) Calculer  $I_2$ .
  - b) Donner une expression de  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$ .
- c) En déduire  $I_3$ .

**PARTIE II** Etude des fonctions  $f_n$  pour  $n$  fixé

- A/ 1.-
- a) Montrer que  $f_n$  est continue en 0.
  - b) Etudier la dérivabilité de  $f_n$  en 0.
  - c) En déduire la tangente à  $(C_n)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- 2.- Montrer que l'équation  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$  admet trois solutions dans l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

En déduire que toutes les courbes  $(C_n)$  passe par 3 points fixes dont on précisera les coordonnées.

B/ Variation de  $f_n$ , pour  $n \geq 2$ .

- 1.- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
- 2.- Montrer que pour tout  $x > 0$  :  $f'_n(x) = [n + \ln x] [\ln x]^{n-1}$ .
- 3.- Pour n impair
  - a) Montrer que  $f'_n(x)$  et  $[n + \ln x]$  sont de même signe.
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f_n$ . On calculera en particulier  $f_n(e^{-n})$ .

Application : Dresser le tableau de variation de  $f_3$ .

4.- Pour n pair

- a) Montrer que :
  - pour tout  $x \in ]0, e^{-n}[ \cup ]1, +\infty[$   $f'_n(x) > 0$ .
  - pour tout  $x \in [e^{-n}, 1]$   $f'_n(x) \leq 0$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

Application : Dresser le tableau de variation de  $f_2$ .

5.- Etudier les positions relatives de  $(C_2)$  et  $(C_3)$  respectivement dans les intervalles  $]1, e[$  et  $[e, +\infty[$ .

" Faites bien l'école et l'école vous fera du bien "

WhatsApp : +261349321440

6.-Montrer que le point I(1, 0) est un point d'inflexion de (C<sub>3</sub>).

7.-Tracer dans un même repère (C<sub>2</sub>) et (C<sub>3</sub>).

C/ On note g la restriction de f<sub>2</sub> à l'intervalle [1, e].

1.-Montrer que g est une bijection de l'intervalle [1, e] sur un intervalle J que l'on déterminera.

2.-Calculer (g<sup>-1</sup>)'(e), g<sup>-1</sup> étant la fonction réciproque de g.

3.- Représenter graphiquement g<sup>-1</sup> dans le même repère que (C<sub>2</sub>) et (C<sub>3</sub>).

On donne : e<sup>0,05</sup> ≈ 1,05127 ; e<sup>0,13</sup> ≈ 1,13883 ; e ≈ 2,71828.

#### PROBLÈME. 4

Partie A : on considère la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par  $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

On désigne par (Ψ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (o ;  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ) tel que  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 5\text{cm}$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (on pourra poser  $X = x^{\frac{3}{2}}$ )

b) interpréter les résultats obtenus.

2)a) Calculer f'(x).

b) Dresser le tableau de variation de f.

3)a) Montrer que (Ψ) admet 2 tangentes horizontales l'on précisera.

4) Tracer (Ψ)

Partie B :

Pour tout entier naturel n ≥ 1, on considère la fonction f<sub>n</sub> définie

sur [1 ; +∞[, par  $f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ .

on note (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthogonal (1cm sur (xx') 10cm sur (yy'))

PARTIE 1: Etude de f<sub>1</sub>

a) Déterminer la limite de f<sub>1</sub> en +∞ et Etudier ses variations

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 et construire (C<sub>1</sub>)

c) On pose I<sub>1</sub> =  $\int_1^x f_n(t) dt$ . Calculer I<sub>1</sub>.

**PARTIE 2: comportement des fonctions  $f_n$  pour  $n \geq 1$ .**

1) Déterminer la limite de  $f_n$  en  $+\infty$

2) a) Déterminer  $f'_n(x)$  et calculer  $f'_n(e^{\frac{n}{2}})$ . Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

b) Montrer que la valeur maximale  $Y_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3) Soit  $x \in I$ , Étudier les positions relatives  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

4) on se propose d'étudier la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$ .

a) pour tout  $x > 1$ , calculer  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que pour tout entier non nul  $Y_{n+1} = \frac{1}{2} f(e^{\frac{n+1}{2}})$

c) En déduire que  $Y_n \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{2^n}}}$ , puis calculer sa limite.

**PARTIE 3 : Etude de primitives de  $f_n$  sur  $[0 ; +\infty[$ ,**

A toute entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_1^x f_n(t) dt$

1. a) soit  $k \geq 1$  un entier, démontrer que  $I_{k+1} = I_k - \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$

b) En déduire que pour tout entier  $n$  non nul :  $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \dots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$

2) soit  $\alpha$  un réel fixe

a) Montrer que l'on a :  $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) Y_n$ .

b) En déduire la limite de  $I_n(\alpha)$  quand  $n$  tend vers  $\infty$

3) Pour tout entier  $n \geq 1$  et  $x \in I$ , on pose :  $W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}$

a) Exprimer  $W_n(x)$  en fonction de  $I_n(x)$

b)  $\alpha \geq 1$  un réel  $x$ , déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n(\alpha)$

c) En déduire de ce qui précède que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$ .