

Sujet N°3 : Préparation au Baccalauréat C

À l'attention de l'élève de Terminale C motivé et désireux d'aller plus loin

Gildas Mba Obiang

Agrégé de Mathématiques

Session 2026

Exercice 1 : Arithmétique

Exercice 1 : Objectif

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Bézout d'une autre manière que celle généralement proposée dans le cours.

Soient a et b deux entiers relatifs non simultanément nuls.

Exercice 1 : Questions 1.a, 1.b et 1.c

1. On suppose que a et b sont premiers entre eux, avec $a \neq 0$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $au + bv$, où u et v sont des entiers relatifs.
 - 1.1 Démontrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide et qu'il admet un plus petit élément, noté d .
 - 1.2 Démontrer qu'il existe un couple $(u_0 ; v_0)$ d'entiers relatifs tels que $au_0 + bv_0 = d$.
 - 1.3 Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par d . Démontrer que si $r \neq 0$, alors $r \in \mathcal{E}$. En déduire que $r = 0$.

Exercice 1 : Questions 1.d, 1.e et 2

d) Dédurre des questions précédentes que d divise a et que d divise b .

e) Conclure quant à la valeur de d .

1. Démontrer que, réciproquement, s'il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que $au + bv = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2 : Géométrie et Similitudes

Exercice 2 : Énoncé de base

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = 1, \quad BC = 2 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

On appelle M le milieu du segment $[BC]$.

1. On admet l'existence d'une similitude directe s telle que $s(A) = M$ et $s(B) = D$.
Déterminer le rapport et l'angle de s .

Exercice 2 : Position du centre de la similitude

2. On se propose dans cette question de préciser la position du centre O de la similitude s .
 - 2.1 Les droites (AB) et (DM) se coupent en I . Démontrer que les points A , O , M et I sont cocycliques. En déduire que $BM = BO = BA$.
 - 2.2 Démontrer que $DM = DO$.
 - 2.3 En déduire que O est le symétrique de M par rapport à la droite (BD) .

Exercice 2 : Approche analytique

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct tel que les affixes des points A , B et D sont respectivement 0 , 1 et $2i$.
 - 3.1 Déterminer l'expression complexe de s et l'affixe de O .
 - 3.2 Vérifier que O est bien le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que $BM = BO$ et que les droites (OM) et (BD) sont orthogonales.

Problème : Analyse, Intégration et Suites

Problème : Partie A

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ existe bien. Par extension, on notera :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$$

Partie B : Étude de la fonction F

1. Étudier la parité de F .
2. Quel est le sens de variation de F sur les intervalles de la forme $[2n\pi ; (2n+1)\pi]$, où $n \in \mathbb{N}$, et sur les intervalles de la forme $[(2n+1)\pi ; (2n+2)\pi]$, où $n \in \mathbb{N}$?
3. On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité : pour tout $x \in [0 ; 1]$,
$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x.$$
 - 3.1 Montrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x - \frac{x^3}{18} \leq F(x) \leq x$.
 - 3.2 Tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour $x \in [-1 ; 1]$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \int_0^\pi \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} dt$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 0$: $a_{2n-1} \leq a_{2n+1} \leq 0 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n}$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$: $0 \leq a_{2n} + a_{2n+1} \leq \frac{1}{4n^2}$.

Problème : Partie D (Questions 1.a et 1.b)

Partie D : Convergence et comportement asymptotique

1. 1.1 Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2}$. En donner une interprétation géométrique dans un repère orthonormal.
- 1.2 En déduire que la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ converge.

Problème : Partie D (Question 2)

2. On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

0.0.1 Dédurre de la question précédente que la suite (I_n) est croissante et converge.

0.0.2 Montrer que si $x \in [2n\pi ; (2n+1)\pi[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$I_n \leq F(x) \leq I_n + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq I_n + \frac{1}{2n}$$

(On pourra utiliser sans démonstration le résultat $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$).

0.0.3 Montrer que si $x \in [(2n+1)\pi ; (2n+2)\pi[$, avec $n \in \mathbb{N}$, alors : $I_n \leq F(x) \leq I_{n+1}$.

Problème : Partie D (Question 3)

3. En déduire que F est positive sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow -\infty$.

Fin de l'épreuve