

Série : D

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
 Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
 Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.*

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les énoncés et les mots ou groupes de mots : une bijection, la puissance, dérivable, indépendants.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi du mot ou groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que l'énoncé soit vrai.

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P .
 A et B sont ... si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K .
 La fonction f réalise ... de K vers $f(K)$.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(K)$. La fonction composée $g \circ f$ est ... sur K et on a :
 $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
- Pour tous p élément \mathbb{Z}^* , q élément de \mathbb{N}^* et x élément de $]0 ; +\infty[$.
 On appelle x à ... $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque énoncé quatre informations a, b, c et d sont proposées dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de l'information vraie.

- On lance successivement deux fois et de façon indépendante un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note chaque fois le numéro de la face supérieure.
 La probabilité d'obtenir 6 deux fois est ...
 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{35}{36}$ d) $\frac{1}{36}$
- Soit f la bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f .

Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f^{-1}(x)$ est ...

- a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) \sqrt{x} d) $\sqrt{x^3}$

3. On note (C) la courbe représentative de la fonction \ln dans le plan muni d'un repère.

Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est ...

- a) $y = ex - 2$ b) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2} - 1$ c) $y = ex$ d) $y = \frac{x}{e}$

4. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est ...

- a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $+\infty$

EXERCICE 3 (2 points)

1. On donne les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- a) Détermine les primitives de f sur \mathbb{R} .
b) Détermine la primitive F de f sur \mathbb{R} telle que : $F(0) = 2$

2. On donne la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

Détermine une primitive H de h sur \mathbb{R} .

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \ln(x + 5)$ et $g(x) = f(x) - x$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; 4]$.

a) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.

b) Justifie que l'équation : $f(x) = x$, a une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.

2. Justifie que : $f([0 ; 3]) \subset [0 ; 4]$.

(On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0 ; 4]$)

3. a) Justifie que : $\forall x \in [0 ; 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{4}{5^n}.$$

4. Dédus de la consigne 3b) que la suite U est convergente et donne sa limite.

EXERCICE 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1cm.

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J) .

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis vérifie que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.
b) Interprète graphiquement l'ensemble des résultats précédents.
2. a) Justifie que pour tout nombre réel, $f'(x) = (2x^2 - 4x + 3)e^{x^2-2x+1}$.
b) Étudie le sens de variation de f .
3. On admet que pour tout nombre réel, $f''(x) = 2(x-1)(2x^2 - 4x + 5)e^{x^2-2x+1}$.
Justifie que le point I est un point d'inflexion de (C) .
4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I .
Trace (T) et (C) .

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur de jeu organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 10 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes et 5 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur mise 800 FCFA non remboursables, prend au hasard une boule du sac, note sa couleur puis la replace dans le sac.

- Si la boule est rouge, le jeu s'arrête.
- Si la boule est verte, le joueur tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.
 - Pour chaque boule verte obtenue, le joueur reçoit 2000 FCFA.
 - Pour chaque boule rouge obtenue, le joueur paye 1000 FCFA.

Ton professeur de mathématiques signale à l'administration de ton établissement que le jeu est favorable au promoteur.

L'ordre est immédiatement donné au promoteur de changer la mise pour en faire un jeu équitable. Ce dernier te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine la mise pour laquelle le jeu équitable.

EXERCICE 1 0,5x4 = 2pts

1. indépendants 3. dérivable
2. une bijection 4. la puissance

EXERCICE 2 0,5x4 = 2pts

1. d 3. d
2. b 4. c

EXERCICE 3

1. on donne $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

c. les primitives de f sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow u' = 2x$$

on a: $f(x) = u' u^{-\frac{1}{2}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

b. La primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(0) = 2$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

on a: $F(0) = 2$

$$\Rightarrow 2\sqrt{0+1} + c = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{c=0}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2+1}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

une primitive de h sur \mathbb{R}

on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\cos x \sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$h(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (0,5)$$

$$h(x) = (-2\sin x \cos x) (1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

Pose $u = 1+\cos^2 x \Rightarrow u' = 2(\cos x)' \cos x = -2\sin x \cos x$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = u' u^{-\frac{1}{2}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = 2(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = 2\sqrt{1+\cos^2 x}$$

EXERCICE 4

1. a. justification

$$\forall x \in [0;4], g(x) = f(x) - x$$

$$= f(x+5) - x$$

$$\forall x \in [0;4], g'(x) = [f(x+5) - x]'$$

$$= \frac{1}{x+5} - 1$$

$$\forall x \in [0;4], g'(x) = \frac{-x-4}{x+5}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-x-4$
Car $x+5 > 0$ sur $]0;4[$

$$\text{Ponons } -x-4=0$$

$$x=-4$$

x	0	4
$-x-4$	-	
$g'(x)$	-	

$\forall x \in]0;4[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;4[$.

b. justification

$$g(0) = h(0+5) - 0 = h5$$

$$g(4) = h(4+5) - 4 = h9 - 4$$

x	0	4
$g'(x)$		-
$g(x)$	$h5$	$-4 + h9$

$\forall x \in]0;4[$, g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0;4[$ vers

$$g(]0;4[) =]-4+h9; h5[$$

or $0 \in]-4+h9; h5[$ donc l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une solution unique dans $]0;4[$

en fait que $[1,93; 1,94] \in [0;4]$

$$g(1,93) = h(1,93+5) - 1,93 = 0,01$$

$$g(1,94) = h(1,94+5) - 1,94 = -0,003$$

en a: $g(1,93) \times g(1,94) < 0$ donc

$$1,93 < \alpha < 1,94$$

2. justification que $f([0;4]) \subset [0;4]$

* le sens de variation de f

$$\forall x \in [0;4], f'(x) = [h(x+5)]' = \frac{1}{x+5}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de 1

car $x+5 > 0$ sur $]0;+\infty[$

or $1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0;4[$

* justification que $f([0;4]) \subset [0;4]$

f est strictement croissante sur $[0;4]$,

$$\text{donc } f([0;4]) = [f(0); f(4)]$$

$$f(0) = h5 = 1,6 \quad f(4) = h9 = 2,2$$

$$\text{en a: } [1,6; 2,2] \subset [0;4]$$

$$\text{donc } f([0;4]) \subset [0;4]$$

3-a. justification

$$\forall x \in [0;4], f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$\text{Pour } x \in [0;4], \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x+5 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq f'(x) \leq \frac{1}{5}$$

$$\forall x \in [0;4], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$$

Exercice 4 suite

3. b. Démontrons par récurrence
que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

* Démontrons en application le théorème
des accroissements finis que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |U_n - \alpha|$

on sait que: $\forall x \in [0; 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$
en appliquant le théorème des
accroissements finis à l'intervalle $[x; \alpha]$
on a, $\forall x \in [0; 4], |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{5} |x - \alpha|$
or $f(x) = x \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$
donc $\forall x \in [0; 4], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{5} |x - \alpha|$

$$\Leftrightarrow |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{5} |U_n - \alpha| \quad (0,25)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |U_n - \alpha|}$$

* Démontrons par récurrence que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

⊙ Vérifions U_0

$$U_0 = 0$$

$$\bullet |U_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha$$

$$\bullet \frac{\alpha}{5^0} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

$$\text{on a: } |U_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^0} \quad (0,25)$$

donc U_0 est vraie.

⊙ supposons que U_k est vraie

$$\forall k \in \mathbb{N}, |U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^k}$$

⊙ Démontrons que U_{k+1} est vraie

$$\forall k \in \mathbb{N}, |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} |U_k - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^k}$$

$$\text{or } |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |U_k - \alpha|$$

$$\text{donc } |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^k}$$

$$\Leftrightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^{k+1}} \quad (0,25)$$

donc U_{k+1} est vraie

$$\text{alors } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$$

4. Déduisons de la suite U est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \quad (0,15)$$

$$\text{Car } -1 < \frac{1}{5} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha} \quad (0,25)$$

U converge vers α .

Exercice 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$$

1. a. La limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x^2-2x+1}$$

on a: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2-2x+1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ (0,25)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x-1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (0,25)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)e^{x^2-2x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{x^2-2x+1}$$

on a: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2-2x+1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ (0,25)

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (0,25)

b. Interprétation graphique

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction (D) en $-\infty$.

2. a. Justification

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left[(x-1)e^{x^2-2x+1} \right]'$$

$$= (x-1)' e^{x^2-2x+1} + (e^{x^2-2x+1})' (x-1)$$

$$= e^{x^2-2x+1} + (x^2-2x+1)' (x-1) e^{x^2-2x+1}$$

$$= e^{x^2-2x+1} + (2x-2)(x-1) e^{x^2-2x+1}$$

$$= \left[1 + (2x-2)(x-1) \right] e^{x^2-2x+1}$$

$$= (1 + 2x^2 - 2x - 2x + 2) e^{x^2-2x+1}$$
 (0,25)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x^2 - 4x + 3) e^{x^2-2x+1}$$

b. le sens de variation de f .

le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 - 4x + 3$ car $e^{x^2-2x+1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{posons } 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$$

$$= 16 - 24$$

$$\Delta = -8$$
 (0,1)

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 4x + 3$		+
$f'(x)$		+

$\forall x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) > 0$ (0,1)
Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 5 suite.

2. b. tableau de variation de f.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) e^{x^2-2x+1}$

en a: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right.$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. justifions que le point I est un point d'inflexion de (E)

en a: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(2x^2-4x+5) e^{x^2-2x+1} = 0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $2x^2-4x+5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5$
 $= 16 - 40$
 $= -24$ (0,15)

• $f(1) = (1-1) e^{1^2-2+1} = 0$

Donc le point I(1;0) est un point d'inflexion de (E).

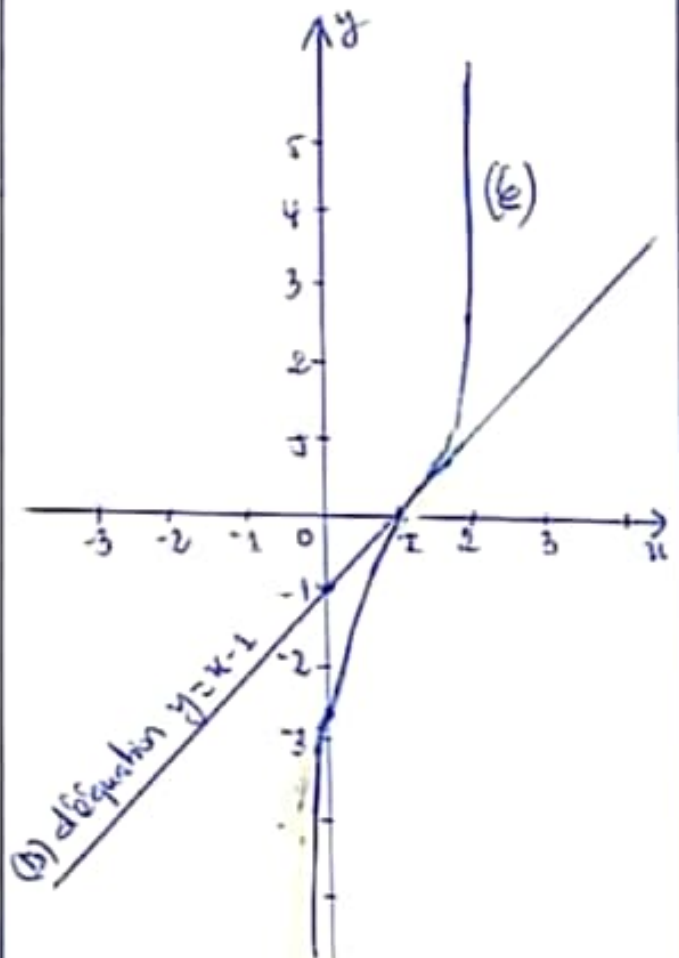
4. Construction de (E) et (T)

• (T) d'équation $y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

• $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-1) e^{x^2-2x+1}$

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-14,2	-2,7	-0,6	0	0,6	2,7



(E): (0,15)

(T): (0,25)

Exercice 6

Pour répondre à la préoccupation posée dans le sujet, je vais utiliser la notion la probabilité conditionnelle et variable aléatoire.

Je vais procéder de la façon suivante:

- Définir les événements
- Faire l'arbre pondéré (0,7)
- Définir la variable aléatoire
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire
- Calculer l'espérance mathématique
- Déterminer la valeur de la mise.

* choix des événements

Soit les événements suivants:

R: « obtenir une boule rouge »

V: « obtenir une boule verte »

* Arbre pondéré

$$P(R) = \frac{C_5^1}{C_{10}^1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

le nombre de tirages possibles est une combinaison de deux boules parmi 10.

$$\text{en a: } \text{Card} R = C_{10}^2 = 45.$$

• tirer deux boules vertes:

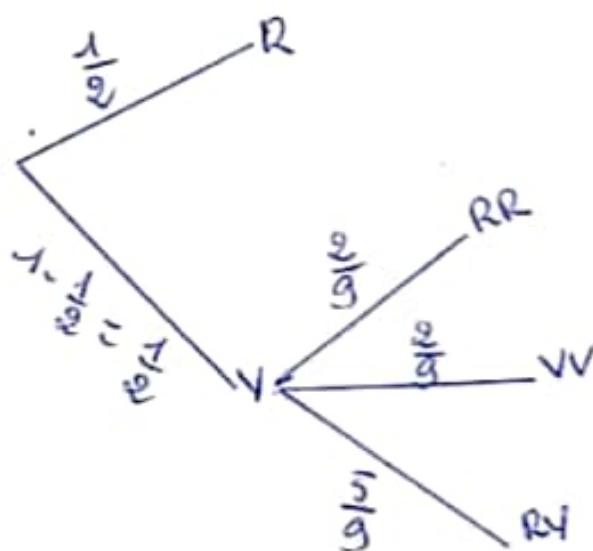
$$P_1 = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

• tirer deux boules rouges:

$$P_2 = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

• tirer une boule de chaque couleur:

$$P_3 = \frac{C_5^1 \times C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$



* la variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

* Loi de probabilité de X

• les valeurs prises par X

Soit m la mise du joueur ($m > 0$)

$$X = \text{gain} - \text{mise}$$

$$\bullet X = 0 - m = -m$$

$$X = -2 \times 1000 - m = -2000 - m$$

$$X = 2 \times 2000 - m = 4000 - m$$

$$X = 2000 - 1000 - m = 1000 - m$$

$$\bullet P(X = -m) = \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$$

$$\bullet P(X = -2000 - m) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{18}$$

$$\bullet P(X = 4000 - m) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{18}$$

$$\bullet P(X = 1000 - m) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Exercice 6 suite

• La loi de probabilité de x

X	$-m$	$-2000-m$	$1000-m$	$4000-m$	total
$P(x)$	$\frac{9}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	1

• L'espérance mathématique de x

$$E(x) = \frac{-9m + 2(-2000-m) + 5(1000-m) + 2(4000-m)}{18}$$

$$E(x) = \frac{9500 - 12m}{18}$$

$$E(x) = 500 - m$$

• La valeur de la mise pour que le jeu soit équitable

Le jeu est équitable si :

$$E(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 500 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 500$$

Pour avoir un jeu équitable, le promoteur doit fixer la mise à la somme de 500 FCFA.

Coûtance : $+0,5$