

GROUPE LA CERTITUDE

ORGANISATION DE TD, COURS DE RENFORCEMENT, REVISION AUX DIFFERENTS EXAMENS

Lieu : EPP GBEGAMEY SUD

DISCIPLINE – TRAVAIL – RIGUEUR

Tél : 96 38 92 49

EXAMENS BLANCS DEPARTEMENTAUX 2024

MATHS BAC D

Alibori

Atlantique

Borgou

Collines

Couffo

Donga

Littoral

Ouémé

ZOU

COURS INTENSIFS juillet 2024

(COURS DE RENFORCEMENT 2024)

Classes ouvertes : 3^{ème} – 1^{ères} (C, D) T^{les} (ABCD)

MODALITES DE PAIEMENT

Option 1 : Payez la totalité à l'inscription.

Option 2 : Payez 10.000F à l'inscription et le reste au plus tard le lundi 10 juillet 2024

Pour plus d'informations appeler : 96 38 92 49 - 52 81 89 60 95 51 17 61

OBJECTIF VISE : PROGRAMMES DES CLASSES OUVERTES

**{ 3^è SA1 – SA2 – SA3 – SA4
T^{le} CD – SA1 – SA2 – SA3 en deux MOIS.
1^{ères} – SA1 – SA2 – SA3**

➤ **DEROULEMENT** : Du 03 Juillet au 31 Août 2024

➤ **DUREE DE FORMATION** : 09 Semaines

➤ **JOURS ET HEURES** : Du lundi au Jeudi de 8H30 à 13H00

➤ **LIEU** : ***EPP GBEGAMEY SUD GROUPE ABC (après le CEG
GBEGAMEY en face du Collège Notre-Dame des
Apôtres de Cotonou)***

NB : Les inscriptions sont prévues du 01 mai au 17 juin 2024.

Au Groupe la Certitude, c'est l'expérience et le travail bien fait.

COMPILATION DES CORRECTIONS DES EPREUVES DE MATHS

EBD 2024 DES 09 DEPARTEMENTS AYANT DÉJÀ COMPOSÉ

SERIE D

UNIQUEMENT



EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL – BAC
EPREUVE : MATHEMATIQUES
SERIE : D
DUREE: 4H
COEF:04

Situation d'évaluation

Contexte : Le meilleur cultivateur de l'Alibori.

Le domaine cultivé par le meilleur cultivateur d'une région agricole du Bénin a la forme d'un cercle (Γ) circonscrit au quadrilatère ABCD dont les affixes des sommets A, B et C sont les racines du polynôme P définie par : $P(z) = z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i)$ avec $Re(z_B) = Re(z_C)$ et $Im(z_B) > Im(z_C)$ dans le plan muni $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique : 2 km. Le point D est tel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ce domaine est séparé par une rivière. Il a également construit une tente à l'aide des perches.

Paul, fils du cultivateur et élève en classe de terminale D s'intéresse à la forme de la rivière, du domaine cultivé par son père ainsi que les procédés ayant permis la construction de la tente.

Tâche : En tant qu'élève en classe de terminale scientifique, tu es appelé(e) à partager les préoccupations de Paul en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1)
 - a) Montre que $z_0 = 1 + i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
 - b) Résous l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
 - c) Justifie que : $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 - i$.
- 2)
 - a) Calcule l'affixe du point D.
 - b) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
 - c) Déduis en la nature du quadrilatère ABCD.
 - d) Détermine l'équation de (Γ) et construis (Γ).

Problème 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B et C ont pour coordonnées respectifs $(2; -1; 3)$, $(-1; 0; 2)$ et $(1; 1; 1)$.

La tente a été réalisée à partir d'un pilier principal perpendiculaire au plan du sol passant par le point P $(1; -1; 2)$ assimilable à une droite (D) et deux perches déterminées par les ensembles (Δ) des points M de l'espace tels que $2\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB})$ avec $\vec{u}(-1; 2; 1)$ et (Δ') tel que $\frac{3x+z}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{4}$.

- 3)
 - a) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
 - b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).
 - c) Détermine les coordonnées du point de contact du pilier et du sol.
- 4)
 - a) Détermine les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
 - b) Détermine l'ensemble (Δ) puis une représentation paramétrique de (Δ) .
- 5)
 - a) Détermine un repère de (Δ') .
 - b) Démontre que (Δ) et (Δ') sont sécantes.

Problème 3

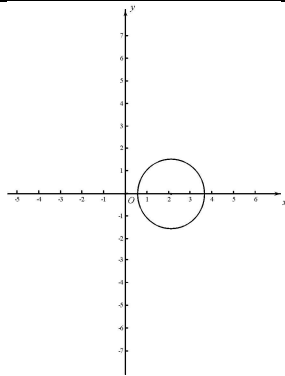
La rivière traversant le domaine cultivé par le meilleur producteur est assimilable à la courbe (c) de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\ln(x^2+4x+4) - 2x & \text{si } x < -2 \\ -2xe^{-x-2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \quad \text{dans le plan muni du repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Sur le domaine limité par la courbe (c) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est construit un étang pour la pisciculture.

- 6)
 - a) Montre que l'ensemble définition D de f est $\mathbb{R}$.
 - b) Etudie la continuité de f en 0.
- 7)
 - a) Démontre que pour tout $x > -2$ $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = 2x \frac{e^{-x-2}-1}{-x-2} - 2$
 - b) Etudie la dérivabilité de f en -2 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.
- 8)
 - a) Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de f .
 - b) Précise les branches infinies de la courbe représentative de f .
- 9) Calcule $f'(x)$ pour
 - a) $x \in]-\infty; -2[$.
 - b) $x \in]-2; +\infty[$.
- 10)
 - a) Etudie le signe de $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -2[$ et pour $x \in]-2; +\infty[$
 - b) Dresse le tableau de variation de f .
 - c) Trace (C) , la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité : 1 cm.
- 11)
 - a) Justifie que la fonction définie par $F(t) = \int_{-3}^t f(x)dx$ est continue sur $[-3; -2]$.
 - b) Justifie que pour tous $t \in [-3; -2]$ on a $F(t) = (t^2 + 4t + 4)\ln(-t - 2) - \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{15}{2}$.
 - c) Calcule $\lim_{\substack{t \rightarrow -2 \\ t < -2}} F(t)$ et justifie que cette limite est $F(-2)$.
 - d) Calcule l'aire du domaine couvert par l'étang de la pisciculture.

Eléments de réponses	CA = 0;5	CM	CO	
Problème 1: 20pts				
1) a) Montrons que $z_0 = 1 + i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$ $P(1 + i) = (1 + i)^3 - (7 + i)(1 + i)^2 + 2(8 + 3i)(1 + i) - 10(1 + i)$ $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i; (1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i$ donc $P(1 + i) = -2 + 2i - 2i(7 + i) + 2(8 + 3i)(1 + i) - 10(1 + i)$ $= -2 + 2i - 14i + 2 + 16 + 6i + 16i - 6 - 10 - 10i$ $P(1 + i) = 0$ d'où $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.	. ■ Identifie $1+i$ et $P(z)$	. ■ ■ Utilise des propriétés pour développer	. ■ Trouve $P(1+i)=0$ et conclut	2,5pts
b) Résolvons l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. $P(1 + i) = 0$ alors $P(z)$ est sous la forme : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme de second degré ainsi $Q(z) = z^2 + az + b$ donc. $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$ $= z^3 + az^2 + bz - z_0z^2 - az_0z - bz_0$ $P(z) = z^3 + (a - z_0)z^2 + (b - az_0)z - bz_0$ Par identification on a : $\begin{cases} a - z_0 = -7 - i \\ b - az_0 = 16 + 6i \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -6 \\ b = 10 \end{cases}$ On a : $P(z) = (z - z_0)(z^2 - 8z + 10)$ $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_0)(z^2 - 6z + 10) = 0$ $\Leftrightarrow (z - z_0) = 0$ ou $z^2 - 6z + 10 = 0$ Résolvons l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$ $\Delta = 36 - 4 \times 1 \times 10 = -4$ Donc $z_1 = \frac{6+2i}{2}$ et $z_2 = \frac{6-2i}{2}$ d'où $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 3 - i$ Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans sont $1 + i; 3 + i$ et $3 - i$	. ■ Identifie $P(1 + i) = 0$	. ■ Ecris $P(z)$ est sous la forme : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. ■ Utilise une méthode pour déterminer a et b . ■ Utilise une méthode pour résoudre l'équation ($z^2 - 6z + 10 = 0$)	. ■ Trouve a ; b et $P(z) = (z - z_0)(z^2 - 8z + 10)$. ■ Trouve $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 3 - i$ et conclus. que Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans sont $1 + i; 3 + i$ et $3 - i$	4pts
C) Justifie que : $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 - i$. Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans sont $1 + i; 3 + i$ et $3 - i$ de plus $Re(z_B) = Re(z_C)$ et $Im(z_B) > Im(z_C)$ donc $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 - i$.	. ■ Identifie que les solutions ■ Identifie $Re(z_B) = Re(z_C)$ et $Im(z_B) > Im(z_C)$		. ■ Trouve que $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 - i$.	2pts
2) a) Calcule l'abscisse du point D. Le point D est tel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}$ donc $z_D = z_B - z_A + z_C$ $z_D = (3 + i) - (1 + i) + (3 - i)$ donc $z_D = 5 - i$	. ■ Identifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	. ■ Ecris $z_D = z_B - z_A + z_C$	. ■ Trouve $z_D = 5 - i$	2pts
b) Calculons $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{(1 + i) - (3 + i)}{(3 - i) - (3 + i)} = \frac{-2}{-2i} = -i$	. ■ Identifie A, B et C par leurs affixes	. ■ Utilise les propriétés pour écrire $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme algébrique	. ■ Trouve $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i$	2pts
c) Déduisons la nature du quadrilatère ABCD. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme de plus $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B. d'où le quadrilatère ABCD est un carré	. ■ Identifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ■ identifie $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i$	. ■ ■ Utilise une propriété permettant de caractériser un carré	. ■ Trouve le le quadrilatère ABCD est un carré	3pts
d) Déterminons l'équation de (Γ) et construis (Γ). Soit r le rayon de ce cercle et I son centre. On a : $2r = AC = z_C - z_A = (3 - i) - (1 + i) = 2 - 2i = 2\sqrt{2}$ donc $r = \sqrt{2}$ $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(3 - i) + (1 + i)}{2} = 2$ D'où I(2 ; 0) et l'équation du cercle est : $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ Construisons (Γ).	. ■ Identifie A et C par leurs affixes . ■ Identifie un repère . Identifie r et I	. ■ Ecris $2r = AC = z_C - z_A $. ■ Ecris $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$. ■ Représente un repère	. ■ Trouve $r = \sqrt{2}$ et trouve I(2 ; 0) . ■ Construis (Γ).	4,5pts

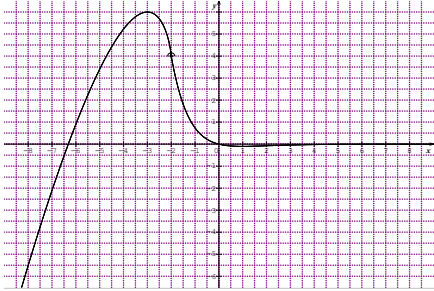


Problème 2: 21,5pts

3) a) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC) $\overrightarrow{AB}(-3; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 2; -2)$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$ Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5\vec{j} - 5\vec{k}$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors les points A; B et C déterminent un plan de vecteur normale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ donc l'équation cartésienne du plan (ABC) est sous la forme : $-5y - 5z + d = 0$ $A \in (ABC) \Leftrightarrow -5y_A - 5z_A + d = 0$ donc : $d = 5(-1) + 5(3) = 10$ d'où le plans (ABC) a pour équation $-5y - 5z + 10 = 0$ soit $y + z - 2 = 0$	• Identifie les points A, B et C par leur coordonnées	• Utilise la formule du produit vectoriel • Utilise une propriété pour déterminer l'équation du plan (ABC)	• Trouve $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5\vec{j} - 5\vec{k}$ • Trouve (ABC): $y + z - 2 = 0$	4pts
b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D). Le support du pilier est perpendiculaire au plan du sol donc son vecteur directeur est le vecteur normal du plan (ABC) de plus (D) passe par P (1 ; -1; 2) donc (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	• Identifie la position du plan du sol et du support du pilier	• Utilise une propriété pour déterminer la représentation paramétrique	• Trouve $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	2pts
c) Détermine les coordonnées du point de contact du pilier et du sol. Soit S le point de contact du sol avec le pilier $\{S\} = (ABC) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ et } (2) \text{ dans } (3) \text{ donne } t - 1 + 2 - 2 = 0 \text{ donc } t = 1 \text{ d'où}$ $S(2; 0; 2)$	• Identifie l'équation cartésienne de (ABC) • Identifie la représentation paramétrique de (D)	• Ecris $\{S\} = (ABC) \cap (D) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$	• Trouve $t = 1$ et conclus que $S(2; 0; 2)$	3pts
4) a) Détermine les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC. $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \text{ donc}$ $x_G = \frac{2-1+1}{3} \quad y_G = \frac{-1+0+1}{3} \quad z_G = \frac{3+2+1}{3} \text{ d'où } G\left(\frac{2}{3}; 0; 2\right)$	• Identifie les points A ; B ; C et G	• Utilise une propriété permettant de déterminer les coordonnées de G	• Trouve $G\left(\frac{2}{3}; 0; 2\right)$	2,5pts
b) Détermine l'ensemble (Δ) puis une représentation paramétrique de (Δ). $M \in (\Delta) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB})$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} + (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (3\overrightarrow{MG}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \vec{0} \text{ d'où l'ensemble } (\Delta) \text{ est la droite passant par G et de vecteur directeur } \vec{u}$	• Identifie (Δ) • Remarque que G est l'isobarycentre des points A, B et C • Identifie G et $\vec{u}$ par leur coordonnées	• Utilise les propriétés du produit vectoriel • Utilise une propriété pour déterminer la représentation paramétrique	• Trouve que $\overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et Conclue que l'ensemble (Δ) est la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{u}$ • Trouve : $\begin{cases} x = -t + \frac{2}{3} \\ y = 2t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	4,5pts

$\vec{u}(-1; 2; 1)$ et $G\left(\frac{2}{3}; 0; 2\right)$ alors (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t + \frac{2}{3} \\ y = 2t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$				
5) a) Détermine un repère de (Δ'). (Δ') a pour système d'équation cartésienne : $\frac{3x+z}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{4}$. Posons $\frac{3x+z}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{4} = t$. On a : $\frac{z+1}{4} = t \Rightarrow z = 4t - 1$; $y = t + 1$ et $\frac{3x+z}{2} = t \Rightarrow 3x - z = 2t$ $\Rightarrow 3x = 2t - z$ $\Rightarrow 3x = 2t - 4t + 1$ $\Rightarrow x = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$ Ainsi une représentation paramétrique de (Δ') est : $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = t + 1 \\ z = 4t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ donc (Δ') a pour $(K; \vec{v})$ avec $\vec{v}(-2; 3; 12)$ et $K\left(\frac{1}{3}; 1; -1\right)$	• Identifie (Δ')	• Utilise une méthode pour déterminer une représentation paramétrique de (Δ')	• Trouve $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = t + 1 \\ z = 4t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et et conclus que (Δ') a pour $(K; \vec{v})$ avec $\vec{v}(-2; 3; 12)$ et $K\left(\frac{1}{3}; 1; -1\right)$	2pts
b) Démontre que (Δ) et (Δ') sont sécantes. Un repère de (Δ) est $(G; \vec{u})$ avec $\vec{u}(-1; 2; 1)$ et $G\left(\frac{2}{3}; 0; 2\right)$ et un repère de (Δ') est $(K; \vec{v})$ avec $\vec{v}(-2; 3; 12)$ et $K\left(\frac{1}{3}; 1; -1\right)$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$ Donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = 21\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ donc les droites (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles (1) $\vec{KG}\left(\frac{1}{3}; -1; 3\right)$ et $\vec{KG} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 7 - 10 + 3 = 0$ donc les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires (2) De (1) et (2) les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes.	• Identifie (Δ) et (Δ')	• Utilise une méthode pour justifier que les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes. • Utilise une formule pour calculer le produit vectoriel	• Trouve que les droites (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles et que les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires • Conclut que les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes	3,5pts
Problème 3: 48,5pts				
6) a) Montre que l'ensemble définition D de f est $\mathbb{R}$. Posons $D_1 = \{x \in]-\infty; -2[/ x^2 + 4x + 4 > 0\}$ et $D_2 = \{x \in [-2; +\infty[/ -2xe^{-x-2} \in \mathbb{R}\}$ $x^2 + 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ donc $D_1 =]-\infty; -2[\cap \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[$ $\forall x \in [-2; +\infty[; -2xe^{-x-2} \in \mathbb{R}$ donc $D_2 = [-2; +\infty[$ d'où $D = D_1 \cup D_2 =]-\infty; -2[\cup [-2; +\infty[= \mathbb{R}$	• Identifie les expressions de f par intervalle	• Ecris $D_1 = \{x \in]-\infty; -2[/ x^2 + 4x + 4 > 0\}$ • Ecris $D_2 = \{x \in [-2; +\infty[/ -2xe^{-x-2} \in \mathbb{R}\}$ • Utilise une propriété pour résoudre $x^2 + 4x + 4 > 0$ • Ecris $D = D_1 \cup D_2$	• Trouve $D_1 =]-\infty; -2[$ • Trouve $D = \mathbb{R}$	4,5pts
b) Etudie la continuité de f en 0. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} ((x+2)\ln(x^2 + 4x + 4) - 2x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 2(x+2)\ln x+2 - 2x = 4$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (-2xe^{-x-2}) = 4$ $f(-2) = -2(-2)e^{-(-2)-2} = 4$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = f(-2) = 4$ donc f est continue en 0	• Identifie les expressions de f par intervalle	• Ecris $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} ((x+2)\ln(x^2 + 4x + 4) - 2x)$ • Ecris $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (-2xe^{-x-2})$	• Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = f(-2) = 4$ et conclus que f est continue en -2	2,5pts
7) a) Démontre que pour tout $x > -2$ $\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \frac{-2xe^{-x-2} - 2}{x+2} = \frac{-2xe^{-x-2} + 2x - 2x - 2}{x+2} = \frac{-2xe^{-x-2} + 2x}{x+2} + \frac{-2x - 4}{x+2}$ D'où $\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = 2x \frac{e^{-x-2} - 1}{-x-2} - 2$	• Identifie f pour $x > -2$	• Utilise des transformations adéquates pour démontrer la relation	• Trouve $\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = 2x \frac{e^{-x-2} - 1}{-x-2} - 2$	2,5pts

b) Etudions la dérivabilité de f en -2 puis interprétons géométriquement les résultats obtenus. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+2)\ln(x^2 + 4x + 4) - 2x - 4}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \ln(x^2 + 4x + 4) - 2 = -\infty$ Donc f n'est pas dérivable à gauche en -2 $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} 2x \frac{e^{-x-2} - 1}{-x-2} - 2 = -5$ Donc f est pas dérivable à droite en -2 Interprétons géométriquement les résultats obtenus $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\infty$ donc la courbe (C) admet une demi tangente verticale à gauche définie par : $\begin{cases} x = -2 \\ y \geq f(-2) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -2 \\ y \geq 4 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -5$ donc la courbe (C) admet une demi tangente à droite définie par : $\begin{cases} y = -5(x + 2) + 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = -5x - 8 \\ x \leq -2 \end{cases}$	• Identifie les expressions de f par intervalle • Identifie $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\infty$ • Identifie $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -5$	• Ecris $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+2)\ln(x^2 + 4x + 4) - 2x - 4}{x + 2}$ • Utilise la propriété permettant de déterminer la limite en 0 de la fonction : $x \mapsto \ln x$ • Ecris $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} 2x \frac{e^{-x-2} - 1}{-x-2} - 2$ • Utilise la limite remarquable $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ • Utilise les propriétés permettant de déterminer le demi tangentes	• Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\infty$ • Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -5$ • Trouve $\begin{cases} x = -2 \\ y \geq 4 \end{cases}$ et trouve $\begin{cases} y = -5x - 8 \\ x \leq -2 \end{cases}$	7,5pts
8) a) Calcule des limites aux bornes du domaine de définition de f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x+2)\ln x+2 - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) \left(2\ln x+2 - \frac{2x}{x+2} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-x}e^{-2} = 0$	• Identifie les bornes de l'ensemble de définition	• Utilise une méthode pour déterminer la limite en $-\infty$ • Utilise une méthode pour déterminer la limite en $+\infty$	• Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\infty$ • Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	4pts
b) Précise les branches infinies de la courbe représentative de f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x+2)\ln x+2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x+2)}{x} \ln x+2 - 2 = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées	• Remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et Remarque que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	• Utilise la propriété permettant de déterminer l'asymptote horizontale • Ecris $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x+2)\ln x+2 - 2x}{x}$ • Utilise une méthode permettant de calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x+2)\ln x+2 - 2x}{x}$ • Utilise la propriété permettant de déterminer la branche parabolique de direction l'axe des ordonnées	• Trouve la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe (C) • Trouve la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées	4,5pts
9) Calculer f'(x) pour a) $x \in]-\infty; -2[$. $\forall x \in]-\infty; -2[f'(x) = 2\ln x+2 + 2(x+2) \times \frac{1}{x+2} - 2 = 2\ln x+2 $ Calculer f'(x) pour b) $x \in]-2; +\infty[$. $\forall x \in]-2; +\infty[f(x) = -2e^{-x-2} + 2xe^{-x-2} = 2(x-1)e^{-x-1}$	• Identifie les expressions de f sur chaque intervalle	• Utilise la formule de dérivation du logarithme • Utilise la formule de dérivation de l'exponentielle • Utilise la formule de dérivation de la somme et du produit	• Trouve $\forall x \in]-\infty; -2[f'(x) = 2\ln x+2$ • Trouve $\forall x \in]-2; +\infty[f(x) = 2(x-1)e^{-x-1}$	4pts
10) a) Etudie le signe de f'(x) pour $x \in]-\infty; -2[$ et pour $x \in]-2; +\infty[$ - pour $x \in]-\infty; -2[$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x+2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x+2 = 1$ ou $x+2 = -1$ $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$ $\forall x \in]-\infty; -3[f'(x) > 0$; $\forall x \in]-3; -2[f'(x) < 0$ si $x = -3 f'(x) = 0$ - pour $x \in]-2; +\infty[$ $\forall x \in]-2; +\infty[e^{-x-2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ alors	• Identifie les expressions de f'(x) sur chaque intervalles	• Utilise une méthode pour déterminer le signe de $2\ln x+2$ sur $]-\infty; -2[$ • Utilise une méthode pour déterminer le signe de $2(x-1)e^{-x-1}$ sur $]-2; +\infty[$	• Trouve $\forall x \in]-\infty; -3[f'(x) > 0$; $\forall x \in]-3; -2[f'(x) < 0$ si $x = -3 f'(x) = 0$ • Trouve $\forall x \in]-2; -1[f'(x) < 0$; $\forall x \in]-1; +\infty[f(x) > 0$	3,5pts

$\forall x \in]-2; 1[\quad f'(x) < 0 ; \forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) > 0$ b) Dresse le tableau de variation de f.	•Identifie le sens de variation de f •Identifie le signe de la dérivée •identifie 1 et -3 •Identifie les limites aux bornes de l'ensemble de definition de f	•Etablis la forme du tableau de variation de f	$si \ x = 1; \ f'(x) = 0$ •Trouve un tableau de variation correc	3,5pts
c)Trace(C_f),la courbe représentative de f dans un repère orthonormé($O; \vec{i}; \vec{j}$) d'unité : 1 cm 	•Identifie le tableau de variation de	•Construis le repère •Construis les demi tangente en -2	•Trouve la representation graphique de la courbe de f	2,5pts
11) a) Justifie que la fonction $F(t) = \int_{-3}^t f(x)dx$ définie par $F(t) = \int_{-3}^t f(x)dx$ est continue sur $[-3; -2]$ La fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[-3; -2]$ donc la fonction F est l'unique primitive de f sur $[-3; -2]$ qui s'annule en -3 par conséquent la fonction F est dérivable $[-3; -2]$ alors elle est continue sur $[-3; -2]$.	•Remarque que f est continue sur $[-3; -2]$	•Utilise une propriété pour montrer la continuité de F sur $[-3; -2]$	•trouver que F est continue sur $[-3; -2]$	2pts
b) Justifie que pour tous $t \in [-3; -2]$ on a $F(t) = (t^2 + 4t + 4)\ln t + 2 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{15}{2}$ $F(t) = \int_{-3}^t f(x)dx = \int_{-3}^t 2(x+2)\ln x+2 - 2x \, dx = [(x^2 + 4x)\ln x+2]_{-3}^t - \int_{-3}^t \frac{x^2 + 4x}{x+2} \, dx - [x^2]_{-3}^t$ $= (t^2 + 4t)\ln t+2 - t^2 + 19 - \int_{-3}^t x + 2 - \frac{4}{x+2} \, dx$ $= (t^2 + 4t)\ln t+2 - t^2 + 9 - \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4\ln x+2 \right]_{-3}^t$ $= (t^2 + 4t)\ln t+2 - t^2 + 9 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4\ln t+2 - \frac{3}{2}$ $= (t^2 + 4t + 4)\ln t+2 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{15}{2}$	•Identifie l'expression de f sur $[-3; -2]$	•Utilise la formule de l'intégration par partie •Utilise la formule de la primitive de la fonction qui $x \mapsto \frac{4}{x+2}$ et $x \mapsto x + 2$	•Trouve que $F(t) = (t^2 + 4t + 4)\ln t + 2 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{15}{2}$	2,5pts
c) Calcule $\lim_{t \rightarrow -2} F(t)$ et justifie que cette limite est $F(-2)$ $\lim_{t \rightarrow -2} F(t) = \lim_{t \rightarrow -2} (t^2 + 4t + 4)\ln t + 2 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{15}{2} = -6 + 4 + \frac{15}{2} = \frac{11}{2}$ F étant continue sur $[-3; -2]$ alors F est continue en -2 donc $\lim_{t \rightarrow -2} F(t) = F(-2)$ ainsi $F(-2) = \frac{11}{2}$	•Identifie que $F(t)$ •Identifie que F est continue en sur $[-3; -2]$	•Utilise la propriété $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ •Utilise la propriété de la continuité en un réel	•Trouve $\lim_{t \rightarrow -2} F(t) = F(-2)$	3pts
d) Calculons l'aire du domaine couvert par l'étang de la pisciculture Soit A l'aire de ce domaine f est continue sur $[-3; -2]$ et pour tous $x \in [-3; -2]; f(x) > 0$ alors $A = \int_{-3}^{-2} f(x)dx$ ua $\int_{-3}^{-2} f(x)dx = si \ F(-2) = \frac{11}{2}$ donc $A = \frac{11}{2}uv$	•Remarque que $\forall x \in [-3; -2]; f(x) > 0$	•Ecris $A = \int_{-3}^{-2} f(x)dx$ ua	•Conclus que $A = \frac{11}{2}uv$	2pts

$$C_a = 0,5pt$$

$$CP=10 \quad \text{si } N \geq 60$$

$$C_m = 0,5pt$$

$$CP= 5 \quad \text{si } 40 \leq N < 60$$

$$C_o = 1pt$$

$$CP= 0 \quad \text{si } 0 \leq N < 40$$

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DU BORGOU

Année scolaire : 2023 - 2024

Matière : MATHÉMATIQUES

Série : D

Niveau : BAC

Durée : 04 HEURES

SITUATION D'EVALUATION

Contexte :

Abou a un jardin attrayant ayant la forme d'un parallélogramme $OBCD$ de centre J tels que les points $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$ dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Le jardin est alimenté en eau grâce à un puits creusé dans le jardin qu'il envisage couvrir. Au repos la surface de l'eau du puits est contenue dans un plan (P) dont une représentation paramétrique dans le repère orthonormé direct est :

$$\begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 1 + t \\ z = 2t + 2t' \end{cases} ; (t; t') \in \mathbb{R}^2.$$

La corde qui sert à tirer la puisette du puits a pour support l'ensemble (Δ) des points M de l'espace vérifiant : $(\vec{MO} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) \wedge (\vec{MD} + \vec{ME}) = \vec{0}$ où I est le milieu du segment $[DE]$ et E le point de coordonnées $(0; 0; \frac{1}{2})$. Le point $H(\frac{-1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{3}{10})$ représente l'extrémité extérieure de la corde, fixée contre la barre transversale du puits.

Les produits du jardin sont livrés dans deux villes en empruntant souvent deux voies différentes représentées dans le plan par des portions de courbes (C) et (C') .

Abou se préoccupe de déterminer la longueur minimale L de la corde nécessaire pour que la puisette atteigne la surface de l'eau au repos dans le puits et s'intéresse à l'allure des courbes (C) et (C') puis à l'aire du domaine abritant le jardin.

Tâche : Tu es invité(e) à apporter des réponses aux préoccupations de Abou en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème1

- 1) a- Détermine les coordonnées des points J et I .
b-Justifie que (Δ) est une droite dont tu donneras un repère.
c-Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
- 2) a- Détermine une équation cartésienne du plan (P) .
b-Justifie que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) .
c-Détermine les coordonnées du point d'intersection K de la droite (Δ) avec le plan (P) .
- 3) Détermine la longueur minimale L de la corde nécessaire pour atteindre la surface de l'eau au repos dans le puits.

Problème2

Pour entretenir le puits, Abou confectionne un couvercle ayant la forme d'un disque dont le bord est un cercle (Γ) circonscrit au triangle formé dans le plan

complexe $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ par les points images des solutions de l'équation (E): $z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2 + 4i)z + 6 + 12i = 0$

4) Démontre que (E) admet une solution réelle unique z_0 que tu préciseras.

5) a- Vérifie que :

$$z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2 + 4i)z + 6 + 12i = (z - 3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i).$$

b- Démontre que si un nombre complexe w_0 est solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$, alors son opposé $-w_0$ en est aussi une solution.

c- Résous l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ puis déduis les solutions l'équation (E).

6) a- Justifie que les points $M_1; M_2$ et M_3 forment un triangle isocèle.

b- Justifie que le point G d'affixe $z_G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ est le centre du bord du couvercle du puits puis détermine une équation cartésienne de (Γ) .

Problème 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\int_x^0 \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt + 1, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x \ln x + 1} + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et la courbe (C')} \text{ celle de la fonction } \phi^{-1} \text{ où } \phi$$

est la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$. Le domaine abritant le jardin est délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -5$ et $x = -3$.

7) a- Etudie les variations de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = x \ln x + 1$.

b- Déduis-en que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $g(x) \neq 0$.

8) a- Prouve que l'ensemble de définition D de f est $\mathbb{R}$.

b- Etudie la continuité de f en 0.

9) a- Justifie que pour tout t élément de $]-\infty; 0]$, $\frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} = 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$

b- Justifie que pour tout x élément de $] -\infty; 0]$, $f(x) = x + 1 + \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

c- Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète les résultats obtenus.

10) Achève l'étude des variations de f .

11) a- Démontre que pour tout x élément de $]-\infty; 0]$, $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$.

b- Etudie les branches infinies à la courbe (C).

12) a- Démontre que la restriction ϕ de f à l'intervalle $[1; +\infty[$ est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- On note (C') la courbe de la bijection réciproque ϕ^{-1} . Construis (C) et (C') dans le même repère.

13) Calcule l'aire du domaine où abrite le jardin de Abou.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES : Série : D

N°	Eléments de réponses	Ca Le candidat	Cm Le candidat	Co Le candidat	Points
Problème 1					
1- a)	Déterminons les coordonnées des points J et I J est le centre du parallélogramme OBCD donc J est le milieu de $[OC]$ et comme $C(1; 1; 0)$ alors $J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$. I est le milieu de $[DE]$ avec $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; \frac{1}{2})$ donc $I(\frac{0+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{0+\frac{1}{2}}{2})$. D'où $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{4})$	.Identifie les points J et I	.Pose $J(\frac{x_C}{2}; \frac{y_C}{2}; \frac{z_C}{2})$ $I(\frac{x_D+x_E}{2}; \frac{y_D+y_E}{2}; \frac{z_D+z_E}{2})$ 	.Trouve $J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ 	2,5 pts
1- b)	Justifions que (Δ) est une droite dont on donnera un repère. Soit M un point de l'espace. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \wedge (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (4\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) \wedge (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 8\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$ car $8 \neq 0$; $\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow M \in (IJ)$ car $I \neq J$ $\Leftrightarrow (\Delta)$ est la droite (IJ) de repère $(I; \overrightarrow{IJ})$ avec $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ et $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{4})$.	.Identifie (Δ)	.Pose $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$	.Trouve $M \in (IJ)$.Conclut que (Δ) est la droite (IJ) de repère $(I; \overrightarrow{IJ})$ 	2,5 pts

1- c)	Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ). Un repère de (Δ) est $(I; \overrightarrow{IJ})$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IJ}$. On a $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = \frac{1}{2}t \\ y - \frac{1}{2} = 0 \\ z - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ D'où une représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	Identifie (Δ) et le repère $(I; \overrightarrow{IJ})$	Utilise une méthode pour déterminer une représentation paramétrique de (Δ)	Trouve une représentation paramétrique de (Δ)	3 pts
2- a)	Déterminons une équation cartésienne du plan (P). $(P): \begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 1 + t \\ z = 2t + 2t' \end{cases}; (t; t') \in \mathbb{R}^2$ Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (P). $M \in (P) \Leftrightarrow \exists (t; t') \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 1 + t \\ z = 2t + 2t' \end{cases}$. On a $x - 1 = \frac{z}{2} \Leftrightarrow 2x - z - 2 = 0$. D'où $(P): 2x - z - 2 = 0$.	Identifie la représentation paramétrique de (P)	Utilise une méthode pour déterminer une équation cartésienne de (P)	Trouve une équation cartésienne de (P)	2,5 pts

2-b)	Justifions que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P). Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}(2; 0; -1)$ et un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{IJ}(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{4})$. On a $\vec{n} = 4\vec{IJ}$. Donc $\vec{n}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires. D'où la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P).	.Identifie la droite (Δ) et le plan (P)	. Utilise une propriété pour démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire plan (P)	.Conclut que la droite (Δ) est perpendiculaire plan (P)	2 pts
2-c)	Déterminons les coordonnées du point d'intersection K de la droite (Δ) avec le plan (P). $\{K\} = (P) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{1}{2}t \\ y_K = \frac{1}{2} \\ z_K = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \\ 2x_K - z_K - 2 = 0 \end{cases};$ on a $2\left(\frac{t}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{5}$. Ainsi, $K(\frac{9}{10}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{5})$.	.Identifie la représentation paramétrique de (Δ) et une équation cartésienne de (P)	.Utilise une méthode pour déterminer les coordonnées du point d'intersection	.Trouve : $t = \frac{9}{5}$ $K(\frac{9}{10}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{5})$	2,5 pts
3)	Déterminons la longueur minimale L de la corde nécessaire pour atteindre la surface de l'eau au repos dans le puits . Comme Le point $H(\frac{-1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{3}{10})$ représente l'extrémité extérieure de la corde, fixée contre la	.Identifie Les coordonnées des points H et K	• Pose $L = HK$ • Utilise une méthode pour déterminer HK	.Trouve $L = \frac{\sqrt{5}}{2}ul$	3

	barre transversale du puits et le point $K(\frac{9}{10}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{5})$ est le point d'intersection du support de la corde avec le plan (P) contenant la surface au repos de l'eau alors la longueur minimale est $L = HK =$ $\sqrt{(\frac{9}{10} + \frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{5} - \frac{3}{10})^2} ul = \frac{\sqrt{5}}{2} ul.$				pts
	Récapitulatif Problème1	09 Ca	13 Cm	14 Co	18 pts
Problème 2					
4)	Démontrons que (E) admet une solution réelle unique z_0 que l'on précisera. $(E): z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2 + 4i)z + 6 + 12i = 0.$ Soit a cette solution réelle. On a a solution de $(E) \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + a^2\bar{a} - 3a\bar{a} - (2 + 4i)a + 6 + 12i = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 6a^2 - 2a + 6 + i(-4a + 12) = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2a^3 - 6a^2 - 2a + 6 = 0 \\ -4a + 12 = 0 \end{cases}.$ On a $-4a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = 3$. En remplaçant la valeur trouvée dans la première équation on a : $2(3)^3 - 6(3)^2 - 2(3) + 6 = 54 - 54 - 6 + 6 = 0.$ D'où l'équation (E) admet une solution réelle unique $z_0 = 3$.	Identifie (E) et a	Utilise : Une méthode pour démontrer que (E) admet une solution réelle unique	Trouve : $\begin{cases} 2a^3 - 6a^2 - 2a + 6 = 0 \\ -4a + 12 = 0 \end{cases}$ a=3 conclut que l'équation (E) admet une solution réelle unique $z_0 = 3$	3 pts
5-	Vérifions que :	Identifie :	Utilise une méthode pour	Trouve le résultat	

a)	$z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2 + 4i)z + 6 + 12i$ $= (z - 3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i).$ On a : $(z - 3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i) = z^3 + z^2\bar{z} - (2 + 4i)z - 3z^2 - 3z\bar{z} + 6 + 12i = z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2 + 4i)z + 6 + 12i.$ D'où le résultat.	(E) 	vérifier l'égalité 		2 pts
5-b)	Démontrons que si un nombre complexe w_0 est solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$, alors son opposé $-w_0$ en est aussi une solution. Soit w_0 une solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$; démontrons que $-w_0$ est aussi une solution de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$. w_0 est solution de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow w_0^2 + w_0\overline{w_0} - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow (-w_0)^2 + (-w_0)(-\overline{w_0}) - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow -w_0$ est solution de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$. D'où si un nombre complexe w_0 est solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$, alors son opposé $-w_0$ en est aussi une solution.	Identifie l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$	Utilise une méthode pour démontrer l'implication	Trouve le résultat	2,5 pts
5-c)	Résolvons l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$	Identifie :	Pose :	Trouve :	

	puis déduisons les solutions l'équation (E). Posons $u = x + iy$ une solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$. u solution de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow u^2 + u\bar{u} - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow (x + yi)^2 + (x + yi)(x - yi) - 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 + (2xy - 4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 \\ 2xy - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 2) \text{ ou } (x; y) = (-1; -2) \Leftrightarrow u = 1 + 2i \text{ ou } u = -1 - 2i$. D'où l'ensemble des solutions de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ est $\{1 + 2i; -1 - 2i\}$. $(E) \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z = 1 + 2i \text{ ou } z = -1 - 2i$. Par conséquent l'ensemble des solutions de (E) est $\{3; 1 + 2i; -1 - 2i\}$.	$z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ L'équation (E) 	$u = x + yi$ une solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ Utilise une méthode pour résoudre l'équation $u^2 + u\bar{u} - 2 - 4i = 0$.Ecrit $(z - 3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i) = 0 \Leftrightarrow z = 3 \text{ ou } z = 1 + 2i \text{ ou } z = -1 - 2i$. 	$u = 1 + 2i$ ou $u = -1 - 2i$ - l'ensemble des solutions de $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ est $\{1 + 2i; -1 - 2i\}$ - l'ensemble des solutions de (E) est $\{3; 1 + 2i; -1 - 2i\}$	4,5 pts
6-a)	Justifions que les points $M_1; M_2$ et M_3 forment un triangle isocèle. $M_1; M_2$ et M_3 désignent les points images respectifs de $z_1 = 3; z_2 = 1 + 2i$ et $z_3 = -1 - 2i$. On a $M_1M_3 = z_1 - z_3 = 4 + 2i = \sqrt{4^2 + 2^2}ul = 2\sqrt{5}ul$. De même on a : $M_2M_3 = z_2 - z_3 = 2 + 4i = \sqrt{4^2 + 2^2}ul = 2\sqrt{5}ul$. On a alors $M_1M_3 = M_2M_3$. D'où les points $M_1; M_2$ et M_3 forment un triangle isocèle.	Identifie Les points $M_1; M_2$ et M_3 	.Pose $M_1M_3 = z_1 - z_3 $ $M_2M_3 = z_2 - z_3 $ 	Trouve : $M_1M_3 = 2\sqrt{5}ul$ $M_1M_3 = M_2M_3$ - Conclut les points $M_1; M_2$ et M_3 forment un triangle isocèle.	3 pts
6-b)	Justifions que le point G d'affixe $z_G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ est le centre du bord du couvercle du puits	Identifie Le point G ;	Pose $M_1G =$	Trouve $M_1G = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul$	

	puis déterminons une équation cartésienne de (Γ). $M_1G = z_1 - z_G = \left 3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i \right = \left \frac{7}{3} + \frac{1}{3}i \right = \frac{1}{3}\sqrt{7^2 + 1^2}ul = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul.$ $M_2G = z_2 - z_G = \left 1 + 2i - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i \right = \left \frac{1}{3} + \frac{7}{3}i \right = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 7^2}ul = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul.$ $M_3G = z_3 - z_G = \left -1 - 2i - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i \right = \left -\frac{5}{3} - \frac{5}{3}i \right = \frac{1}{3}\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}ul = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul.$ On a alors $M_1G = M_2G = M_3G$; d'où le point G d'affixe $z_G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ est le centre du bord du couvercle du puits. Equation cartésienne de (Γ). Soit $M(x; y)$ un point de (Γ). $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow GM^2 = M_3G^2 \Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = (\frac{5\sqrt{2}}{3})^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 15 = 0.$ D'où $(\Gamma): 3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$.	les points $M_1; M_2$ et M_3 Identifie (Γ)	$ z_1 - z_G $ $M_2G =$ $ z_2 - z_G $ $M_3G =$ $ z_3 - z_G $	$M_2G = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul$ $M_3G = \frac{5}{3}\sqrt{2}ul$ - Conclut que le point G d'affixe $z_G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$ est le centre du bord du couvercle du puits. $(\Gamma): 3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$	6 pts
		09 Ca	14 Cm	19 Co	21 pts
Problème 3					
7-a)	<u>Etudions les variations de g</u> $g(x) = x \ln x + 1$ La fonction g est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.	Identifie - La fonction g $g'(x)$ et	Utilise la formule de dérivation de la somme de deux fonctions	Trouve $g'(x) = \ln x + 1$	

	Pour tout $x \in]0 ; +\infty[, g'(x) = \ln x + 1$. $\begin{cases} \forall x \in]0; e^{-1}[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]e^{-1}; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g'(e^{-1}) = 0 \end{cases}$ Par suite g est strictement décroissante sur $]0 ; e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1} ; +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ <u>Tableau de variation de g</u> <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>e^{-1}</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>- 0 +</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>1</td><td>$1 - e^{-1}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	e^{-1}	$+\infty$	$g'(x)$		- 0 +		$g(x)$	1	$1 - e^{-1}$	$+\infty$	son signe Limites de g aux bornes de l'ensemble de définition	- Utilise une méthode pour déterminer le sens de variation de g - Utilise les propriétés $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ - Présente la forme du tableau de variations de g	- Le signe de $g'(x)$ - Le sens de variation de g $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ $g(e^{-1}) = 1 - e^{-1}$ - Le tableau de variations de g	8 pts
x	0	e^{-1}	$+\infty$														
$g'(x)$		- 0 +															
$g(x)$	1	$1 - e^{-1}$	$+\infty$														
7-b)	Déduisons-en que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \neq 0$ D'après 6-a), f admet un minimum en e^{-1}, ainsi $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq g(e^{-1})$ Et $g(e^{-1}) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$. $g(e^{-1}) > 0$, donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$. D'où $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \neq 0$	Identifie le tableau de variation de g	Utilise une méthode convenable pour justifier que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$	Trouve $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$ - Conclut que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \neq 0$	2,5 pts												
8-	<u>Prouvons que l'ensemble de définition D de</u>	Identifie :	Ecrit :	Trouve :													

a)	<u>est $\mathbb{R}$</u> $\begin{cases} f(x) = - \int_x^0 \frac{1 + e^{2t}}{(1 + e^t)^2} dt + 1, \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x \ln x + 1} + 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 = \left\{ x \in]-\infty ; 0], t \mapsto \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} \text{ continue sur } [x ; 0] \right\}$ et $D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x \ln x \neq 0\}$ D_1 Les fonctions $t \mapsto 1 + e^{2t}$ et $t \mapsto (1 + e^t)^2$ sont continues sur $] - \infty; 0]$ et $\forall t \in]-\infty ; 0], 1 + e^t \neq 0$. Alors, la fonction $t \mapsto \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $] - \infty; 0]$. $x \in]-\infty ; 0]$ alors la fonction $t \mapsto \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $[x ; 0]$ Ainsi, $D_1 =] - \infty; 0]$ D_2 d'après 7- b), $\forall x \in]0; +\infty[, x \ln x + 1 \neq 0$ $D_2 =]0; +\infty[$ D'où $D = \mathbb{R}$	La fonction f	$D = D_1 \cup D_2$ $D_1 = \left\{ x \in]-\infty ; 0], t \mapsto \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} \text{ continue sur } [x ; 0] \right\}$ $D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x \ln x \neq 0\}$	$D_1 =] - \infty; 0]$ $D_2 =]0; +\infty[$ $D = \mathbb{R}$	I II III	3 pts
----	--	-----------------	---	--	-------------------------------	-------

8- b)	Etudions la continuité de f en 0 On a : $0 \in D$ $f(0) = - \int_0^0 \frac{1 + e^{2t}}{(1 + e^t)^2} dt + 1 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(- \int_x^0 \frac{1 + e^{2t}}{(1 + e^t)^2} dt + 1 \right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x \ln x + 1} \right) + 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0), \text{ d'où } f \text{ est continue en } 0.$	Identifie La fonction f et 0	Utilise une méthode pour étudier la continuité de f en 0	Trouve : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ f est continue en 0	3 pts
9- a)	Justifions que pour tout t élément de $]-\infty; 0], \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} = 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$ $\forall t \in]-\infty; 0], \frac{1 + e^{2t}}{(1 + e^t)^2} = \frac{1 + 2e^t + e^{2t} - 2e^t}{(1 + e^t)^2}$ $= \frac{(1+e^t)^2 - 2e^t}{(1+e^t)^2}$ Ainsi $\forall t \in]-\infty; 0], \frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} = 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$	Identifie : $\frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} \text{ et } 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$	Utilise une méthode pour justifier l'égalité	Trouve : $\frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} = 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}$	1,5 pts

9-b)	Justifions que pour tout x élément de $] -\infty; 0]$, $f(x) = x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$. $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = - \int_x^0 \frac{1 + e^{2t}}{(1 + e^t)^2} dt + 1$ D'après 8-a), $\frac{1+e^{2t}}{(1+e^t)^2} = 1 - \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}, \forall t \in]-\infty; 0]$ Donc, $\begin{aligned} \forall x \in]-\infty; 0], f(x) &= - \int_x^0 \left(1 - \frac{2e^t}{(1 + e^t)^2} \right) dt + 1 \\ &= - \int_x^0 dt + 2 \int_x^0 \left(\frac{e^t}{(1 + e^t)^2} \right) dt + 1 \\ &= -[x]_x^0 + 2 \left[-\frac{1}{1 + e^t} \right]_x^0 + 1 \\ &= x + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^x} \right) + 1 \\ &= x + 1 - 1 + \frac{2}{1 + e^x} \end{aligned}$	Identifie : La fonction f sur $] -\infty; 0]$	Utilise une méthode pour justifier l'égalité	Trouve : $f(x) = x + 1 - 1 + \frac{2}{1 + e^x}$ Conclut : $f(x) = x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$	2,5 pts
------	--	--	---	--	---------

	$= x + 1 + \frac{2 - 1 - e^x}{1 + e^x}$ Ainsi, $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$				
9- c)	Etudions la dérivabilité de f en 0 Dérivabilité à gauche en 0 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} - 1}{x - 0}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1 + e^x}\right)$ $= \frac{1}{2}$ Car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{e^x + 1}\right) = \frac{1}{2}$ Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$. Dérivabilité à droite en 0 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x \ln x + 1} + 1 - 1}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x + 1}$ Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$. On a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$; donc f n'est pas dérivable en 0. <u>Interprétation</u>	Identifie : La fonction f et 0 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$	Pose : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} - 1}{x - 0}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x \ln x + 1} + 1 - 1}{x}$	Trouve : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ Puis conclut que f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ puis conclut que f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$. $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ puis conclut que f n'est pas dérivable en 0. deux demi-tangentes de supports distincts définies par : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et}$	5 pts

	La courbe (C)admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes de supports distincts définies par : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x \end{cases}$			$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x \end{cases}$ 	
10)	Achèvons l'étude des variations de f Les fonctions $x \mapsto x ; x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $] -\infty ; 0[$. Alors les fonctions $x \mapsto x + 1 ; x \mapsto 1 + e^x ; x \mapsto 1 - e^x$ sont dérivables sur $] -\infty ; 0[$. Et $\forall x \in] -\infty ; 0[, 1 + e^x \neq 0$. Donc la fonction $x \mapsto x + 1 + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$. D'où f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$. Les fonctions $x \mapsto x ; x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $] 0 ; +\infty[$. Alors la fonction $x \mapsto x \ln x + 1$ est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$ et $\forall x \in] 0 ; +\infty[, x \ln x + 1 \neq 0$.Donc la fonction $x \mapsto 1 + \frac{x}{x \ln x + 1}$ est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$. D'où f est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$. $\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) = \frac{-e^x(1 + e^x) - e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2}$ $f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ $\forall x \in] 0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{x \ln x + 1 - (\ln x + 1)x}{(\ln x + 1)^2}$ $= \frac{1-x}{(\ln x + 1)^2}$ <u>Signe de $f'(x)$</u> $\forall x \in] -\infty ; 0[, f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$	Identifie : - La fonction f $f'(x)$ et son signe - Limites de f aux bornes de l'ensemble de définition <			

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1 + e^{2x}}{(1 + e^x)^2} > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - x}{(\ln x + 1)^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, (\ln x + 1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(1 - x)$

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\forall x \in]0; 1[, \frac{1-x}{(\ln x+1)^2} > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, \frac{1-x}{(\ln x+1)^2} < 0$$

Il en résulte

$$\text{que : } \begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ f'(x) < 0, \forall x \in]1; +\infty[\\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

Sens de variation de f

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; 1]$

La fonction f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Limites de f aux bornes de D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \right) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \ln x + 1} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x + \frac{1}{x}} + 1 \right)$$

$$= 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tableau de variation de f

On a : $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$

	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td> </td><td>+ 0 -</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	+		+ 0 -		$f(x)$	$-\infty$		2	1				
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																
$f'(x)$	+		+ 0 -																	
$f(x)$	$-\infty$		2	1																
11-a)	Démontrons que pour tout x élément de $]-\infty; 0]$, $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = x + 1 + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ $= x + 1 + \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x}$ $= x + 1 + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ D'où $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$	Identifie de f sur $]-\infty; 0]$ 	Utilise une méthode pour démontrer l'égalité 	Conclut : $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$ 	1,5 pts															
11-b)	Etudions les branches infinies à la courbe (C). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}}{x}$	Identifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	Utilise une démarche d'étude d'une branche infinie d'une courbe	Trouve - la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 2$																

	$= 1 + \frac{2}{x} - \frac{2e^x}{x(1+e^x)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2e^x}{x(1+e^x)} \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x}{x(1+e^x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{2e^x}{(1+e^x)} \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x}{x(1+e^x)} \right) = 0$ Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x} - x \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{2e^x}{1+e^x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x}{1+e^x} \right) = 0$ On a donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 2$ Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.			*la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.	4 pts
12-a)	Démontrons que la restriction ϕ de f à l'intervalle $[1; +\infty[$ est une bijection de	Identifie ϕ comme la	Utilise une propriété pour démontrer que f est bijection	Trouve : ϕ est une bijection de	

	[1; +∞[sur un intervalle J à préciser. f est continue et strictement décroissante sur $[1; +∞[$ et $f([1; +∞[) =]1; 2]$. Donc, f réalise une bijection de $[1; +∞[$ sur $J =]1; 2]$. ϕ étant la restriction de f à l'intervalle $[1; +∞[$, alors ϕ est une bijection de $[1; +∞[$ sur $]1; 2]$	restriction de f à $[1; +∞[$ 		$[1; +∞[$ sur J $J =]1; 2]$ 	2 pts
12-b)	Construisons (C) et (C') dans le même repère.	Identifie : - Le tableau de variation f - Les branches infinies de (C) - Identifie ϕ^{-1} 	- Réalise un repère orthonormé - Utilise une propriété pour la construction de (C') - Trace la droite d'équation $y = x$ 	Construit la courbe (C) Construit la courbe (C') 	5 pts
13)	Calculons l'aire du domaine où abrite le jardin de Abou Ce domaine est délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -5$ et $x = -3$. Soit $\mathcal{A}$ cette aire	Identifie le domaine	Pose : $\mathcal{A} = \int_{-5}^{-3} -f(x)dx$ u.a 	Trouve: $\mathcal{A} = 4 + 2 \left(\ln \frac{e^3+1}{e^3} - \ln \frac{e^5+1}{e^5} \right)$ u.a	

	$\mathcal{A} = \int_{-5}^{-3} -f(x)dx \text{ u.a}$ $= - \int_{-5}^{-3} \left(x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x} \right) dx \text{ u. a.}$ $= - \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x - 2 \ln(1 + e^x) \right]_{-5}^{-3} \text{ u.a}$ $= - \left[\frac{1}{2} (-3)^2 + 2(-3) - 2 \ln(1 + e^{-3}) \right.$ $\quad \left. - \left(\frac{1}{2} (-5)^2 + 2(-5) - 2 \ln(1 + e^{-5}) \right) \right] \text{ u. a}$ $\mathcal{A} = 4 + 2 \left(\ln \frac{e^3 + 1}{e^3} - \ln \frac{e^5 + 1}{e^5} \right) \text{ u. a}$		Utilise une méthode pour déterminer l'intégrale 		2,5 pts
	Récapitulatif Problème3	22 Ca	33 Cm	47 Co	51 pts
	Récapitulatif des 3 problèmes	40 Ca ↔ 20 pts 1 Ca = 0,5 pt	60 Cm ↔ 30 pts 1 Cm = 0,5 pt	80 Co ↔ 40 pts 1 Co = 0,5 pt	90 pts
Critère de perfectionnement Soit N la note sur 90 et P le critère de perfectionnement			• Si $N < 40$ alors $P = 0$ • Si $40 \leq N < 60$ alors $00 < P \leq 05$ • Si $N \geq 60$, alors $00 < P \leq 10$		10 pts •

RECOMMANDATIONS

- Lire attentivement la production de chaque candidat
- Pour chaque question, présenter la note obtenue par le candidat dans la marge comme suit : $Ca + Cm + Co = t$
- Marquer sur la copie du candidat N, P , la note sur cent puis la note sur 20 arrondie à l'unité supérieure.



MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS
SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA
FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

SECRETARIAT GÉNÉRAL DU MINISTÈRE

DIRECTION DÉPARTEMENTALE DES
COLLINES - DDESTFP/Col

Route de l'aéroport
BP : 10 BP 250 Cotonou BENIN
Tél : (229) 21 32 38 43 ; Fax : 21 32 41 88
web : www.enseignementsecondaire.gouv.bj

EXAMEN-BLANC DÉPARTEMENTAL DES COLLINES, SESSION D'AVRIL 2024

ANNEE SCOLAIRE : 2023-2024

E125

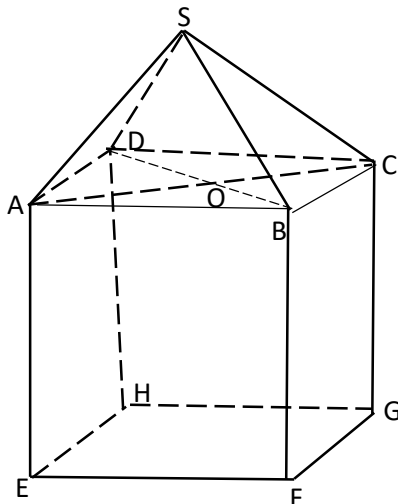
NIVEAU: BAC

DUREE : 04H

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : Achat d'un casque pour sa propre sécurité.

Dans l'optique d'assurer la sécurité des usagers de routes, surtout ceux à motos, le gouvernement d'un pays les contraint avec toutes les rigueurs possibles au port de casque. En effet, Dossou accompagné de son fils Steev, s'est rendu dans un centre d'une ONG où les casques sont exceptionnellement moins chers, pour se procurer de deux casques. Ce centre dispose d'une caisse qui a la forme d'un cube $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide régulière $SABCD$ séparée en des compartiments représentée ci-dessous,



Données :

- L'unité de longueur est 2 m
- O est le centre de la face $ABCD$
- $\vec{OS} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$
- $OA = 1$

Pour faciliter les calculs, il rapporte l'espace au repère $(O; \vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OS})$. Dans ce repère, une vidéo-surveillance est placée à un endroit assimilable au point $K(0; -1 - 2\sqrt{2}; 2)$. L'un des compartiments de la pyramide est le tétraèdre $ODCN$ où N est le projeté orthogonal de D sur la droite (SC) .

Un jeu de loterie a été organisé pour les acheteurs de casques.

Pour alimenter la caisse en électricité un circuit électrique a été mis en place.

Steev désire :

- déterminer la hauteur de la caisse et calculer le volume de l'un de ses compartiments.
- tracer une portion du circuit électrique mis en place

Tâche : Tu es invité(e) à assister Steev en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) Démontre que le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé direct.
- 2) a) Justifie que les droites (OS) et (AE) sont parallèles.
b) Justifie que $AE = 2\sqrt{2} m$.
c) Déduis-en que la hauteur de la caisse est $h = (2 + 2\sqrt{2})m$.
- 3) a) Détermine les coordonnées de chacun des points D , F et C .
b) Détermine le vecteur $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DK}$ puis déduis-en que les points D , F et K sont alignés.
- 4) a) Vérifie que le point N a pour triplet de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$.
b) Calcule le volume du compartiment $ODCN$.

Problème 2

De cette caisse contenant 10 casques identiques dont 6 noirs et 4 blancs, Dossou choisit au hasard deux casques l'un après l'autre et sans les remettre après qu'il ait remis 10.000f au gérant du centre. Lorsque dans les choix des deux casques :

- se trouve un seul casque noir, le gérant lui retourne 3000f.
- se trouvent deux casques noirs, le gérant lui retourne 5000f.
- se trouvent deux casques blancs, le gérant ne retourne rien à Dossou.

On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le montant payé par Dossou pour acheter les deux casques.

5) Démontre que la probabilité pour que Dossou dépense moins d'argent est $P = \frac{1}{3}$

6) a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

- b) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
- c) Définis et construis la fonction de répartition F de X .

Problème 3

Dans un repère orthonormé $(\Omega ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan d'unité de longueur $2cm$, le circuit routier est assimilable à une portion de la courbe (Γ) d'une fonction f à variable réelle x définie par $f(x) = \ln[u(x)]$ où u est la solution de l'équation différentielle $(E) : 2y'' - y' - y = -2$ telle que $u(0) = -1$ et $u'(0) = 3$.

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 2x - 4$.

7)a) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : 2y'' - y' - y = 0$.

b) Détermine la fonction constante $\varphi : x \mapsto c$, avec $c \in \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) .

c) Démontre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - \varphi$ est solution de (E') .

d) Dédus-en que pour tout nombre réel x , on a : $u(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2$

8)a) Etudie les variations de la fonction P .

b) Démontre que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1,1 < \alpha < 1,2$.

c) Dédus-en le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

9) a) Justifie que pour tout nombre réel x , on a : $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot P(\sqrt{e^x})$

b) Démontre alors que l'ensemble de définition de f est $D =]2\ln\alpha ; +\infty[$

10) a) Etudie les variations de f .

b) Démontre que la courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en un seul point $T(\beta ; 0)$ telle que $\beta < 1$.

c) Vérifie que $e^\beta = [P(\sqrt{e^\beta})]^2$.

11) a) Démontre que: $\forall x \in D$, on a : $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x}\right)$.

b) Dédus-en que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ) .

c) Construis (Γ) .

FIN.

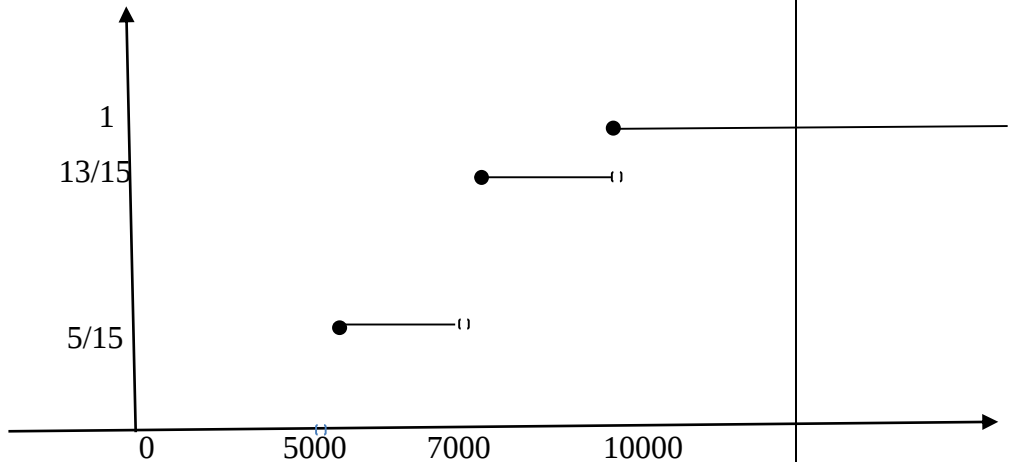
N° des questions	Éléments de réponses	Ca 1 Ca → 0,5	Cm 1 Cm → 0,5	Co 1 Co → 0,5	Total
1)	Problème 1 Démontre que le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé direct : Le triangle OAB est rectangle et isocèle en O. On a : $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ et $OA = OB$ $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OB}$ et $OS = OA \times OB \times \cos 90^\circ = 1$ On a : $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ $OA = OB = OS = 1$ - En imaginant un observateur d'Ampère, les pieds en O, la tête vers S et fixant le point A, le point B est à sa gauche. D'où le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé direct.	Le candidat Identifie : OAB est rectangle et isocèle en O I $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ I le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS})$ I	Le candidat Utilise les propriétés et démarches appropriées I	Le candidat Trouve $OS = 1$ I Conclut I	3pt
2) a)	Justifie que les droites (OS) et (AE) sont parallèles : SABCD est une pyramide régulière de sommet S et O le centre de la base ABCD alors $(OS) \perp (ABC)$ La droite (AE) est le support d'une hauteur relative à la base ABCD du cube ABCDEFGH alors $(AE) \perp (ABC)$. On a : $(OS) \perp (ABC)$ et $(AE) \perp (ABC)$ d'où les droites (OS) et (AE) sont parallèles.	Identifie (OS) et (AE) I	Utilise des propriétés de positions relatives de droites et plans I	Trouve $(OS) \perp (ABC)$ $(AE) \perp (ABC)$ II Conclut I	2,5pt
2) b)	Justifie que $AE = 2\sqrt{2} m$	Identifie	Pose :	Trouve	

	OAB est un triangle rectangle en O alors d'après la propriété de Pythagore, on a : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ $AB^2 = 1^2 + 1^2$ $AB = \sqrt{2}ul$ De plus, $ul = 2m$ et $AE = AB$ d'où $AE = 2\sqrt{2}m$	AE I ul I	AB^2 $= OA^2 + OB^2$ I $AE = AB$ I	$AB = \sqrt{2}ul$ I Conclut que $AE = 2\sqrt{2}m$ I	3pt
2) c)	Déduis-en que la hauteur de la tente est $h = (2 + 2\sqrt{2})m$: $h = OS + AE$ avec $OS = 1ul = 2m$ $h = 2m + 2\sqrt{2}m$ d'où $h = (2 + 2\sqrt{2})m$	Identifie les distances OS et AE I	Pose : $h = OS + AE$ I	Conclut que $h = (2 + 2\sqrt{2})m$ I	1,5pt
3) a)	Détermine les coordonnées de chacun des points D, F et C : $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ alors $D(0; -1; 0)$ $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF}$ $= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE}$ Puisque les droites (OS) et (AE) sont parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont colinéaires. De plus, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont de sens contraire puis $OS = 1$ et $AE = \sqrt{2}$, donc on a : $\overrightarrow{AE} = -\sqrt{2}\overrightarrow{OS}$ Ainsi, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} - \sqrt{2}\overrightarrow{OS}$ donc $F(0; -1; -\sqrt{2})$ $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ alors $C(-1; 0; 0)$	Identifie Les points D, F et C I Le repère I	Ecris les vecteurs en combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$ $\overrightarrow{OD}$ I $\overrightarrow{OF}$ II $\overrightarrow{OC}$ I	Trouve $D(0; -1; 0)$ I $F(0; -1; -\sqrt{2})$ I $C(-1; 0; 0)$ I	4,5pt

3) b)	Détermine le vecteur $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DK}$ puis déduis-en que les points D, F et K sont alignés : $\overrightarrow{DF}(0; 2; -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{DK}(0; -2\sqrt{2}; 2)$ $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DK} = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{OA} + \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{OB} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} \overrightarrow{OS}$ $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DK} = \vec{0}$ On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points D, F et K sont alignés.	Identifie les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DK}$ I	Utilise une méthode de calcul approprié I Utilise la définition du produit vectoriel I	Trouve : Les coordonnées de $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DK}$ II $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DK} = \vec{0}$ II Conclut que D, F et K sont alignés I	4pt
4) a)	Vérifie que le point N a pour triplet de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$: Considérons le triangle DCS avec $D(0; -1; 0)$, $C(-1; 0; 0)$ et $S(0; 0; 1)$. On a : $SC = SD = CD = \sqrt{2}$ Le triangle DCS est équilatéral. De plus, N est le projeté orthogonal de D sur (SC) alors N est le milieu du segment [SC] $N(\frac{x_S+x_C}{2}; \frac{y_S+y_C}{2}; \frac{z_S+z_C}{2})$ d'où le point N a pour triplet de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$	Identifie Le point N I Le triangle DCS I Reconnais N comme milieu du segment [SC] I	Pose $SC = SD = CD$ I Utilise la définition du projeté orthogonal d'un point sur droite I Pose les formules de coordonnées de N I	Trouve : DCS équilatéral I Les coordonnées de N III	5pt
4) b)	Calcule le volume V du compartiment ODCN :	Identifie	Pose la formule de V	Trouve	

	$V = \frac{1}{6} \overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}) \text{ avec } \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ On a : $V = \frac{1}{6} \overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$ $= \frac{1}{6} \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OS} $ $= \frac{1}{6} \left \frac{1}{2} \right uv$ $= \frac{1}{12} \times (2m)^3$ $V = \frac{2}{3} m^3$	le tétraèdre ODCN I	I Utilise une méthode de calcul du produit mixte I Pose $uv = (2m)^3$ I	$V = \frac{1}{12} uv$ I $V = \frac{2}{3} m^3$ I	3pt
Pondération du problème1		14 Ca	17 Cm	22 Co	26,5pt
5)	<u>Problème 2</u> Démontre que la probabilité pour que Dossou dépense moins est $P = \frac{1}{3}$: Soit l'univers associé à cette épreuve aléatoire : $Card(\Omega) = A_{10}^2 = 90$ Dossou dépense moins d'argent lorsque le gérant lui retourne 5000F c'est-à-dire après avoir tiré deux casques tous noirs, avec une probabilité égale à : $P = \frac{A_6^2}{Card(\Omega)} = \frac{30}{90} \text{ d'où } P = \frac{1}{3}$	Identifie L'univers Ω I L'événement «Dossou dépense d'argent » I	Traduis l'événement «Dossou dépense d'argent » I Utilise la propriété d'équiprobabilité en posant le rapport des cardinaux I	Trouve $Card(\Omega) = 90$ I $P = \frac{1}{3}$ I	3pt
6) a)	Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X : $X(\Omega) = \{7000 ; 5000 ; 10000\}$	Identifie X et la remise de 10000f I	Pose les probabilités $P(X = x_i)$	Trouve Les valeurs de X III	

	$P(X = 7000) = \frac{(A_6^1 \times A_4^1) \times 2}{Card(\Omega)} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$ $P(X = 5000) = P = \frac{1}{3}$ $P(X = 10000) = \frac{A_4^2}{Card(\Omega)} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ <table><tr><td>$X = x_i$</td><td>5000</td><td>7000</td><td>10000</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{8}{15}$</td><td>$\frac{2}{15}$</td></tr></table>	$X = x_i$	5000	7000	10000	$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$		III Résume la loi de X par un tableau I	Les probabilités P_i III	5,5pt
$X = x_i$	5000	7000	10000										
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$										
6) b)	Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X : $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P_i$ $E(X) = 5000\left(\frac{1}{3}\right) + 7000\left(\frac{8}{15}\right) + 10000\left(\frac{2}{15}\right)$ $E(X) = \frac{101000}{15} \approx 6733,33$ $V(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 P_i - (E(X))^2$ $V(X) = (5000)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (7000)^2\left(\frac{8}{15}\right) + (10000)^2\left(\frac{2}{15}\right) - (6733,33)^2$ $V(X) = 47800000 - (6733,33)^2 \approx 2462267,11$	Identifie les valeurs x_i et P_i I	Pose les formules de $E(X)$ et $V(X)$ II	Trouve : $E(X)$ I $V(X)$ I	2,5pt								

6) c)	Définis et représente la fonction de répartition F de X : F est définie de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ par : $F(x) = P(X \leq x)$ Ainsi, on a : Pour $x \in]-\infty; 5000[$, $F(x) = 0$ Pour $x \in [5000; 7000[$, $F(x) = \frac{5}{15}$ Pour $x \in [7000; 10000[$, $F(x) = \frac{13}{15}$ Pour $x \in [10000; +\infty[$, $F(x) = 1$ 	Identifie les valeurs x_i et P_i I	Définit F I Trace un repère I	Trouve F par intervalles II Trouve l'allure de la représentation de F II	3,5pt
Pondération du problème 2		5 Ca	10 Cm	14 Co	14,5pt

7) a)	Problème 3 : Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : 2y'' - y' - y = 0$. L'équation caractéristique associée à (E) est : $2r^2 - r - 1 = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9$ $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = 1$ Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x ; (A ; B) \in \mathbb{R}^2$	Identifie (E') I	Pose : $2r^2 - r - 1 = 0$ I Utilise une méthode pour résoudre $2r^2 - r - 1 = 0$ I Ecris $(A ; B) \in \mathbb{R}^2$ I	Trouve : Δ I r_1 I r_2 I Donne les solutions de (E) II	4,5pt
b)	Détermine la fonction constante $\varphi : x \mapsto c$, avec $c \in \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E): φ est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi'(x) = \varphi''(x) = 0$ φ solution de (E) alors $2\varphi''(x) - \varphi'(x) - \varphi(x) = -2 \Leftrightarrow c = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 2$	Reconnais que u est une solution de (E) I	Pose : $2\varphi''(x) - \varphi'(x) - \varphi(x) = -2$ I	Trouve : $\varphi'(x) = 0$ $\varphi''(x) = 0$ $c = 2$ III Conclut que $\forall x \in \mathbb{R},$ $\varphi(x) = 2$ I	3pt
7) c)	Démontre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - \varphi$ est solution de (E') : Soit g une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ Supposons que g est solution de (E) et montrons que $g - \varphi$ est solution de (E') g est solution de $(E) \Leftrightarrow$ $2g''(x) - g'(x) - g(x) = -2 \Leftrightarrow$ $2g''(x) - g'(x) - g(x) = 2\varphi''(x) - \varphi'(x) - \varphi(x) \Leftrightarrow$ $2(g - \varphi)''(x) - (g - \varphi)'(x) - (g - \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow$ $g - \varphi$ est solution de (E')	Identifie (E) et (E') I Reconnait que φ est solution de (E') : I	Utilise une démarche appropriée I	Conclut I	2pt

	On conclut qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - \varphi$ est solution de (E')				
7) d)	Déduis-en que pour tout nombre réel x, on a : $u(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2$ u est la solution de l'équation différentielle (E) alors $u - \varphi$ est solution de (E'). Donc pour tout nombre réel x, on a : $u(x) - \varphi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x ; (A ; B) \in \mathbb{R}^2$ $u(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x + \varphi(x) ; (A ; B) \in \mathbb{R}^2$ $u(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x + 2 ; (A ; B) \in \mathbb{R}^2$ $u'(x) = -\frac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x ; (A ; B) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} u(0) = -1 \\ u'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 2 = -1 \\ -\frac{1}{2}A + B = 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 1 \end{cases}$ D'où pour tout nombre réel x, on a : $u(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2$	Reconnait que u est la solution de (E) I Identifie Les solutions de (E') I $u(0) = -1$ $u'(0) = 3$ I	Pose $u(x) - \varphi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x$ I Utilise les propriétés pour dériver u I	Trouve $u'(x)$ I $A = -4$ $B = 1$ II Conclut que $u(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2$ I	4,5pt
8) a)	Etudie les variations de la fonction P. $D_P = \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x - 4$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ $= -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x - 4$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ $= +\infty$	Identifie P et D_P I	Utilise les propriétés pour dérivée P I Utilise les propriétés de limites à l'infini d'un polynôme I	Trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ II $P'(x)$ I Le signe de $P'(x)$	5pt

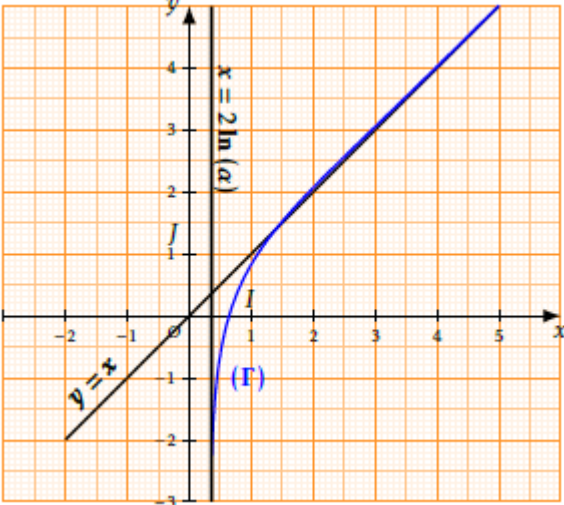
	P est une fonction polynôme, elle est alors continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $P'(x) = 3x^2 + 2$ $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) > 0$ La fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. <u>Tableau de variation de g</u> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P'(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2"> </ </td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P'(x)$	+		$P(x)$	</	
x	$-\infty$	$+\infty$								
$P'(x)$	+									
$P(x)$	</									

	Pour $x \in]-\infty; \alpha[$; $P(x) < 0$ Pour $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$ $P(\alpha) = 0$				
9) a)	Justifie que pour tout nombre réel x, on a : $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot P(\sqrt{e^x})$: $\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, u(x) &= -4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2 \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}(-4 + e^{\frac{3}{2}x} + 2e^{\frac{1}{2}x}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}(-4 + (e^{\frac{1}{2}x})^3 + 2e^{\frac{1}{2}x}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}(-4 + (\sqrt{e^x})^3 + 2\sqrt{e^x}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}((\sqrt{e^x})^3 + 2\sqrt{e^x} - 4) \end{aligned}$ D'où $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot P(\sqrt{e^x})$	Identifie u I	Utilise des démarches appropriées I	Conclut que $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot P(\sqrt{e^x})$ I	1,5pt
9) b)	Démontre alors que l'ensemble de définition de f est $D =]2\ln\alpha; +\infty[$ $\begin{aligned} f(x) &= \ln[u(x)] \\ D &= \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\} \\ u(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \cdot P(\sqrt{e^x}) > 0 \\ &\Leftrightarrow P(\sqrt{e^x}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{e^x}) > \alpha \\ &\Leftrightarrow e^x > \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow x > \ln\alpha^2 \\ &\Leftrightarrow x > 2\ln\alpha \text{ car } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]2\ln\alpha; +\infty[\text{ d'où } D =]2\ln\alpha; +\infty[\end{aligned}$	Identifie f et u I Le signe de P sur $] \alpha; +\infty[$ I	Pose : $\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\} \end{aligned}$ I Utilise une démarche appropriée pour résoudre $u(x) > 0$ I	Trouve : $e^x > \alpha^2$ I trouve que $D =]2\ln\alpha; +\infty[$ I	3pt

10) a)	Etudie les variations de f. $D =]2\ln\alpha; +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)]$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[-4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2 \right]$ $= +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2\ln\alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\ln\alpha^+} \ln[u(x)]$ $= -\infty$ car $u(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ La fonction u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur D et $\forall x \in D, u(x) > 0$ alors f est continue et dérivable sur D $\forall x \in D, \text{ on a : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}x} + e^x}{u(x)}$ $\forall x \in D, u(x) > 0$ et $2e^{-\frac{1}{2}x} + e^x > 0$ donc $\forall x \in D, f'(x) > 0$ La fonction f est strictement croissante sur D <u>Tableau de variation de f</u> <table><tr><td>x</td><td>$2\ln\alpha$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P'(x)$</td><td></td><td style="text-align: center;">+</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td style="text-align: center;">$+\infty$</td></tr><tr><td></td><td style="text-align: center;">$-\infty$</td><td></td></tr></table>	x	$2\ln\alpha$	$+\infty$	$P'(x)$		+	$P(x)$		$+\infty$		$-\infty$		Identifie f I Les bornes de D I	Utilise les limites de références $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ II Etudie la continuité et la dérivabilité de f sur D I Pose $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ I Utilise une méthode d'étude de signe de $f'(x)$ I Dresse le tableau de variation de f I	Trouve les limites de f aux bornes de D II Trouve $f'(x)$ II Trouve que $\forall x \in D, f'(x) > 0$ I Donne le sens de variation de f I	7pt
x	$2\ln\alpha$	$+\infty$															
$P'(x)$		+															
$P(x)$		$+\infty$															
	$-\infty$																

10) b)	Démontre que la courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en un seul point $T(\beta ; 0)$ telle que $\beta < 1$: La fonction f est continue et strictement croissant sur D telle que $f(D) = \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans D. De plus, on a : $f(1) \approx 2,29 > 0$ alors $\beta < 1$. D'où la courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en un seul point $T(\beta ; 0)$ telle que $\beta < 1$	Identifie Le sens de variation de f I Reconnait qu'il s'agit des solutions de $f(x) = 0$ I	Utilise une méthode appropriée I Compare $f(1)$ et $f(\beta)$ I	Trouve : $f(1) > 0$ $\beta < 1$ II Conclut I	3,5pt
10) c)	Vérifie que $e^\beta = [P(\sqrt{e^\beta})]^2$: $f(\beta) = 0$ alors $u(\beta) = 1$. Par ailleurs, $u(\beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta} \cdot P(\sqrt{e^\beta})$ On a alors $e^{-\frac{1}{2}\beta} \cdot P(\sqrt{e^\beta}) = 1$ ce qui équivaut à $e^{\frac{1}{2}\beta} = P(\sqrt{e^\beta})$ d'où $e^\beta = [P(\sqrt{e^\beta})]^2$	Identifie β et $u(\beta)$ I	Pose : $f(\beta) = 0$ I Utilise une démarche appropriée I	Trouve : $e^{\frac{1}{2}\beta} = P(\sqrt{e^\beta})$ I Trouve que $e^\beta = [P(\sqrt{e^\beta})]^2$ I	2,5pt
11) a)	Démontre que $\forall x \in D$, on a : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x})$ $\forall x \in D$, on a : $f(x) = \ln(-4e^{-\frac{1}{2}x} + e^x + 2)$ $= \ln e^x (1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x})$	Identifie f I	Utilise une démarche appropriée I	Conclut I	1,5pt

	$= \ln e^x + \ln \left(1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x} \right) \text{ d'où}$ $\forall x \in D, f(x) = x + \ln \left(1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x} \right)$				
11) b)	Déduis-en que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + 2e^{-x} - 4e^{-\frac{3}{2}x} \right)$ $= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ D'où la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (Γ)	Identifie la borne $+\infty$ de D I	Pose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ I	Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ I Conclut I	2pt
11) c)	Construis (Γ) : $\lim_{x \rightarrow 2\ln \alpha^+} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2\ln \alpha$ est asymptote à (Γ) Point particulier : $T(\beta ; 0)$	Identifie le sens de variation de f I	Trace le repère I Construis les deux asymptote de (Γ) II	Donne la branche infinie de (Γ) au voisinage de $2\ln \alpha$ à droite II Donne l'allure juste de (Γ) II	4pt

				
Pondération du problème 3	21 <i>Ca</i>	33 <i>Cm</i>	44 <i>Co</i>	49 <i>pt</i>
Total N	40 <i>Ca</i>	60 <i>Cm</i>	80 <i>Co</i>	90 <i>pt</i>

Soit N la note sur 90 et P la note du le critère de perfectionnement.

- Si $N < 40$, alors $P = 0$.
- Si $40 \leq N < 60$, alors $P \leq 5$.
- Si $N \geq 60$, alors $0 \leq P \leq 10$.



EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024

Niveau : BAC

Série : D

Durée : 4 heures

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

Contexte : Aménagement d'un jardin.

Dansou, un professeur de Maths, veut aménager le jardin de sa nouvelle maison.

Il veut faire réaliser un parterre de forme circulaire. Le plan du sol assimilé au plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; le parterre sera délimité par le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC où A, B et C sont les points images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(E): z^3 + (8 - 6i)z^2 + (7 - 36i)z - 36 - 48i = 0$;

$$\text{Im}(z_B) = 0, \text{Re}(z_C) = 0.$$

Des fleurs seront disposées suivant une ligne assimilée à une portion de la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction numérique f . Pour l'arrosage des fleurs, il est prévu un dispositif de stockage d'eau.

L'ouvrier en charge des travaux se préoccupe de déterminer (Γ) , de représenter la fonction f et de s'approprier le dispositif de stockage d'eau.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de l'ouvrier en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1

- 1- a) Résous l'équation (E) .
b) Justifie que $z_A = -4 + 3i$; $z_B = -4$ et $z_C = 3i$.
- 2- a) Démontre que le triangle ABC est rectangle.
b) Détermine une équation cartésienne de (Γ) .

Problème 2

Le dispositif de stockage de l'eau a la forme d'un tétraèdre $SEFG$. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points E, F et G appartiennent au plan (P) de

représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2t + t' + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t' - 1 \end{cases} \quad t, t' \text{ réels}.$$

E, F et G sont respectivement les points d'intersection du plan (P) avec les droites de repères respectifs $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$; S est le point d'intersection des plans

$$(P): x - y + z + 2 = 0; \quad (P'): x + y - z - 6 = 0 \quad \text{et} \quad (P''): 2x - y - z + 2 = 0.$$

- 1- a) Détermine une équation cartésienne du plan (P) .
- b) Détermine les coordonnées des points E, F, G et S .
- 2- Détermine la hauteur et le volume du tétraèdre $SEFG$.

Problème 3

La ligne courbe suivant laquelle seront plantées les fleurs est une portion de la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Cette portion est celle de la restriction de f à l'intervalle $[-8; e]$.

- 1- a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 2- Etudie les branches infinies de (C_f) .
- 3- a) Etudie le sens de variation de f .
- b) Achève l'étude des variations de f .
- c) Précise les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
- 4- Construis la courbe (C_f) sur $[-8; e]$.

FIN



EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024

Niveau : BAC

Série : D

Durée : 4 heures

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

GRILLE DE CORRECTION

N°	Éléments de réponses	Ca=1pt	Cm=1pt	Co=1pt	Pts
	Problème 1:	l'apprenant	l'apprenant	l'apprenant	
1) a	Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : (E): $z^3 + (8 - 6i)z^2 + (7 - 36i)z - 36 - 48i = 0$. Les affixes des points B et C étant solutions de (E) tels que $\text{Im}(Z_B) = 0$ et $\text{Re}(Z_C) = 0$ alors l'équation (E) admet une solution imaginaire ib et une solution réel a ; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. $z_0 = a$ solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 8a^2 + 7a - 36 = 0(1) \\ 6a^2 + 36a + 48 = 0(2) \end{cases}$ De (2) on a $a^2 + 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ ou $a = -2$. $a = -4$ seul $a = -4$ vérifie (1) d'où $z_0 = -4$ $z_1 = ib$ solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + 6b^2 + 7b - 48 = 0(3) \\ -8b^2 + 36b - 36 = 0(4) \end{cases}$ De (4) on a $2b^2 - 9b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = 3$ ou $b = \frac{3}{2}$. Seul $b = 3$ vérifie (3) d'où $z_1 = 3i$. En posant $P(z) = z^3 + (8 - 6i)z^2 + (7 - 36i)z - 36 - 48i$; on a $P(-4) = 0$ et $P(3i) = 0$ donc	Identifie : - L'équation (E). Les affixes des points B et C comme étant respectivement réel et imaginaire . $P(-4)=0$ et $P(3i) = 0$	Utilise : $z_0 = a$ et $z_1 = ib$ solutions de (E). - Une méthode pour trouver a - Une méthode pour trouver b - Une méthode pour déterminer la troisième solution de (E)	Trouve : - Les deux systèmes $\begin{cases} a^3 + 8a^2 + 7a - 36 \\ 6a^2 + 36a + 48 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -b^3 + 6b^2 + 7b - 48 \\ -8b^2 + 36b - 36 = 0 \end{cases}$ - Les solutions $z_0 = -4$ et $z_1 = 3i$. $c = -4 + 3i$ - L'ensemble des solutions $S = \{-4; 3i; -4 + 3i\}$.	10 pts

	$P(z) = (z + 4)(z - 3i)(z - c) = [z^2 + (4 - 3i)z - 12i](z - c)$ $P(z) = z^3 + (4 - 3i - c)z^2 + [-12i - c(4 - 3i)]z + 12ic.$ Par identification on a $\begin{cases} 4 - 3i - c = 8 - 6i \\ -12i - c(4 - 3i) = 7 - 36i \\ 12ic = -36 - 48i \end{cases}$ $c = -4 + 3i = \frac{7-24i}{-4+3i} = \frac{-36-48i}{12i}.$ Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). $S = \{-4; 3i; -4 + 3i\}.$	II	III	III	
b-	Justifions que $z_A = -4 + 3i$; $z_B = -4$; et $z_C = 3i$. A, B et C sont les points images des solutions de (E) tels $\text{Im}((Z_B) = 0$ et $\text{Re}(Z_C) = 0$ D'où $z_A = -4 + 3i$; $z_B = -4$; et $z_C = 3i$	Identifie : Les solutions de l'équation (E) I	Utilise : $\text{Im}((Z_B) = 0$ et $\text{Re}(Z_C) = 0$ I	Trouve: $z_A = -4 + 3i$; $z_B = -4$; et $z_C = 3i$ I	3pts
2-a	Démontrons que le triangle ABC est rectangle. On a : $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-4+3i+4}{-4+3i-3i} = -\frac{3i}{4} \in i\mathbb{R}^*$ D'où ABC est un triangle rectangle en A.	Identifie : Les points A, B et C par leurs affixes I	Utilise : Une propriété pour démontrer qu'un triangle est rectangle II	Trouve : ABC est un triangle rectangle II	5pts
2-b	Equation cartésienne du cercle (Γ). (Γ) étant circonscrit au triangle ABC rectangle en A alors [BC] est un diamètre du cercle. Le rayon r du cercle est $r = \frac{ z_B - z_C }{2} = \frac{ -4-3i }{2} = \frac{5}{2}$ et son centre I a pour affixe $\frac{z_B + z_C}{2} = -2 + \frac{3i}{2}$. Une équation du cercle (Γ) est donc $(x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$	Identifie : ABC triangle rectangle en A Le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC. I	Utilise : une méthode pour déterminer une équation cartésienne de (Γ). I	Trouve : une équation du cercle (Γ). I	3pts
	Total problème 1 :	5 points	8points	8points	21pts
	Problème 2:	l'apprenant	l'apprenant	l'apprenant	

1-a)	Déterminons une équation cartésienne du plan (Q) Soit $M(x; y; z)$ un point de (Q) on a : $M \in (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + t' + 1 & (1) \\ y = t + 1 & (2) \\ z = t' - 1 & (3) \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$ (2) $\Rightarrow t = y - 1$ (3) $\Rightarrow t' = z + 1$ t et t' dans (1) donne : $x + 2y - z - 4 = 0$ ainsi $(Q): x + 2y - z - 4 = 0$	Identifie : Le plan (Q) par sa représentation paramétrique I	Utilise : Une méthode convenable I	Trouve : $(Q): x + 2y - z - 4 = 0$ II	4pts
1) b)	Déterminons les coordonnées des points E, F, G et S : Soit (Δ_1) la droite de repère $(O, \vec{i})$ Soit (Δ_2) la droite de repère $(O, \vec{j})$ Soit (Δ_3) la droite de repère $(O, \vec{k})$ $\{E\} = (\Delta_1) \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} y_E = 0 \\ z_E = 0 \\ x_E + 2y_E - z_E - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$ $E(4; 0; 0)$	Identifie : La droite (Δ_1) par son repère et le plan (Q) par son équation cartésienne : I	Utilise : Une méthode convenable : I	Trouve : $F(4; 0; 0)$ I	3pts
	$\{F\} = (\Delta_2) \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ z_F = 0 \\ x_F + 2y_F - z_F - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$ $F(0; 2; 0)$	Identifie : La droite (Δ_2) par son repère et le plan (Q) par son équation cartésienne : I	Utilise : Une méthode convenable : I	Trouve : $F(0; 2; 0)$ I	3pts

	$\{G\} = (\Delta_3) \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} x_G = 0 \\ z_G = 0 \\ x_G + 2y_G - z_G - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$ $F(0; 0; -4)$	Identifie : • La droite (Δ_3) par son repère et le plan (Q) par son équation cartésienne : I	Utilise : • Une méthode convenable : I	Trouve : • $G(0; 0; -4)$ I	
	$\{S\} = (P) \cap (P') \cap (P'') \Rightarrow \begin{cases} x_S - y_S + z_S + 2 = 0 \\ x_S + y_S - z_S - 6 = 0 \\ 2x_S - y_S + z_S + 2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_S - y_S + z_S + 2 = 0 \\ -2y_S + 2z_S + 8 = 0 \\ -4z_S + 4 = 0 \end{cases}$ d' où $S(2; 5; 1)$	Identifie : • les plans $(P); (P') \text{ et } (P'')$ par leurs équations cartésiennes : I	• Résous le système obtenu en utilisant une méthode convenable : I	Trouve : • $S(2; 5; 1)$ I	3pts
2)	<u>Déterminons la hauteur et le volume du tétraèdre $SEFG$:</u> Soit h la hauteur issue du sommet S du tétraèdre $SEFG$: $h = d(S, (Q))$ $h = \frac{ x_S + 2y_S - z_S - 4 }{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \text{ ul}$ $h = \frac{7\sqrt{6}}{6} \text{ ul}$	Identifie : • S et (Q) respectivement par ses coordonnées et par son équation cartésienne : I	Ecrit: • $h = \frac{ x_S + 2y_S - z_S - 4 }{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \text{ ul}$ III	Trouve : • $h = \frac{7\sqrt{6}}{6} \text{ ul}$ I	5pts
	Soit V le volume du tétraèdre : $V = \frac{1}{6} \overrightarrow{SE} \cdot (\overrightarrow{SF} \wedge \overrightarrow{SG}) \text{ u.v}$ $\overrightarrow{SF} \wedge \overrightarrow{SG} (10; -8; 4)$ avec $\overrightarrow{SE}(2; -5; -1); \overrightarrow{SF}(-2; -3; -1); \overrightarrow{SG}(-2; -5; -5)$ $V = \frac{1}{6} (10(2) - 8(-5) + 4(-1))$ $V = \frac{28}{3} uv$	Identifie : • La pyramide $SEFG$: I	Pose : • $V = \frac{1}{6} \overrightarrow{SE} \cdot (\overrightarrow{SF} \wedge \overrightarrow{SG}) \text{ u.v}$ II	Trouve : • $V = \frac{28}{3} uv$ I	4pts
Total Problème 2		7points	10points	8points	25pts

	Problème 3 :				
1) a -	Justifions que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$				
	Soit D_f l'ensemble de définition de f : $D_f = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 = \{x \in]-\infty; 0] / x^2 e^x \in \mathbb{R}\}$ et $D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}$ $D_1 =]-\infty; 0]$ et $D_2 =]0; +\infty[$ $D_f = \mathbb{R}$	Identifie : la fonction f par son expression I	Ecrit: $D_f = D_1 \cup D_2$ $D_1 = \{x \in]-\infty; 0] / x^2 e^x \in \mathbb{R}\}$ et $D_2 = \{x \in]0; +\infty[/ x > 0\}$ I	Trouve : $D_f = \mathbb{R}$ $D_1 =]-\infty; 0]$ $D_2 =]0; +\infty[$ III	5pts
b)	Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0 : ❖ Continuité de f en 0 : $0 \in D_f$ et $f(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0 ❖ Dérivabilité de f en 0 : $0 \in D_f$ et $f(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln x) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0. Par conséquent f n'est pas dérivable en 0.	Identifie : La fonction f et 0 I	- Utilise la définition de la continuité en 0 - Ecris $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ - Utilise la définition de la dérivabilité en un réel x_0 d'une fonction III	Trouve : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ f continuité en 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ f est dérivable à gauche en 0 et non dérivable à droite en 0 puis conclut IIIII	9pts

2)	Etudions les branches infinies de la courbe (C_f) : Calculons : ❖ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ ❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty \end{cases}$ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$	Identifie : les bornes de D_f I	Ecrit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \ln x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x \ln x}{x}$ II	Trouve : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ - la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ - la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$ IIII	8pts
3) a	Etudions le sens de variation de f : ❖ Continuité et dérivabilité : Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $] -\infty; 0[$ alors la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et dérivables sur $]0; +\infty[$ alors la fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et par suite la fonction $x \mapsto x - x \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus f n'est pas dérivable en 0 (d'après 1b)) Il en résulte que f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.	Identifie : f	Utilise - les propriétés de continuité et de dérivabilité sur un intervalle. - Les opérations de dérivation des fonctions usuelles - Une méthode de détermination du signe de la fonction dérivée	Trouve : f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. - La fonction dérivée de f sur chacun des intervalles - Le signe de la fonction	

	❖ Dérivée : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\ln x \end{cases}$ ❖ Signe de $f'(x)$: ☞ Sur $]-\infty; 0[$ $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -2[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-2; 0[, f'(x) < 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ ☞ Sur $]0; +\infty[$ $\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ Au total on a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; 1[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]-2; 0[\cup]1; +\infty[, f'(x) < 0 \\ f'(-2) = f'(1) = 0 \end{cases}$ f est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ et sur $[0; 1]$ f est strictement décroissante sur $[-2; 0]$ et sur $[1; +\infty[$.			dérivée Le sens de f variation sur chacun des intervalles	8pts																			
		I	III	IIII																				
b)	Achevons l'étude des variations de f <u>Tableau de variation.</u> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>$4e^{-2}$</td><td>0</td><td>1</td><td>$-\infty$</td></tr></table> $f(-2) = 4e^{-2}$	x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	+	0	-	+	0	-	$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	1	$-\infty$	Identifie : Le signe de f' Les limites aux bornes de D_f	Réalise un tableau de variation	Trouve : Le tableau de variation	3pts
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$																			
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-																		
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	1	$-\infty$																			
		I	I	I																				

c)	Précisons les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses. Posons $f(x) = 0$. - Pour $x \leq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^x = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = 0$ (car $e^x \neq 0$) $\Leftrightarrow x = 0$. - Pour $x > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x \ln x = 0$ $\Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0$ $\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$ $\Leftrightarrow \ln x = 1$ $\Leftrightarrow \ln x = \ln e$ $\Leftrightarrow x = e$. (C_f) coupe $(0; \overrightarrow{e_1})$ aux points $O\binom{0}{0}$ et $A\binom{e}{0}$	Identifie : f I	Résoud l'équation $f(x) = 0$ I	Trouve : $x = e$ et $x = 0$ - Les points $O\binom{0}{0}$ et $A\binom{e}{0}$ II	4pts
4)	<u>Courbe de la fonction f :</u> $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ alors la courbe (C_f) admet à gauche au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet à droite au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	Identifie $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ - L'intervalle $[-8; e]$	Trace : Un repère	Conclut - la courbe (C) admet une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ - la courbe (C_f) admet une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Trace - Les demi-tangentes - La courbe de f	

		II	I	IIII	7pts
	Total problème 3	8points	12points	24points	44 pts
	Total :	20pts	30pts	40pts	90pts

Critères de perfectionnement (CP) : Soit N le total à l'écrit sur 90.

Trois modalités à observées pour attribuer les points de CP : Lisibilité de la copie (1) ; Propreté de la copie (2) ; l'originalité de la copie(3)

« Si $N < 40$, alors $Cp = 0$ »

« Si $40 \leq N < 60$, alors $0 \leq Cp \leq 5$ » : 2 points pour une modalité observée ; 4 points pour deux modalités observée ; 5 pour les trois observées

« Si $N > 60$, alors $0 \leq Cp \leq 10$ » : 4 point pour une modalité observée ; 7 points pour deux modalités observée ; 10 pour les trois observées



REPUBLIQUE DU BENIN

MINISTRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE,
TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DE L'OUEME

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : D

Durée : 4h

Contexte :

Chabi est un décorateur. Il a en charge la décoration d'une salle de fête. A ce sujet il veut utiliser des rubans pour joindre les sommets d'une pyramide $ABDCS$ et délimiter un domaine plan (Σ) .

Dans le plan (P) du plancher muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est $1cm$:

- les points A, B, C et D ont respectivement pour affixes les nombres complexes a, b, c et d vérifiant $Im(d) < Im(b) < Im(a) < Im(c)$ et qui sont des solutions de l'équation $T(z) = 0$ d'inconnue le nombre complexe z avec

$$T(z) = z^4 + (2 + 4i)z^2 + (4 + 8i)z + 8 + 8i ;$$

- G est le point défini par $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;
- le domaine (Σ) a pour bord une partie de la courbe représentative (C) d'une fonction f de IR vers IR et continue sur IR .

Le point S appartient à l'ensemble (Δ) des points M de l'espace orienté tels que $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{MC}$ où $\vec{u}$ est un certain vecteur.

Afiavi, une enfant de Chabi qui a pris connaissance des informations ci-dessus, veut déterminer un point K situé à égale distance des points A, B, C et D , l'aire du domaine (Σ) , ainsi que la distance du point S à l'un des plans du plafond de la salle modélisé par un plan (Q) .

Tâche : Tu vas assister Afiavi à travers la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1

1. a) Établis que $T(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$.
b) Résous l'équation $T(z) = 0$. Déduis-en que $a = -1 + i$; $b = -1 - i$; $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.
c) Écris chacun des nombres complexes a, b, c et d sous forme trigonométrique.
2. a) Place les points A, B, C et D dans le plan (P) .

- b) Donne la nature exacte de chacun des triangles ACD et BCD .
 c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques. Déduis-en l'abscisse du point K

Problème 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Le plan (Q) a pour équation cartésienne $2x - y - 2z - 5 = 0$. Le point S appartient au plan (R) contenant la droite (AC) et perpendiculaire au plan (Q) . On donne $A(1; 1; 1), B(1; 1; -1), C(2; 1; 2)$ et $\vec{u}(1; -2; 2)$.

3. a) Démontre que G est le barycentre des points pondérés $(A; -1), (B; 3)$ et $(C; -1)$.
 b) Calcule les coordonnées de G .
4. a) Exprime pour tout point M de l'espace, le vecteur $\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}$ en fonction du vecteur $\vec{MG}$. Déduis-en que (Δ) est une droite dont tu donneras un repère.
 b) Démontre que (Δ) est strictement parallèle à (Q) .
5. a) Détermine une équation cartésienne de (R) .
 b) Détermine la distance du point S au plan (Q) .

Problème 3

La fonction f est définie par
$$\begin{cases} f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{1-x}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
. Dans le

plan (P) muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (C) coupe la droite d'équation $y = x$ en un point dont l'abscisse est un nombre réel strictement positif α , (Σ) est la partie du plan délimitée

par les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$, la courbe (C) et le symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
7. a) Justifie que $f(0) = 0$.
 b) Étudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.
8. a) Justifie que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis étudie le sens de f' sur $]0; +\infty[$.
 b) Détermine $f'([0; +\infty[)$.
9. a) Étudie le sens de variation de f .
 b) Dresse son tableau des variations.
10. a) Démontre que le point de (C) d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est un point d'inflexion de (C) .
 b) Détermine la valeur exacte de α .
11. Sur un graphique autre que celui du 2. a), construis (C) et hachure le domaine (Σ) .
12. a) À l'aide d'une intégration par parties, établis que
$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [\ln(\alpha + 1) + 1 - \alpha - \alpha^2].$$

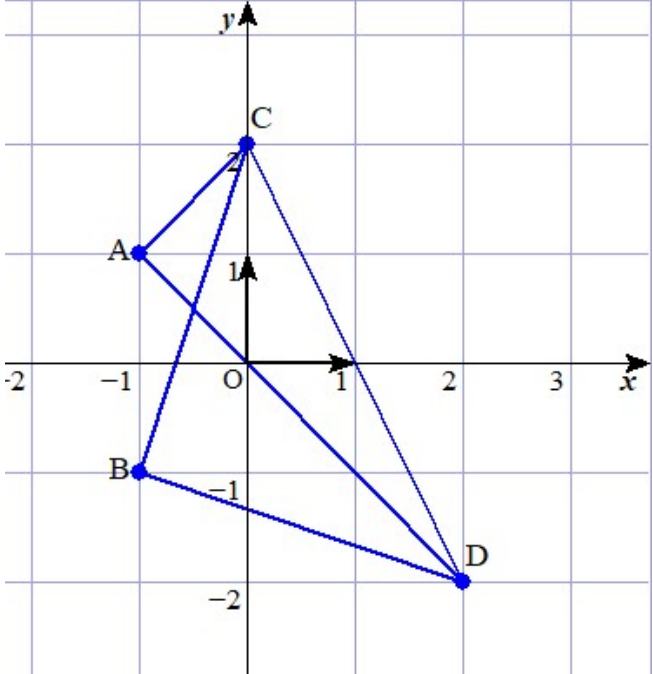
 b) Calcule en fonction de α l'aire du domaine (Σ) .

EXAMEN BLANC DU BCCALAUREAT**EPREUVE : Mathématiques****SERIE : D****GRILLE ET NORMES DE CORRECTION**

N°	Eléments de réponse	Capacité à Analyser (CA) 1 CA $\Leftrightarrow$ 0,5 point	Capacité à Mathématiser (CM) 1 CM $\Leftrightarrow$ 0,5 point	Capacité à Opérer (CO) 1 CO $\Leftrightarrow$ 0,5 point	Points
		Le candidat :			
Problème 1					
1)a)	Établissons que $T(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$ Par hypothèse $T(z) = z^4 + (2 + 4i)z^2 + (4 + 8i)z + 8i$ $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$ $= z^4 - 2z^3 + (4 + 4i)z^2 + 2z^3 - 4z^2 + (8 + 8i)z + 2z^2 - 4z + 8 + 8i = z^4 + (2 + 4i)z^2 + (4 + 8i)z + 8i$ D'où $T(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$	Identifie - l'expression $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$ $T(z)$	Utilise les règles de calculs pour le développement	Trouve le résultat	2

b)	Réolvons l'équation $T(z) = 0$. $T(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 2z + 2) = 0$ ou $(z^2 - 2z + 4 + 4i) = 0$ ➤ L'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$ a pour discriminant Δ_1 avec $\Delta_1 = (2i)^2$; ses solutions sont donc z' et z'' avec $z' = -1 - i$ et $z'' = -1 + i$ ➤ L'équation $z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$ a pour discriminant Δ_2 avec que $\Delta_2 = -12 - 16i$. Soit ω une racine carrée de Δ_2. Posons $\omega = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \cdot \Delta_2 = 20$ $\omega^2 = \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ a^2 - b^2 = -12 \\ 2ab = -16 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16 \\ ab < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$ Alors $\omega = 2 - 4i$ ou $\omega = -2 + 4i$ Prenons $\omega = 2 - 4i$. Donc les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$ sont les nombres complexes z_1 et z_2 avec $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = 2i$ L'ensemble solution de l'équation $T(z) = 0$ est $\{-1 - i; -1 + i; 2 - 2i; 2i\}$	•Identifie $T(z)$ $= (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 4 + 4i)$	• Ecris $T(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 2z + 2) = 0$ ou $(z^2 - 2z + 4 + 4i) = 0$ • Utilise la méthode de résolution d'une équation du second degré • Utilise une méthode pour déterminer une racine carrée d'un nombre complexe	Trouve • Δ_1 • une racine carrée de Δ_1 • $z' = -1 - i$ et $z'' = -1 + i$ • Δ_2 • une racine carrée de Δ_2 • $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = 2i$ • Donne l'ensemble des solutions	5,5
	Déduisons-en que $a = -1 + i; b = -1 - i; c = 2i$ et $d = 2 - 2i$. Par hypothèse a, b, c et d sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ et qui vérifient $Im(d) < Im(b) < Im(a) < Im(c)$ or $-1 - i; -1 + i; 2 - 2i; 2i$ sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ De plus $Im(2 - 2i) < Im(-1 - i) < Im(-1 + i) < Im(2i)$ D'où $a = -1 + i; b = -1 - i; c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.	•Identifie les solutions de l'équation $T(z) = 0$ $Im(d) < Im(b) < Im(a) < Im(c)$	• Ecris $-1 - i; -1 + i; 2 - 2i; 2i$ sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ et $Im(2 - 2i) < Im(-1 - i) < Im(-1 + i) < Im(2i)$	•Dédut que $a = -1 + i; b = -1 - i; c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.	1,5
c)	Écrivons chacun des nombres complexes a, b, c et d sous forme trigonométrique. $a = -1 + i$ $a = \sqrt{2}$ Soit θ_1 un argument de a	•Identifie $a = -1 + i; b = -1 - i; c = 2i$ et $d = 2 - 2i$	•Utilise la formule du module d'un nombre complexe écrit sous forme	•Trouve a $= \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$	

$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} \cos\theta_1 = -\cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\theta_1 = \sin\frac{\pi}{4} \end{cases}. \text{ On peut prendre } \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ Ainsi $a = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ $b = -1 - i$ $b = \sqrt{2}$ Soit θ_2 un argument de b $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} \cos\theta_1 = -\cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\theta_1 = -\sin\frac{\pi}{4} \end{cases}. \text{ On peut prendre } \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ Ainsi $b = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ $c = 2i$ $c = 2$ Soit θ_3 un argument de c $\begin{cases} \cos\theta_3 = 0 \\ \sin\theta_3 = 1 \end{cases} \text{ on peut prendre } \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ Ainsi $c = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ $d = 2 - 2i$ $d = 2\sqrt{2}$ Soit θ_4 un argument de d $\begin{cases} \cos\theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\theta_1 = -\sin\frac{\pi}{4} \end{cases}. \text{ On peut prendre } \theta_4 = -\frac{\pi}{4}$ Ainsi $d = 2\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$		algébrique • Utilise une méthode adéquate permettant de déterminer un argument d'un nombre complexe • Ecrit $\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4}$ • Ecrit $\theta_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$ • Ecrit $\theta_4 = -\frac{\pi}{4}$	b $= \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ $c = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ d $= 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$	5,5
---	--	---	--	-------------------

2)a)	Plaçons les points A, B, C et D dans le plan (P). 	•Identifie les affixes des points A, B, C et D	• Construit le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$	•Place les quatre points	3
b)	Donnons la nature exacte de chacun des triangles ACD et BCD. $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2i - (-1+i)}{2-2i-(-1+i)} = \frac{1}{3}i$ $\frac{1}{3}i \in i\mathbb{R}^*$ alors $(AC) \perp (AD)$ Donc le triangle ACD est rectangle en A $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{2i - (-1-i)}{2-2i-(-1-i)} = i$ $i \in i\mathbb{R}^*$ alors $(BC) \perp (BD)$ De plus $i = 1$ alors $\frac{CD}{DB} = 1$; $CD = DB$ Donc le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.	•Identifie les affixes des points A, B, C et D	•Utilise la propriété $\frac{z_M - z_N}{z_P - z_Q} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (MN) \perp (PQ)$ • Utilise la définition d'un triangle isocèle.	•Trouve $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{3}i$ et conclut •Trouve $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = i$ et conclut	3,5

c)	Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques. le triangle ACD est rectangle en A alors les points A, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD] le triangle BCD est rectangle et isocèle en B alors les points B, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD] En somme les points A, B, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD] D'où les points A, B, C et D sont cocycliques	●Identifie l'hypoténuse de chacun des triangles rectangles ACD et BCD	●Utilise un raisonnement adéquat	● Trouve que A, B, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD] ● Conclut que les points A, B, C et D sont cocycliques.	2
	Déduisons-en l'abscisse du point K Le point K est situé à égale distance des points A, B, C et D est le centre du cercle or le cercle a pour diamètre [CD] donc K est le milieu du segment [CD] $z_K = \frac{z_C + z_D}{2}$; $z_K = 1$ Ainsi K a pour abscisse 1.	Reconnait que ● K est équidistant des points A, B, C et D ● A, B, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD]	●Pose $z_K = \frac{z_C + z_D}{2}$	●Trouve $z_K = 1$	2
Récapitulatif problème 1		10 CA	16 CM	24 CO	25
Problème 2					
3)a)	Démontrons que G est le barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 3) et (C; -1). $\vec{AG} = 2\vec{AB} + \vec{CB}$ alors $\vec{AG} = 2\vec{AG} + 2\vec{GB} + \vec{CG} + \vec{GB}$ ainsi $\vec{AG} + 3\vec{GB} + \vec{CG} = \vec{0}$ soit $-\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$ Par ailleurs $-1 + 3 - 1 = 1$ et $1 \neq 0$ d'où G est le barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 3) et (C; -1).	●Identifie la relation $\vec{AG} = 2\vec{AB} + \vec{CB}$	●Utilise la relation de Chasles ●Etablit que $-\vec{GA} + 3\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$ et que $-1 + 3 - 1 \neq 0$	● Conclut G est le barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 3) et (C; -1).	2
b)	Calculons les coordonnées de G. G est le barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 3) et (C; -1) et A(1, 1, 1); B(1, 1, -1); C(2, 1, 2) $x_G = \frac{(-1)(1) + 3(1) + (-1)(2)}{-1 + 3 - 1} = 0$ $y_G = \frac{(-1)(1) + 3(1) + (-1)(1)}{-1 + 3 - 1} = 1$ $z_G = \frac{(-1)(1) + 3(-1) + (-1)(2)}{-1 + 3 - 1} = -6$	●Identifie G comme barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 3) et (C; -1)	●Utilise la formule qui donne les coordonnées du barycentre de n points pondérés	●Trouve G(0; 1; -6)	2,5

	D'où $G(0; 1; -6)$				
4)a)	Exprimons pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ • $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$ $= -\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ Comme G est le barycentre des points pondérés $(A; -1), (B; 3)$ et $(C; -1)$ alors $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MG}$	Identifie • $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ • G barycentre des points pondérés $(A; -1), (B; 3)$ et $(C; -1)$	• Utilise la relation de Chasles	• Trouve $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MG}$	2
	Déduisons-en que (Δ) est une droite dont tu donneras un repère. Soit M un point de l'espace. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{MC}$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge \vec{u} + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow -\overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ Or $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc (Δ) est une droite et un repère de (Δ) est $(G; \vec{u})$	• Identifie (Δ)	• Utilise une méthode appropriée • Utilise l'égalité $-\vec{u} \wedge \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \wedge \vec{u}$	• Trouve $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ • Conclut que (Δ) est une droite et un de repère de (Δ) est $(G; \vec{u})$	3
b)	Démontrons que (Δ) est strictement parallèle à (Q). $(Q): 2x - y - 2z - 5 = 0$ alors (Q) a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -1; -2)$ (Δ) a pour repère $(G; \vec{u})$ avec $G(0; 1; -6)$ et $\vec{u}(1; -2; 2)$ On a : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - (-2) - 2 \times 2 = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{n}$. Donc $(\Delta) \parallel (Q)$. On a : $-1 - 2 \times (-6) - 5 = 6$ et $6 \neq 0$ alors $G \notin (Q)$. Par suite (Δ) est strictement parallèle (Q).	• Identifie (Δ) et (Q)	• Écrit $\vec{n}(2; -1; -2)$ est un vecteur normal à (Q) • Utilise l'expression analytique du produit scalaire • Etablit que $G \notin (Q)$	• Déduit que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et que $(\Delta) \parallel (Q)$. • Conclut (Δ) est strictement parallèle (Q).	3

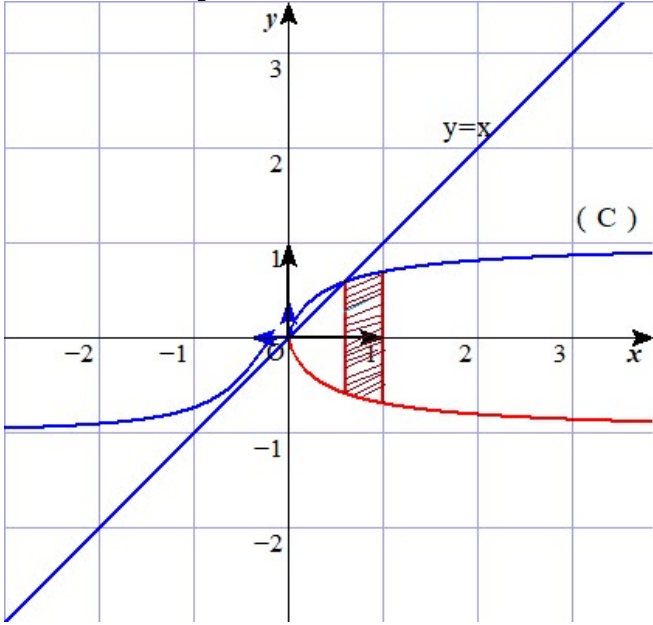
5)a)	Déterminons une équation cartésienne de (R). $(R) \perp (Q)$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à (Q) donc $\vec{n}$ dirige une droite du plan (R). On a : $(AC) \subset (R)$, $\overrightarrow{AC}(1; 0; 1)$ $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{n} \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right), \overrightarrow{AC} \wedge \vec{n}(1; 4; -1), \overrightarrow{AC} \wedge \vec{n} \neq \vec{0}$ alors (R) est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{n}$. (R) a une équation cartésienne de la forme $x + 4y - z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ De plus $1 + 4 - 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -4$. Donc (R) pour équation cartésienne $x + 4y - z - 4 = 0$.	Reconnait que $(R) \perp (Q)$ - Reconnait que $(AC) \subset (R)$	- Utilise une méthode pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{n}$ - Utilise $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{n}$ vecteur normal à (R) pour obtenir une équation de (R)	Trouve $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{n}(1; 4; -1),$ (R) pour équation cartésienne $x + 4y - z - 4 = 0$.	4
b)	Déterminons la distance du point S au plan (Q). $S \in (\Delta)$ et $S \in (R)$, d'une part. Alors $\overrightarrow{GS} = t\vec{u}(t \in \mathbb{R})$ soit $\begin{cases} x_S = t \\ y_S = 1 - 2t \\ z_S = -6 + 2t \end{cases}$; d'autre part $x_S + 4y_S - z_S - 4 = 0$. On a : $t + 4(1 - 2t) - (-6 + 2t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ Donc $S \in (\Delta) \cap (R) \Leftrightarrow S\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{14}{3}\right)$; $(Q): 2x - y - 2z - 5 = 0$ $d(S, (Q)) = \frac{\left 2 \times \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 \times \left(-\frac{14}{3}\right) - 5 \right }{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} u.l ; d(S, (Q)) = 2u.l$.	- Reconnait que $S \in (\Delta)$ et $S \in (R)$ - Identifie (Q).	Pose $\begin{cases} x_S = t \\ y_S = 1 - 2t \\ z_S = -6 + 2t \end{cases}$ $x_S + 4y_S - z_S - 4 = 0$ $d(S, (Q)) = \frac{ 2x_S - (x_S) - 2 \times (x_S) - 5 }{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$	Trouve ; $t = \frac{2}{3}$ $S\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{14}{3}\right)$ $d(S, (Q)) = 2u.l$	5
Récapitulatif problème2		10 CA	14 CM	19 CO	21,5
Problème3					
6)	Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ ➤ Pour $x > 0$, $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$	- Identifie f	- Ecrit $f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ - Utilise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$	Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$	3

	➤ Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{1-x}{x} e^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.		• Ecrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$		
7)a)	Justifions que $f(0) = 0$. f est continue sur $\mathbb{R}$; donc f est continue en 0. Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ Pour $x > 0$, $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ D'où $f(0) = 0$.	• Reconnaît que f est continue sur $\mathbb{R}$	• Utilise $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$	• Obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ • Trouve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et conclut que $f(0) = 0$	2
b)	Étudions la dérivabilité de f en 0. Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \ln(x+1) - \ln x$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+1) - \ln x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ Pour $x < 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$. Posons $X = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} (X^2 e^X - X e^X)$ Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. En somme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$; donc f n'est pas dérivable à droite en 0, f est pas dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 0$. D'où f n'est pas dérivable en 0.	• Identifie f sur chaque intervalle	Utilise une méthode pour calculer • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ • Utilise $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$	Trouve • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ • Conclut	4
	Donnons une interprétation géométrique du résultat obtenu. f est continue sur $\mathbb{R}$	• Reconnaît que f est continue en 0,		Définit • la demi-tangente à droite	1,5

	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ Alors (C) admet au point $O(0; 0)$ une demi-tangente à droite définie par $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ et une demi-tangente à gauche définie par $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$.	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$		• la demi-tangente à gauche 	
8)a)	Justifions que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$ Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x+1$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ en tant que fonctions polynômes De plus $\forall x \in]0; +\infty[, x+1 > 0$ et $x > 0$ donc les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(x+1)$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ D'où f est dérivable sur $]0; +\infty[$	• Identifie f sur $]0; +\infty[$ 	• Utilise un raisonnement adéquat 	• Trouve f est dérivable sur $]0; +\infty[$ 	1,5
	Étudions le sens de variation de f' sur $]0; +\infty[$. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln(x+1) - \ln x + x(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$ $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$ $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$ $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ Donc f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$	• Identifie f sur $]0; +\infty[$ 	• Utilise la dérivée du produit de deux fonctions $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ 	Trouve • $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ $\bullet f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$ $\bullet \forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$ et $f''(x) < 0$ • Conclut que f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ 	3,5
b)	Déterminons $f'([0; +\infty[)$. f' est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs :	• Identifie le sens de variation de f' sur $]0; +\infty[$	• Utilise la propriété de l'image d'un intervalle par une	• Trouve $f'([0; +\infty[) =]0; +\infty[$.	2,5

	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x + 1} \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x + 1} \right] = 0$ $f'([0; +\infty[) =]0; +\infty[.$		fonction continue et strictement monotone • Utilise $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ • écrit $f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x + 1} \text{ pour } x > 0.$ 														
9)a)	Étudie le sens des variations de f. ➤ Pour tout $x \in]-\infty; 0[, f(x) = \frac{1-x}{x} e^{\frac{1}{x}}$ La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $]-\infty; 0[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $]-\infty; 0[$. Par suite f est dérivable sur $]-\infty; 0[$. $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{-x-1+x}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1-x}{x^2} = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ donc $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$ ➤ $f'([0; +\infty[) =]0; +\infty[$ alors $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$. En somme, f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	Identifie • $f'([0; +\infty[)$ • $f(x)$ pour $x < 0$ 	Utilise • les propriétés permettant de déterminer l'ensemble de dérivabilité du produit de deux fonctions, de la fonction e^u et d'une fonction rationnelle. • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ • $(uv)' = u'v + v'u$ • $(e^u)' = u'e^u$ 	Obtient • f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ • $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ • $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ • f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 	5												
b)	Dressons le tableau des variations de f <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	+		+	$f(x)$	-1	0	1	Identifie • les limites aux bornes de $\mathbb{R}$ • le sens de variation de f 		• Dresse le tableau de variation de la fonction f 	2
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f'(x)$	+		+														
$f(x)$	-1	0	1														

10)a)	Démontrons que le point de (C) d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est un point d'inflexion de (C). $-\frac{1}{3} \in]-\infty; 0[$ et f est définie en $-\frac{1}{3}$ $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ f' est dérivable sur $]-\infty; 0[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]-\infty; 0[. \forall x \in]-\infty; 0[$, $f''(x) = -\left[-\frac{3x^2}{x^6} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{x^5} e^{\frac{1}{x}} (3x + 1)$ $\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{1}{x^5} e^{\frac{1}{x}} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ sur $]-\infty; 0[$, est celui de $3x + 1$ On a : $\begin{cases} 3x + 1 = 0 & \text{si } x = -\frac{1}{3} \\ 3x + 1 > 0 & \text{si } x \in]-\frac{1}{3}; 0[\\ 3x + 1 < 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\end{cases}$ Ainsi, pour tout élément x de $]-\infty; 0[$, on a : $\begin{cases} f''(x) = 0 & \text{si } x = -\frac{1}{3} \\ f''(x) > 0 & \text{si } x \in]-\frac{1}{3}; 0[\\ f''(x) < 0 & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\end{cases}$ d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est un point d'inflexion de (C).	Identifie $-\frac{1}{3}$ $f'(x)$ pour $x < 0$	Utilise - les propriétés nécessaires pour trouver la dérivée seconde de f - la propriété qui permet de justifier qu'un point est un point d'inflexion à la courbe d'une fonction	Trouve $\forall x \in]-\infty; 0[, f''(x) = \frac{1}{x^5} e^{\frac{1}{x}} (3x + 1)$ $f''(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{3}$; $f''(x) > 0$ si $x \in]-\frac{1}{3}; 0[$ et $f''(x) < 0$ si $x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[$ - conclut que le point de (C) d'abscisse $-\frac{1}{3}$ est un point d'inflexion de (C)	3.5
b)	Déterminons la valeur exacte de α. (C) coupe la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse α avec $\alpha > 0$. Alors $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases}$. $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha[\ln(\alpha + 1) - \ln \alpha] = \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\alpha + 1) - \ln \alpha = 1 \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 1 \\ \alpha > 0 \end{cases}$	Reconnaît que (C) coupe la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse α avec $\alpha > 0$	- Pose $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases}$ - Utilise les propriétés adéquate pour résoudre $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ \alpha > 0 \end{cases}$	- Obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 1$ - Trouve $\alpha = \frac{1}{e-1}$	2,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{\alpha} = e \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{e-1} \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\frac{1}{e-1} > 0$ donc $\alpha = \frac{1}{e-1}$.				
11)	Sur un graphique autre que celui du 2.a), construisons (C) et hachurons le domaine (Σ). $\left(-\frac{1}{3}\right) = -4e^{-3} \approx -0,2$ à 10^{-1} près $\alpha \approx 0,6$ à 10^{-1} près 	Identifie - le tableau des variations de f - les demi-tangentes de (C) au point d'abscisse 0 (Σ)	Construit - le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ - Construit les droites d'équations $y = 1$ et $y = -1$, - les demi-tangentes et tangentes à (C) en ces points d'abscisses 0 et $-\frac{1}{3}$.	- Construit (C) - hachure le domaine (Σ) 	4,5
12)a)	A l'aide d'une intégration par parties, établis que $\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [\ln(\alpha + 1) + 1 - \alpha - \alpha^2].$ α et 1 appartiennent à $]0; +\infty[$ et $f(x) = x[\ln(x + 1) - \ln x]$ si $x > 0$ alors $\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 x[\ln(x + 1) - \ln x] dx$.	Identifie $f(x)$ pour $x > 0$	Utilise - la formule d'intégration par parties - les propriétés qui permettent de déterminer une	Trouve $\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln(x + 1) - \ln x) \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$ 	3,5

	Posons $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x+1) - \ln x \end{cases}$; $\left\{ \begin{array}{l} \text{On peut prendre } u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} \end{array} \right.$ Les fonctions u' et v' sont continues sur $]0; +\infty[$, α et 1 appartiennent à $]0; +\infty[$ alors $\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln(x+1) - \ln x) \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ $\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2(\ln(\alpha+1) - \ln \alpha) + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^1 \frac{x}{x+1} dx$ $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \ln \alpha = 1$ $\int_{\alpha}^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_{\alpha}^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = [x - \ln x+1]_{\alpha}^1 = 1 - \ln 2 - \alpha + \ln(\alpha+1)$ Donc $\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\ln(\alpha+1)$. D'où $\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2]$.		primitive d'une fonction continue sur un intervalle $\bullet \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$	$\bullet \int_{\alpha}^1 \frac{x}{x+1} dx = [x - \ln x+1]_{\alpha}^1$ $\bullet \int_{\alpha}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2]$	
b)	Calculons en fonction de α l'aire du domaine (Σ). Soit $\mathcal{A}$ cette aire (Σ) est la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 1$, ($\mathcal{C}$) et le symétrique de ($\mathcal{C}$) par rapport l'axe des abscisses f est continue et positive sur $[1; \alpha]$ donc $\mathcal{A} = \int_1^{\alpha} (f(x) - (-f(x))) dx \text{ u. a}$ $\mathcal{A} = 2 \int_1^{\alpha} f(x) dx \text{ u. a}$, $\text{u. a} = 1 \text{ cm}^2$ donc $\int_1^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2}[\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2]$ D'où $\mathcal{A} = [\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2] \text{ cm}^2$.	Identifie $\bullet (\Sigma)$ $\bullet \int_1^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2}[\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2]$ $\bullet \text{u. a} = 1 \text{ cm}^2$	Ecrit $\bullet f$ est continue et positive sur $[1; \alpha]$ $\bullet \mathcal{A} = \int_1^{\alpha} (f(x) - (-f(x))) dx \text{ u. a}$	Trouve $\bullet \mathcal{A} = 2 \int_1^{\alpha} f(x) dx \text{ u. a}$ $\bullet \mathcal{A} = [\ln(\alpha+1) + 1 - \alpha - \alpha^2] \text{ cm}^2$	3,5
Récapitulatif problème 3		20 CA	30 CM	37 CO	43,5
Récapitulatif		40 CA	60 CM	80 CO	90

Critères minimaux (Note N)	$0 \leq N \leq 90$
----------------------------	--------------------

Critères de perfectionnement (Note Cp)	$\begin{cases} \text{Si } N < 40, \text{ alors } Cp = 0 \\ \text{Si } 40 \leq N < 60, \text{ alors } 0 \leq Cp \leq 5 \\ \text{Si } N \geq 60, \text{ alors } 0 \leq Cp \leq 10 \end{cases}$
Total (Note T)	$T = N + Cp$

Recommandations :

- Lire attentivement la production de chaque candidat.
- Pour chaque consigne, présenter la note obtenue par le candidat dans la marge comme suit : **Ca + Ca + Ca = t**
- Marquer sur la copie du candidat les notes **N** et **Cp** ensuite la note **T** sur **100** puis la note finale sur 20 arrondie à l'unité supérieure.



EXAMEN BLANC DU BAC, SESSION DE MARS 2024.

- CODE : H30

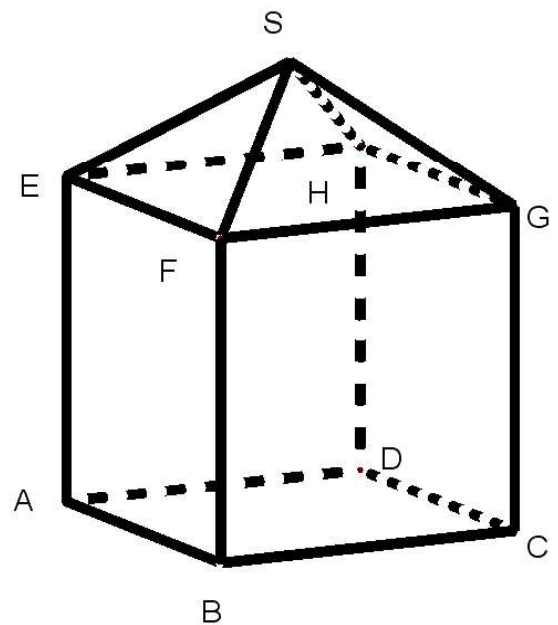
COEF :

DUREE: 04 HEURES

MATHS D

Contexte : Analyse géométrique et équipement d'un bâtiment municipal : Du cube à la pyramide

Le bâtiment municipal est composé d'un cube surmonté d'une pyramide. La salle dispose de trois lampes au plafond dont les positions sont représentées sur un même cercle (Γ), un rideau de séparation disposé perpendiculairement au plan du sol et supporté par une ficelle ; et des décorations fixées selon une équation spécifique. Les climatiseurs nécessaires sont déterminés par le volume du bâtiment. La zone d'exposition requiert un tapis vert, dont le coût est connu. Les documents techniques mentionnent les informations ci-dessous :



- L'espace étant muni du repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: le sommet S du toit a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4})$, la ficelle supportant le rideau est assimilable à une portion de la droite (Δ) de système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{-y}{4} \\ z = 1 \end{cases}$$
.
- Des objets de décoration sont fixés en des points de l'ensemble (Σ) des points M de l'espace tels que : $(2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$.
- Les bâtiments de la commune utilisent des climatiseurs de 400 kWh ou de 600 kWh, selon que leurs volumes soient inférieurs à 500 m^3 ou non.
- L'administration communale a décrit la zone d'exposition qu'elle voudrait aménager en la couvrant de tapis vert coutant 5000 F le mètre carré.

L'élève Dona doit caractériser ces éléments géométriques, choisir le bon climatiseur et estimer le coût du tapis.

Tache Tu vas aider BONA, en résolvant des trois problèmes suivants.

Problème 1

- 1) Détermine les coordonnées des points F, G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- 2) Détermine :
 - a- un repère de (Δ) .
 - b- une équation cartésienne du plan(Q) du rideau.
- 3) Détermine la nature et un repère de (Σ) .
- 4) Détermine le type de climatiseur adapté au bâtiment.

Problème 2

Le plan du plafond étant muni d'un repère orthonormé direct, les points représentant les positions des lampes plafonnieres sont les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$, où $P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 + (2 - 2i\sqrt{3})z - 4 - 4i\sqrt{3}$. Tu vas déterminer les racines de cette équation, résoudre des problèmes géométriques liés à ces positions, et trouver le centre et le rayon d'un cercle.

- 5)
 - a- Vérifie que $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$.
 - b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 6) Détermine :
 - a- une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$, où P_1, P_2 et P_3 désignent les points d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$.
 - b- la nature du triangle $P_1P_2P_3$.
 - c- le centre et le rayon de (Γ) .

Problème 3

Le plan du sol étant muni d'un repère orthonormé direct d'unité 1 dm, la zone d'exposition est délimitée par : l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -4$ et $x = -1$, et la courbe représentative (Γ_1) de la fonction numérique f de la variable

réelle x définie par
$$\begin{cases} f(x) = x \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
. Tu vas étudier cette fonction,

notamment ses variations, sa continuité, sa dérivabilité, et calculer l'aire de la zone d'exposition pour estimer le coût du tapis.

- 7)
 - a- Etudie le sens de variation de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par
$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$
 - b- Déduis-en que $\forall x \in]0; +\infty[, 0 < g(x) < 1$.

8)

- a- Détermine l'ensemble de définition de la fonction f .
- b- Etudie la continuité de f en 0 .
- c- Etudie la dérivabilité de f en 0 et interprète géométriquement les résultats obtenus.
- d- Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2 - g(x)$.
- e- Achève l'étude des variations de la fonction f .

9)

- a- Etudie les branches infinies de (Γ_1) .
- b- Construis la courbe (Γ_1) .

10)

- a- Détermine l'aire du domaine d'exposition.
- b- Donne une valeur approchée, à l'unité du mètre près, de cette aire.
- c- Dédus-en le coût du tapissage du domaine d'exposition.

**EXAMEN BLANC DU BACCALAUREAT
CLE & GRILLE DE CORRECTION
MATHEMATIQUES TLE D**

Pondérations	1 Ca → 1 pt	1 Cm → 1 pt	1 Co → 1 pt	Total
Eléments de réponse	Capacité << analyser >> Ca Le candidat	Capacité << mathématiser >> Cm Le candidat	Capacité << opérer>> Co Le candidat	
<u>Problème 1</u>				
1) <u>Déterminons les coordonnées des points F, G, H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.</u> ABFE étant un carré (en particulier un parallélogramme), alors : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AF} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$; F(1 ; 0 ; 1). ADGF étant un parallélogramme, alors : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$; G(1 ; 1 ; 1). ADHE étant un carré (en particulier un parallélogramme), alors : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AH} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$; H(0 ; 1 ; 1).	Identifie les points F, G, H 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer les coordonnées des points F, G, H 1 pt	Trouve : F(1 ; 0 ; 1) G(1 ; 1 ; 1) H(0 ; 1 ; 1) 3 pts	5 pts

<u>2)a) Déterminons un repère de (Δ).</u> Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. M appartient à (Δ) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que : $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{-y}{4} = t \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = t \\ \frac{-y}{4} = t \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4t \\ z = 1 \end{cases}$. Considérons le point $K(2 ; 0 ; 1)$ et le vecteur $\vec{u}(3 ; -4 ; 0)$. $(K ; \vec{u})$ est un repère de (Δ).	Identifie (Δ) par son système d'équations cartésiennes 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer un repère de (Δ). 1 pt	Trouve un repère de (Δ). 1 pt	3 pts
<u>2)b) Déterminons une équation cartésienne du plan(Q) du rideau.</u> $K(2 ; 0 ; 1)$; $\vec{u}(3 ; -4 ; 0)$; $(K ; \vec{u})$ est un repère de (Δ). Le plan (Q) contient la droite (Δ) et est disposé perpendiculairement au plan du sol, alors $(K ; \vec{u}, \vec{AE})$ est un repère de (Q). Par conséquent, $\vec{u} \wedge \vec{AE}$ est un vecteur normal à (Q). On trouve $\vec{u} \wedge \vec{AE}(-4 ; -3 ; 0)$. Donc (Q) admet une équation cartésienne de la forme $-4x - 3y + d = 0$, avec d un nombre réel. Comme (Q) passe par K, alors : $-4(2) - 3(0) + d = 0$; $d = 8$. Donc, $(Q) : -4x - 3y + 8 = 0$	Identifie un repère de (Q). 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour trouver un vecteur normal à (Q) 1 pt Utilise une démarche appropriée pour déterminer une équation cartésienne du plan(Q) 1 pt	Trouve le vecteur de coordonnées $(-4 ; -3 ; 0)$ comme un vecteur normal à (Q). 1 pt Trouve $(Q) : -4x - 3y + 8 = 0$ 1 pt	5 pts

3) Déterminons la nature et un repère de (Σ). (Σ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$. Soit I le milieu du segment [GH]. $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IH}) .$ $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IH}) .$ $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} .$ $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MI}$ Soit J le barycentre des points pondérés $(F, 2)$ et $(G, 1)$. $2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JF}) + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JG}) .$ $2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MJ} + (2\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{JG}) .$ $2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MJ} + \vec{0} .$ $2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MJ} .$ $M \in (\Sigma)$ équivaut successivement à :	Identifie (Σ) par son équation vectorielle 1 pt	Réduit chacune des sommées $2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$. 1 pt Écrit $M \in (\Sigma)$ équivalent à $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$ 1 pt	Trouve que (Σ) est une droite 1 pt Trouve que $(I; \overrightarrow{IJ})$ est un repère de (Σ) 1 pt	5 pts
---	---	---	--	---------------------

$(2\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = \vec{0}$; $(3\overrightarrow{MJ}) \wedge (2\overrightarrow{MI}) = \vec{0}$; $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$. Donc, (Σ) est la droite de repère $(I; \overrightarrow{IJ})$.				
<u>4) Déterminons le type de climatiseur adapté au bâtiment.</u> Pour cela, nous avons besoin du volume V du bâtiment. $V = V_1 + V_2$, où V_1 désigne le volume de la toiture et V_2 celui de la partie cubique. $V_1 = 2 \left(\frac{1}{6} \left \overrightarrow{ES} \cdot (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) \right \text{ u. v.} \right)$ $V_1 = \frac{1}{3} \left \overrightarrow{ES} \cdot (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) \right \text{ u. v.}$ $E(0; 0; 1) \quad ; \quad S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right) \quad ; \quad \overrightarrow{ES}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \quad ;$ $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} \quad ;$ $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}(0; 0; 1) .$ $\overrightarrow{ES} \cdot (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}(1) .$ $\overrightarrow{ES} \cdot (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) = \frac{1}{4} .$ $V_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right) \text{ u. v.} \quad ; \quad V_1 = \frac{1}{12} \text{ u. v.} \quad ; \quad V_1 = \frac{1}{12} (8\text{m})^3 \quad ;$	Identifie les deux types de climatiseurs disponibles 1 pt	Ecrit $V_1 = \frac{1}{3} \left \overrightarrow{ES} \cdot (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) \right \text{ u. v.}$ 1 pt	Trouve $V_1 = \frac{128}{3} \text{m}^3$ 1 pt Trouve $V = \frac{1664}{3} \text{m}^3$ 1 pt Trouve que le type de climatiseur adapté au bâtiment est celui de 600 kWh . 1 pt	5 pts

$V_1 = \frac{512}{12} \text{ m}^3$; $V_1 = \frac{128}{3} \text{ m}^3$. $V_2 = (8\text{m})^3$; $V_2 = 512 \text{ m}^3$. $V = V_1 + V_2$; $V = \frac{128}{3} \text{ m}^3 + 512 \text{ m}^3$; $V = \frac{1664}{3} \text{ m}^3$. $\frac{1664}{3} \approx 554,67$. Alors, $V > 500 \text{ m}^3$. Par conséquent, le type de climatiseur adapté au bâtiment est celui de 600 kWh .				
Récapitulatif problème 1	5 Ca → 5 pts	7 Cm → 7 pts	11 Co → 11 pts	23 pts
Problème 2				
5)a) Vérifions que $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$. On trouve $P(1 + i\sqrt{3}) = 0$. Alors $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$.	Identifie $P(z)$ 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour vérifier que $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$. 1 pt	Trouve $P(1 + i\sqrt{3}) = 0$. 1 pt Conclut que $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$. 1 pt	4 pts

<u>5)b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.</u> Comme $1 + i\sqrt{3}$ est une racine de $P(z)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que $P(z) = (z - 1 - i\sqrt{3})Q(z).$ On trouve $Q(z) = z^2 + 2z + 4$. On trouve $Q(z) = 0$ si et seulement si $z \in \{-1 - i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3}\}.$ Alors, L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ est $\{1 + i\sqrt{3} ; -1 - i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3}\}.$	Identifie $P(z)$ 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour factoriser $P(z)$. 1 pt Utilise une démarche appropriée pour résoudre $Q(z) = 0$ 1 pt	Trouve $Q(z) = z^2 + 2z + 4$ 1 pt Trouve l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. 1 pt	5 pts
<u>6)a) Déterminons une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$</u> Un argument du nombre complexe $\frac{z_{P_2} - z_{P_3}}{z_{P_2} - z_{P_1}}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$. $\frac{z_{P_2} - z_{P_3}}{z_{P_2} - z_{P_1}} = \frac{(-1+i\sqrt{3}) - (-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3}) - (1+i\sqrt{3})} ;$ $\frac{z_{P_2} - z_{P_3}}{z_{P_2} - z_{P_1}} = \frac{2i\sqrt{3}}{-2} ; \quad \frac{z_{P_2} - z_{P_3}}{z_{P_2} - z_{P_1}} = -i\sqrt{3} ;$ $\frac{z_{P_2} - z_{P_3}}{z_{P_2} - z_{P_1}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$ Donc, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$ est $-\frac{\pi}{2}$.	Identifie les affixes des points P_1, P_2 et P_3 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$. 1 pt	Trouve qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$ est $-\frac{\pi}{2}$ 1 pt	3 pts

<u>6)b) Déterminons la nature du triangle $P_1P_2P_3$.</u> Comme une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_2})$ est $-\frac{\pi}{2}$, alors le triangle $P_1P_2P_3$ est un triangle rectangle en P_2.	Identifie le triangle $P_1P_2P_3$ 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer la nature du triangle $P_1P_2P_3$ 1 pt	Trouve que $P_1P_2P_3$ est un triangle rectangle en P_2. 1 pt	3 pts
<u>6)c) Déterminons le centre et le rayon de (Γ).</u> Les positions des trois lampes plafonnères sont représentées par points du cercle (Γ). Les points représentant les positions des lampes plafonnères sont les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$. On remarque P_1, P_2 et P_3 sont les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$. Donc, (Γ) est le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$. Comme $P_1P_2P_3$ est un triangle rectangle en P_2, le centre de (Γ) est le milieu du segment $[P_1P_3]$ et son rayon est $\frac{P_1P_3}{2}$. $\frac{z_{P_1} + z_{P_3}}{2} = \frac{(1+i\sqrt{3}) + (-1-i\sqrt{3})}{2}$; $\frac{z_{P_1} + z_{P_3}}{2} = 0$. $\frac{P_1P_3}{2} = \frac{ (-1-i\sqrt{3}) - (1+i\sqrt{3}) }{2}$; $\frac{P_1P_3}{2} = \frac{ -2-2i\sqrt{3} }{2}$; $\frac{P_1P_3}{2} = \frac{4}{2}$; $\frac{P_1P_3}{2} = 2$. Donc : le centre de (Γ) est le point d'affixe 0 ; le rayon de (Γ) est 2.	Identifie (Γ) 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour trouver le centre et le rayon de (Γ). 1 pt	Trouve que le centre de (Γ) est le point d'affixe 0 1 pt Trouve que le rayon de (Γ) est 2. 1 pt	4 pts
Récapitulatif problème 2	5 Ca $\rightarrow$ 5 pts	6 Cm $\rightarrow$ 6 pts	8 Co $\rightarrow$ 8 pts	19 pts

Problème 3				
7)a) Etudions le sens de variation de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fonction rationnelle), en particulier sur $]0; +\infty[$. Par conséquent La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fonction rationnelle), en particulier sur $]0; +\infty[$. La fonction g est donc dérivable sur $]0; +\infty[$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right)$. $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$. $\forall x \in]0; +\infty[: \frac{1}{x^3} > 0 ; e^{-\frac{1}{x}} > 0 ; \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} > 0 ; g'(x) > 0$. $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$. Alors, g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.	Identifie g 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour trouver le sens de variation de g. 1 pt	Trouve que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. 1 pt	3 pts
7)b) Déduisons-en que $\forall x \in]0; +\infty[, 0 < g(x) < 1$ La fonction g étant continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors $g(]0; +\infty[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[$.		Utilise une démarche appropriée pour démontrer l'inégalité 1 pt	Trouve $g(]0; +\infty[) =]0; 1[$ 1 pt	3 pts

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} .$ $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = e^{-\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) .$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x} = -\infty ;$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t) = 0 .$ Par conséquent, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0 .$ $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} .$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 ;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 .$ Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 .$ Alors, $g(]0; +\infty[) =]0; 1[$. Donc, $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \in]0; 1[$. D'où, $\forall x \in]0; +\infty[, 0 < g(x) < 1 .$			Trouve que $\forall x \in]0; +\infty[,$ $0 < g(x) < 1 .$ 1 pt	
<u>8)a) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f</u> Soit D_f l'ensemble de définition de f. $D_f = D_1 \cup D_2 \cup \{0\} ,$ où $D_1 = \{x \in]-\infty ; 0[/ -x > 0\}$ et	Identifie f . 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer D_f . 1 pt	Trouve $D_f = \mathbb{R} .$ 1 pt	3 pts

$D_2 = \{x \in]0 ; +\infty[/ x \neq 0\} .$ $-x > 0$ équivaut à $x < 0$. Donc, $D_1 =]-\infty ; 0[$. $D_2 =]0 ; +\infty[\setminus \{0\}$; $D_2 =]0 ; +\infty[$. Alors, $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[\cup \{0\}$. $D_f = \mathbb{R}$				
<u>8)b) Etudions la continuité de f en 0 .</u> $f(0) = 0$. $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = x \ln(-x) .$ $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = -(-x) \ln(-x) .$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x \ln(-x)) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (t \ln t) = 0$. Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$. $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) .$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x} = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = 2$. Alors, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$.	Identifie f 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour la continuité de f en 0 . 1 pt	Conclut que f est continue en 0. 1 pt	3 pts

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$. Alors, la fonction f est continue en 0.				
<u>8)c) Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons géométriquement les résultats obtenus.</u> <u>Etudions dérivabilité de f en 0</u> $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = x \ln(-x) .$ $\forall x \in]-\infty ; 0[, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln(-x)}{x} = \ln(-x) .$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \ln(-x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \ln t = -\infty .$ Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty .$ Alors, la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 0. $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right)}{x} = 2 - e^{-\frac{1}{x}} .$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = 2 .$ Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 .$ Alors, la fonction f est dérivable à droite en 0 et on a	Identifie f 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 1 pt Utilise une démarche appropriée pour étudier la dérivabilité de f à droite en 0 1 pt Utilise une démarche appropriée pour interpréter les résultats obtenus. 1 pt	Conclut que f n'est pas dérivable à gauche en 0. 1 pt Conclut que f est dérivable à droite en 0 1 pt Trouve les interprétations géométriques correspondantes 2 pts	8 pts

$f'_d(0) = 2$. En somme, la fonction f n'est pas dérivable en 0 . <u>Interprétons géométriquement les résultats obtenus.</u> La courbe de f admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes respectivement définies par $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(0) \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 0 \\ y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \end{cases} .$ La courbe de f admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes respectivement définies par $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2x \end{cases} .$				
8)d) Démontrons que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, <u>$f'(x) = 2 - g(x)$.</u> $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right)$. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fonction rationnelle), en particulier sur $]0 ; +\infty[$. Par conséquent La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Par suite, La fonction $x \mapsto 2 - e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est aussi dérivable sur $]0 ; +\infty[$, alors f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) + x \left(-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right)$.	Identifie f 1 pt	Justifie que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. 1 pt Utilise les formules de dérivation nécessaires pour déterminer $f'(x)$, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ 1 pt	Trouve que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2 - g(x)$. 1 pt	4 pts

$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = 2 - e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} .$ D'où, $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = 2 - g(x) .$				
<u>8)e) Achéons l'étude des variations de la fonction f.</u> <u>Etudions le sens de variation de f</u> $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = 2 - g(x) .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[: 0 < g(x) < 1 ;$ $-1 < -g(x) < 0 ; 2 - 1 < 2 - g(x) < 2 ;$ $1 < 2 - g(x) < 2 ; 1 < f'(x) < 2 .$ Donc, $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) > 0 .$ $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = x \ln(-x) .$ La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable et strictement positive sur $] -\infty ; 0[$. Alors, la fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est aussi dérivable sur $] -\infty ; 0[$, alors f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $] -\infty ; 0[$. $\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = \ln(-x) + x \left(\frac{-1}{-x}\right) .$ $\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = \ln(-x) + 1 .$ Pour tout $x \in]-\infty ; 0[, \ln(-x) + 1 > 0$ équivaut successivement à : $\ln(-x) > -1 ;$ $-x > e^{-1} ;$ $x < -e^{-1} ;$ $x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{e} \right[.$ Donc,		Utilise une démarche appropriée pour déterminer le signe de f' . 1 pt Utilise une démarche appropriée pour trouver le sens de variation de f. 1 pt Utilise une démarche appropriée pour déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 2 pts	Trouve le signe de f' 1 pt Trouve le sens de variation de f 1 pt Trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 2 pts Trouve le tableau de variation. 1 pt	9 pts

$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{e}\right[, f'(x) > 0 \\ \text{Pour tout } x \in \left]-\frac{1}{e} ; 0\right[, f'(x) < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases}$ En somme, $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{e}\right[\cup]0 ; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \text{Pour tout } x \in \left]-\frac{1}{e} ; 0\right[, f'(x) < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases}.$ La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{e}\right]$ et sur $[0 ; +\infty[$. La fonction f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{e} ; 0\right]$. <u>Etudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition</u> $\forall x \in \left]-\infty ; 0\right[, f(x) = x \ln(-x).$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty ;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty .$ Donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right).$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 ;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1.$				
---	--	--	--	--

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$\frac{-1}{e}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

9)a) Etudions les branches infinies de (Γ_1) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x \ln(-x).$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln(-x)}{x}.$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{f(x)}{x} = \ln(-x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Alors,}$$

(Γ_1) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right).$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \frac{f(x)}{x} = \frac{x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right)}{x}.$$

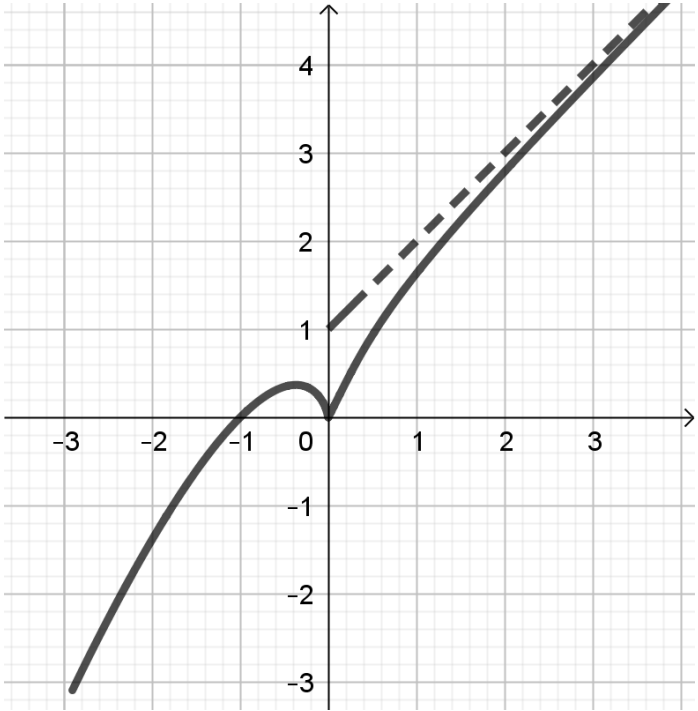
Identifie
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 |
1 pt

Utilise une démarche
 appropriée pour
 trouver les branches
 infinies de (Γ_1)
 |
1 pt

Trouve les branches
 infinies de (Γ_1)
 ||
2 pts

4 pts

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{f(x)}{x} = 2 - e^{-\frac{1}{x}} .$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = 1 .$ Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) - x = x \left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) - x .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) - x = x \left[\left(2 - e^{-\frac{1}{x}} \right) - 1 \right] .$ $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) - x = x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) .$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{t} (1 - e^t) \right] .$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 .$ Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1 .$ Alors, La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (Γ_1) au voisinage de $+\infty$.				
---	--	--	--	--

9)b) Construisons la courbe (Γ_1). 	Identifie le tableau de variation de f 1 pt	Réalise un repère orthonormé 1 pt	Construit (Γ_1) 1 pt	3 pts
10)a) Déterminons l'aire du domaine d'exposition. Soit $\mathcal{A}$ cette aire. La fonction étant continue et négative sur l'intervalle $[-4 ; -1]$, alors $\mathcal{A} = \left(\int_{-4}^{-1} [-f(x)] dx \right) \text{ u. a.}$ $\mathcal{A} = \left(\int_{-4}^{-1} [-x \ln(-x)] dx \right) \text{ dm}^2 .$	Identifie le domaine d'exposition 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer l'aire du domaine d'exposition 1 pt	Trouve $\mathcal{A} = \left(16 \ln 2 - \frac{15}{4} \right) \text{ dm}^2$ 1 pt	3 pts

Par intégration par parties, on trouve : $\mathcal{A} = \left(8 \ln 4 - \frac{15}{4}\right) \text{dm}^2 ;$ $\boxed{\mathcal{A} = \left(16 \ln 2 - \frac{15}{4}\right) \text{dm}^2} .$				
10)b) Donnons une valeur approchée de cette aire. $\mathcal{A} = \left(16 \ln 2 - \frac{15}{4}\right) \text{dm}^2 .$ $\boxed{\mathcal{A} \approx 7 \text{dm}^2} .$	Identifie l'aire du domaine d'exposition 1 pt		Trouve $\mathcal{A} \approx 7 \text{dm}^2$ 1 pt	2 pts
10)c) Déduisons-en le coût du tapissage du domaine d'exposition. $5000 \text{ F} \times 7 = 35000 \text{ F} .$ Le coût du tapissage du domaine d'exposition est 35000 F.	Identifie 5000 F 1 pt	Utilise une démarche appropriée pour déterminer le coût du tapissage du domaine d'exposition 1 pt	Trouve que le coût du tapissage du domaine d'exposition est 35000 F. 1 pt	3 pts
Récapitulatif problème 3	10 Ca → 10 pts	17 Cm → 17 pts	21 Co → 21 pts	48 pts
Total relatif aux critères minimaux	20 Ca → 20pts	30 Cm → 30 pts	40 Co → 40 pts	90pts
Note relative au critère de perfectionnement				10pts
Total				100pts

Recommandations d'ordre général :

Lire attentivement la production de chaque candidat.

Pour chaque consigne, présenter la note obtenue par candidat dans la marge comme suit : $ca + cm + co = t$ et encercler t .

Donner le total N relatif aux critères minimaux, la note P relative au critère de perfectionnement puis marquer la note T sur 100 du candidat sous la forme $T = \frac{N+P}{100}$ et déduire la note sur 20, arrondie à l'unité supérieure.

Recommandation spécifique au problème 3

Du fait d'un défaut d'unité dépendant des données,

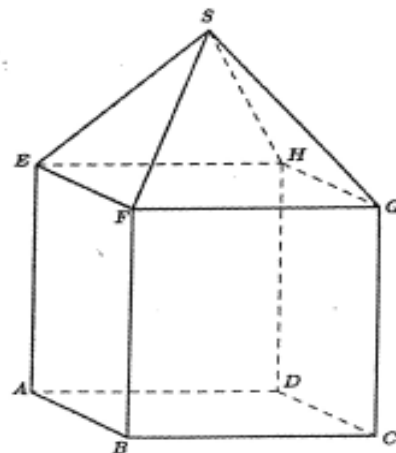
accorder la totalité des points des consignes 10) b) et 10) c) à tout candidat ayant abordé ces consignes.

Contexte : Le lancement d'un ballon dans l'espace

La figure ci-dessous est un plan d'un bâtiment d'un centre spatial de lancement de satellite. Ce centre dispose d'un circuit constitué d'un condensateur de capacité C donnée ; de 2 résistances R_1 et R_2 de valeur donnée ; d'un interrupteur et d'un générateur pour gonfler à l'hélium un ballon qu'il lancera dans l'espace. Dès qu'on ferme l'interrupteur à $t = 0$, le générateur délivre une tension $V(t) = e^t(2t + 3)$ où t est exprimé en seconde. La tension aux bornes du condensateur est alors solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_1): q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = e^t(2t + 3)$.

Le bâtiment, dont une représentation est la figure ci-dessous, a les caractéristiques suivantes :

- ✓ SEFGH est une pyramide régulière de base EFGH et dont l'une des faces latérales est contenue dans le plan (P) d'équation cartésienne $2x + y - 2z + \frac{13}{2} = 0$
- ✓ Le sommet S appartient à l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$



Rose la jeune sœur du Directeur du centre, élève en classe de terminale scientifique se propose d'utiliser ces informations pour déterminer la hauteur h du bâtiment, le nombre d'invité que peut contenir ce bâtiment le jour du lancement. Elle se demande également quelle peut bien être la tension q aux bornes du condensateur et quelle trajectoire allait d'écrire le ballon une fois lâché dans l'espace.

Tâche : aide Rose à trouver solution à ses préoccupations à travers la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1- a) Détermine les réels α et β pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t(\alpha t + \beta)$ soit une solution de l'équation différentielle (E_1)

b) Soit f est une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Montre que f est solution de (E_1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_2) : q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = 0$.

2- a) Résous (E_2) et déduis les solutions de (E_1)

b) Sachant que la charge initiale du condensateur impose la condition $3q(0) = 7V(0)$ et que la courbe intégrale de q admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation : $15x - y - 2 = 0$, détermine $q(t)$.

3- En réalité le choix des coefficients de l'équation différentielle (E_1) fait suite à une expérience qui consiste à lancer 3 fois un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Chaque numéro a la même probabilité d'apparaître. On appelle a, b et c respectivement le résultat du premier, second et troisième lancer du dé. On désigne par A_1 et A_2 les événements suivants :

A_1 « les solutions de l'équation différentielle $aq'' - bq' + cq = 0$ sont de la forme

$q(t) = e^t(A\cos t + B\sin t)$ où A et B sont des constantes réelles. »

A_2 « $a + b + c$ est un nombre pair »

Calculer $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

Problème 2 :

Pour déterminer la hauteur du bâtiment et la capacité d'accueil de ce bâtiment, Rose définit alors un repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est $3\sqrt{11}$ mètres.

4- Détermine les coordonnées des points C, F, G et H

5- a) Détermine que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

b) Soit I l'isobarycentre des points E, F, G et H. Détermine les coordonnées du point I.

c) Démontre que (Δ) est la droite passant par le point I et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

d) Ecris un système d'équation cartésiennes de (Δ)

6- a) Ecris une équation cartésienne du plan (BED)

b) Démontre qu'on a $S(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; 7)$.

7- Calcule en mètre la hauteur h du bâtiment.

8- La quantité d'oxygène nécessaire à la survie d'un homme dans ce bâtiment est estimée à $5m^3$.

Calcule la capacité d'accueil de ce bâtiment lors du lancement.

Problème 3 :

Le ballon étant lancé, sa trajectoire dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est assimilable à une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2^x + 2xe^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

9. Soit la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = -\frac{1}{x+1} + 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
 - a) Etudie les variations de la fonction u .
 - b) Dédus-en que $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) > 0$.
10. a) Justifie que le domaine de définition de la fonction f est $D = \mathbb{R}$.
 b) Détermine les limites de f aux bornes de D .
11. a) Justifie que f est continue en 0
 b) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus
12. a) Justifie que $\forall x > 0, f'(x) = x u(x)$.
 b) Achève l'étude des variations de f .
- 13) On considère la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}$.
 - a) Vérifie que $\forall x > 0; \varphi(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{1+x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$.
 - b) Démontre que $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$.
 - c) Dédus-en que $\forall x > 0, 0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$.
 - d) Détermine la limite de la fonction φ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - e) Démontre que la droite d'équation $(D): y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
 - f) Précise la position de (C) par rapport à (D) puis construis la courbe (C) indiquant la trajectoire décrite par le ballon.
14. On pose $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$; λ est un nombre réel tel que $0 < \lambda \leq 1$.
 - a) Vérifie que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$
 - b) En utilisant une intégration par partie, exprime $A(\lambda)$ en fonction de λ .
 - b) Calcule $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda)$.

Bonne Composition

Lotto Luc

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL 2024/COUFFO
EPREUVE DE MATHEMATIQUES –Série D

N°	ELEMENTS DE REPONSES	Ca	Cm	Co	Points
Problème1					
1 a)	Déterminons les réels α et β pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (E_1) $(E_1) : q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = e^t(2t+3).$ $g(t) = e^t(\alpha t + \beta)$ g est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^t(\alpha t + \beta) + \alpha e^t$ $g'(t) = g(t) + \alpha e^t$ $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) = g'(t) + \alpha e^t$ $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) - 2g'(t) + 2g(t) = e^t(2t+3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^t(\alpha t + \beta) + 2\alpha e^t - 2g(t) - 2\alpha e^t + 2g(t) = e^t(2t+3)$ $\Leftrightarrow e^t(\alpha t + \beta) = e^t(2t+3)$ Par identification, on a : $\alpha = 2$ et $\beta = 3$	Identifie la fonction g et l'équation (E_1)	Utilise la formule de la dérivée du produit de fonction et écrit $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) - 2g'(t) + 2g(t) = e^t(2t+3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^t(\alpha t + \beta) + 2\alpha e^t - 2g(t) - 2\alpha e^t + 2g(t) = e^t(2t+3)$	Trouve : $\alpha = 2$ et $\beta = 3$	
1-b)	Montrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_2) : q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = 0.$ f est une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ f solution de $(E_1) \Leftrightarrow f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t(2t+3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = g''(t) - 2g'(t) + 2g(t)$ $\Leftrightarrow f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) - g''(t) + 2g'(t) - 2g(t) = 0$ $\Leftrightarrow (f'' - g'')(t) - 2(f' - g')(t) + 2(f - g)(t) = 0$ $\Leftrightarrow (f - g)$ est solution de (E_2)	Identifie (E_1) et (E_2)	Utilise une méthode correcte pour justification	Trouve f solution de (E_1) $\Leftrightarrow (f - g)$ est solution de (E_2)	
2-a)	Réolvons (E_2) et déduisons les solutions de (E_1) L'équation caractéristique associée à $q'' - 2q' + 2q = 0$ est $r^2 - 2r + 2 = 0$. Son discriminant $\Delta = 4 - 8 = (2i)^2$. $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 1 - i$ et $r_2 = 1 + i$ Donc les solutions de $(E_2) : q'' - 2q' + 2q = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les	Reconnait la recherche de l'équation caractéristique de (E_1) et le calcul de son discriminant Utilise f solution	Utilise la propriété de résolution de à $q'' - 2q' + 2q = 0$ et de la résolution de à $q'' - 2q' + 2q = e^t(2t+3)$	Trouve $r^2 - 2r + 2 = 0$ Et les solutions de (E_2) sont $t \mapsto$ $e^t(\text{Acos}(t) + \text{Bsin}(t)).$	

	fonctions $t \mapsto e^t(A\cos(t) + B\sin(t))$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$. Soit f une solution quelconque de (E_1) g étant solution de (E_1), on déduit de la question 1-b) que $(f - g)$ est solution de (E_2). C'est à dire $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) - g(t) = e^t(A\cos(t) + B\sin(t))$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $f(t) = (2t + 3 + A\cos(t) + B\sin(t))e^t$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions $t \mapsto e^t(2t + 3 + A\cos(t) + B\sin(t))$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.	de $(E_1) \Leftrightarrow (f - g)$ est solution de (E_2)		$(A; B) \in \mathbb{R}^2$ Les solutions de (E_1)	
2-b)	Déterminons $q(t)$ $q(t) = e^t(2t + 3 + A\cos(t) + B\sin(t))$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$. $3q(0) = 7V(0)$ avec $V(t) = e^t(2t + 3)$ On a : $3q(0) = 21 \Leftrightarrow q(0) = 7$ $\Leftrightarrow 3 + A = 7$ soit $A = 4$ $15x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 15x - 2$ donc $q'(0) = 15$ $q'(t) = e^t(2 - A\sin(t) + B\cos(t)) + q(t)$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$ $q'(0) = (2 + B) + q(0)$, $q'(0) = 15 \Leftrightarrow 9 + B = 15$ soit $B = 6$ $q(t) = e^t(2t + 3 + 4\cos(t) + 6\sin(t))$	Identifie la solution $q(t) = e^t(2t + 3 + A\cos(t) + B\sin(t))$, $(A; B) \in \mathbb{R}^2$ $3q(0) = 7V(0)$ $15x - y - 2 = 0$	Ecrit $3q(0) = 7V(0) \Leftrightarrow q(0) = 7$ $15x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow q'(0) = 15$	Trouve $A = 4$ $B = 6$ $q(t) = e^t(2t + 3 + 4\cos(t) + 6\sin(t))$	
3	Calculons $p(A_1)$ et $p(A_2)$. A_1 « les solutions de l'équation différentielle $aq'' - bq' + cq = 0$, sont de la forme $q(t) = e^t(A\cos t + B\sin t)$ où A et B sont des constantes réelles. » L'équation caractéristique associée à $aq'' - bq' + cq = 0$ est $ar^2 - br + c = 0$. Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ L'événement A_1 est réalisé si $\Delta < 0$ et $b = 2a$; $\sqrt{4ac - b^2} = 2a$ $b = 2a$ alors $a = 1$ et $b = 2$ ou $a = 2$ et $b = 4$ ou $a = 3$ et $b = 6$ $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac$ $\Rightarrow c > \frac{b^2}{4a}$ $a = 1$ et $b = 2 \Rightarrow c > 1$ et on a les triplets $(1; 2; 2); (1; 2; 3); (1; 2; 4); (1; 2; 5); (1; 2; 6)$	Identifie $aq'' - bq' + cq = 0$ $q(t) = e^t(A\cos t + B\sin t)$	Ecrit A_1 est réalisé si $\Delta < 0$ et $b = 2a$; $\sqrt{4ac - b^2} = 2a$ Utilise une méthode pour trouver les triplets vérifiant ces conditions	Trouve Les éventualités possibles pour la réalisation de A_1 sont : $(1; 2; 2); (2; 4; 4); (3; 6; 6)$ $p(A_1) = \frac{1}{72}$	

Parmi ces triplets seul le triplet (1 ; 2 ; 2) vérifie $\sqrt{4ac - b^2} = 2a$
 $a = 2$ et $b = 4 \Rightarrow c > 2$ et on a les triplets

(2 ; 4 ; 3); (2 ; 4 ; 4); (2 ; 4 ; 5); (2 ; 4 ; 6)

Parmi ces triplets seul le triplet (2 ; 4 ; 4) vérifie $\sqrt{4ac - b^2} = 2a$
 $a = 3$ et $b = 6 \Rightarrow c > 3$ et on a les triplets

(3 ; 6 ; 4); (3 ; 6 ; 5); (3 ; 6 ; 6)

Parmi ces triplets seul le triplet (3 ; 6 ; 6) vérifie $\sqrt{4ac - b^2} = 2a$

Les éventualités possibles pour la réalisation de A_1 sont :

(1 ; 2 ; 2); (2 ; 4 ; 4); (3 ; 6 ; 6)

$$p(A_1) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$$

A_2 « $a+b+c$ est un nombre pair »

Au premier lancer, le résultat est soit pair soit impair. Donc a est pair ou impair

Si a est impair (C_3^1 possibilités) alors $b+c$ est impair

Parmi les six chiffres nous avons les chiffres impairs : 1 ; 3 ; 5 et les chiffres pairs 2 ; 4 et 6. Le nombre de possibilités de réalisation de $b+c$ est impair est $C_3^1 \times C_3^1 \times 2$

C'est le choix des couples d'éléments pair et impair ou des couples d'éléments impair et pair

Si a est pair (C_3^1 possibilités) alors $b+c$ est pair

Le nombre de possibilités de réalisation de $b+c$ est pair est $C_3^1 \times C_3^1 \times 2$

C'est le choix des couples d'éléments pairs ou des couples d'éléments impairs

Le nombre de possibilités de réalisation de A_2 est $C_3^1 (C_3^1 \times C_3^1 \times 2 + C_3^1 \times C_3^1 \times 2) = 3 + 18 + 3 \times 18 = 18 \times 6$

$$p(A_2) = \frac{18 \times 6}{6^3} = \frac{1}{2}$$

Identifie
 A_2 « $a+b+c$ est un
 nombre pair »

Utilise une méthode pour
 trouver le nombre de
 possibilités de réalisation de
 A_2

Trouve
 $p(A_2) = \frac{1}{2}$

4	Déterminons les coordonnées des points C, F, G et H dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $C(1; 1; 0)$ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc $F(1; 0; 1)$ $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $G(1; 1; 1)$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $H(0; 1; 1)$	Identifie les points C, F, G et H et le repère	Utilise une méthode pour trouver les coordonnées des points	Trouve $C(1; 1; 0)$ $F(1; 0; 1)$ $G(1; 1; 1)$ $H(0; 1; 1)$	
5-a	Démontrons que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE). $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$; $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$; $\overrightarrow{BE}(-1; 0; 1)$ $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 = 0$ donc $(AG) \perp (BD)$ $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 1 = 0$ donc $(AG) \perp (BE)$ <u>Or</u> (BD) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (BDE) donc $(AG) \perp (BDE)$	Identifie (AG) et (BDE)	Utilise la propriété relative à l'orthogonalité d'une droite et d'un plan	Trouve $(AG) \perp (BDE)$	
	b) Coordonnée de I Le point I est l'isobarycentre des points E ; F ; G et H $E(0; 0; 1)$; $F(1; 0; 1)$; $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$ $\begin{cases} x_I = \frac{x_E + x_F + x_G + x_H}{4} = \frac{1}{2} \\ x_I = \frac{y_E + y_F + y_G + y_H}{4} = \frac{1}{2} \\ x_I = \frac{z_E + z_F + z_G + z_H}{4} = 1 \end{cases} \text{ donc } I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$	Identifie comme l'isobarycentre des points E ; F ; G et H	Écrit $\begin{cases} x_I = \frac{x_E + x_F + x_G + x_H}{4} \\ x_I = \frac{y_E + y_F + y_G + y_H}{4} \\ x_I = \frac{z_E + z_F + z_G + z_H}{4} \end{cases}$	Trouve $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$	2 points
	c) Démontrons que (Δ) est la droite passant par le point I et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (4\overrightarrow{MI}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ Donc (Δ) est la droite passant par I et dirigée par $\vec{u}$	Identifie (Δ) le point I et le vecteur $\vec{u}$	Écrit $M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$	Trouve $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et conclut	
	d) Écrivons un système d'équation cartésiennes de (Δ) (Δ) est la droite passant par I et dirigée par $\vec{u}$		Utilise une méthode pour trouver un système d'équation	Trouve	

	$I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$ et $\vec{u}(1; 1; 3)$ $M(x; y; z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} = \frac{z - 1}{3}$		cartésiennes de (Δ) $ $	$(\Delta): \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} = \frac{z - 1}{3}$	
6)	a) Ecrivons une équation cartésienne du plan (BED) $B(1; 0; 0)$ est un point du plan (BED) $\vec{AG}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal à (BED) $M(x; y; z) \in (BDE) \Leftrightarrow (x - 1) + (y - 0) + (z - 1) = 0$ $M(x; y; z) \in (BDE) \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$	Identifie un point du plan (BED) et un vecteur normal à ce plan $ $	Ecrit $M(x; y; z) \in (BDE)$ $\Leftrightarrow (x - 1) + (y - 0) + (z - 1) = 0$ $ $	Trouve $(BDE): x + y + z - 1 = 0$ $ $	
	b) Démontre qu'on a $S(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 7)$. $S(x_S; y_S; z_S) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = \alpha + \frac{1}{2} \\ y_S = \alpha + \frac{1}{2} \\ z_S = 3\alpha + 1 \end{cases}$ $S(x_S; y_S; z_S) \in (P) \Leftrightarrow 4x_S + 2y_S - 4z_S + 13 = 0$ On a donc $4\alpha + 2 + 2\alpha + 1 - 12\alpha - 4 + 13 = 0$ Soit $\alpha = 2$ et $\begin{cases} x_S = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y_S = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ z_S = 6 + 1 = 7 \end{cases}$ d'où $S(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 7)$.	Identifie (Δ) et le plan (P) $ $	Ecrit $S(x_S; y_S; z_S) \in (\Delta)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_S = \alpha + \frac{1}{2} \\ y_S = \alpha + \frac{1}{2} \\ z_S = 3\alpha + 1 \end{cases}$ $S(x_S; y_S; z_S) \in (P)$ $\Leftrightarrow 4x_S + 2y_S - 4z_S + 13 = 0$ $ $	Trouve $\alpha = 2$ $S(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; 7)$. $ $	

7 Calculons en mètre la hauteur h du bâtiment $h = d(S; (ABC))ul$ $\vec{AE}(0; 0; 1)$ est un vecteur normal à (ABC) donc $(ABC): z = 0$ $h = \frac{ z_S }{\sqrt{1}} ul = 7ul$ $h = 21\sqrt{11}m$	Reconnait que h est la distance du point S au plan (ABC)	Ecrit $h = d(S; (ABC))ul$	Trouve $h = 21\sqrt{11}m$
8 Calculons la capacité d'accueil de ce bâtiment lors du lancement. Soit V la quantité d'oxygène que peut contenir ce bâtiment $V = AB^3 + \frac{AB^2 \times h_1}{3}$ avec $h_1 = h - AB$ $V = 1 + \frac{1(7-1)}{3} uv = 3uv$ $V = 3(3\sqrt{11})^3 = 891\sqrt{11}m^3$ Soit n le nombre d'individus que peut contenir le bâtiment $n = \frac{V}{5}$ $n \approx 591,023$ donc $n = 591$ personnes	Cherche à connaître la quantité d'oxygène que peut contenir ce bâtiment Identifie la quantité d'oxygène nécessaire à la survie d'un homme dans ce bâtiment	Ecrit $V = AB^3 + \frac{AB^2 \times h_1}{3}$ avec $h_1 = h - AB$	Trouve V $= 1 + \frac{1(7-1)}{3} uv$ $= 3uv$ $n = 591$
Problème 3			
9 a) Etudions les variations de la fonction u. La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est continue, dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$. Donc $x \mapsto \ln(\frac{x+1}{x})$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{-1}{x+1}$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. u est donc continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. $\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2(\frac{x-x-1}{x+1})}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-(x+2)}{x(x+1)^2}$ $\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) < 0$ U est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$	Identifie u	Utilise Les propriétés relatives à la continuité et à la dérivabilité d'une fonction Utilise les formules de dérivée d'une fonction Utilise les limites remarquables d'une fonction logarithme népérien et les limites usuelles Dresse la forme d'un tableau de variation	Trouve $u'(x) = \frac{-(x+2)}{x(x+1)^2}$ Les limites Le sens de variation de u Tableau de variation de u

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x+1} + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x+1} = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases}$$

x	u
$u(0)$	—
$u(+\infty)$	0

b) Démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ $u(x) > 0$

u est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc

$$u(0) > u(x) > u(+\infty)$$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[$ $u(x) > 0$ Par suite $u(x) > 0$

Identifier $u(x)$

Étudier le signe de la dérivée de

u sur $]0, +\infty[$

Tracer

$\forall x$

$x \in]0, +\infty[$ $u(x) > 0$

$x > 0$

10	a) Justifions que l'ensemble de définition de la fonction f est $D = \mathbb{R}$. $D = D_1 \cup D_2$ $D_1 = \{x \in]-\infty; 0] / (2^x + 2xe^{-x} - 1) \in \mathbb{R}\}$ $\forall x \in]-\infty; 0], (2^x + 2xe^{-x} - 1) \in \mathbb{R} \text{ donc } D_1 =]-\infty; 0]$ $D_2 = \left\{x \in]0 + \infty[/ x \neq 0 ; \frac{x+1}{x} > 0\right\}$ $\forall x \in]0 + \infty[, x > 0 ; x+1 > 0 \text{ donc } x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} > 0$ $D =]-\infty; 0] \cup]0 + \infty[= \mathbb{R}$	Identifie f	Ecrit $D_1 = \{x \in]-\infty; 0] / (2^x + 2xe^{-x} - 1) \in \mathbb{R}\}$ $D_2 = \left\{x \in]0 + \infty[/ x \neq 0 ; \frac{x+1}{x} > 0\right\}$	Trouve $D = \mathbb{R}$
	b) Déterminons les limites de f aux bornes de D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x + 2xe^{-x} - 1 = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right]$ $= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$	Identifie f et le domaine D	Utilise $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x} = 1$	Trouve les limites
11	a) Justifions que f est continue en 0 $0 \in \mathbb{R}, f(0) = 2^0 + 2 \times 0 \times e^0 - 1 = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2^x + 2xe^{-x} - 1 = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln(x)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x+1) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) =$	Identifié f et 0	Utilise la propriété relative à la continuité d'une fonction en un point	Trouve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ $f(0) \text{ et conclut que f est continue en 0}$

	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x < 0} f(x) = \lim_{x > 0} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$				
	b) Etudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons géométriquement les résultats obtenus $0 \in \mathbb{R}, f(0) = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{x \ln 2} + 2xe^{-x} - 1}{x}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x} + 2e^{-x} = 2 + \ln 2$ $(2 + \ln 2) \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2 + \ln 2$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x+1) - x \ln(x) = 0$ Car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x+1) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ $(0 \in \mathbb{R})$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes d'équations respectives $T_g: \begin{cases} x \leq 0 \\ y = (2 + \ln 2)x \end{cases}$ et $T_d: \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$	Identifie f et $f(0)$	Utilise la propriété relative à la dérivabilité d'une fonction en un point	Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 + \ln 2$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ Conclut : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 Donne les interprétations géométriques	
12	a) Justifie que $\forall x > 0, f'(x) = xu(x)$. les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ sont continues et dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)}(x^2)$ $f'(x) = x\left(2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}\right) = xu(x)$	Identifie f sur $]0; +\infty[$	Utilise les règles de dérivation	Trouve $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)}(x^2)$ Conclut	

b) Achéons l'étude des variations de f.

Les fonctions $x \mapsto e^{x \ln 2}$ et $x \mapsto 2xe^{-x}$ sont continues et dérivables sur $]-\infty; 0]$ alors f est continue et dérivable sur $]-\infty; 0]$

$$\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) = (\ln 2)e^{x \ln 2} + 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0], x \leq 0 \text{ donc } -2xe^{-x} \geq 0$$

Comme $e^{-x} > 0$ et $e^{x \ln 2} > 0$ alors $\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) > 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = xu(x)$$

Or $x > 0$ et $u(x) > 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

En conclusion $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

Identifie
f(x) sur $]-\infty; 0]$
Les bornes du
domaine D

Utilise les règles de dérivation
d'une fonction
Utilise une méthode pour
étudier le signe de f'(x) sur
D

Donne une forme du
tableau de variation de f

Trouve
 $\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) > 0$
 $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

Donne le sens de
variation de f
Dresse le tableau de
variation de f

||

||||

|||

13

a) Vérifions que $\forall x > 0; \varphi(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{1+t}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t \right) dt$.

$$\forall x > 0, x^2 \int_0^{\frac{1}{1+t}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t \right) dt = x^2 \left[\ln(t+1) + \frac{1}{2}t^2 - t \right]_0^{\frac{1}{1+t}} =$$

$$= x^2 \left[\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right] = x^2 \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + \frac{1}{2} - x$$

Identifie $\varphi(x)$

Utilise la méthode
d'intégration par t parties et
la linéarité de l'intégrale

Trouve que
 $f(x) + \frac{1}{2} - x = \varphi(x)$ et conclut

|

|

|

$= f(x) + \frac{1}{2} - x = \varphi(x)$ D'où $\forall x > 0, \varphi(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{1+t}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t \right) dt$				
b) Démontrons que $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$. Soit $t > 0$. $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1+t^2-1}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$ $t > 0 \Rightarrow \frac{t^2}{1+t} \geq 0$ donc $\frac{1}{1+t} - 1 + t \geq 0$ (1) De même $\frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 = \frac{t^2}{1+t} - t^2 = \frac{-t^3}{1+t}$ $t > 0 \Rightarrow \frac{-t^3}{1+t} < 0$ donc $\frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$ (2) de (1) et (2), on a : $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$.		Utilise $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$ $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$	Trouve $\forall t > 0,$ $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$.	
c) Déduisons que $\forall x > 0, 0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$. $t > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t < t^2$. $\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{x}} 0 dt \leq \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t \right) dt < \int_0^{\frac{1}{x}} t^2 dt$. $\Rightarrow 0 \leq x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t \right) dt < x^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{x}}$ $\Rightarrow 0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$ Donc $\forall x > 0, 0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$	Identifie $\varphi(x)$	Utilise la propriété relative au signe de l'intégrale	Trouve $0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$	
d) Déterminons la limite de la fonction φ lorsque x tend vers $+\infty$. $\forall x > 0, 0 \leq \varphi(x) < \frac{1}{3x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$	Identifie $\varphi(x)$ et $+\infty$	Utilise la propriété de gendarme pour le calcul des limites	Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$	

e) Précisons la position de (C) par rapport à (D)

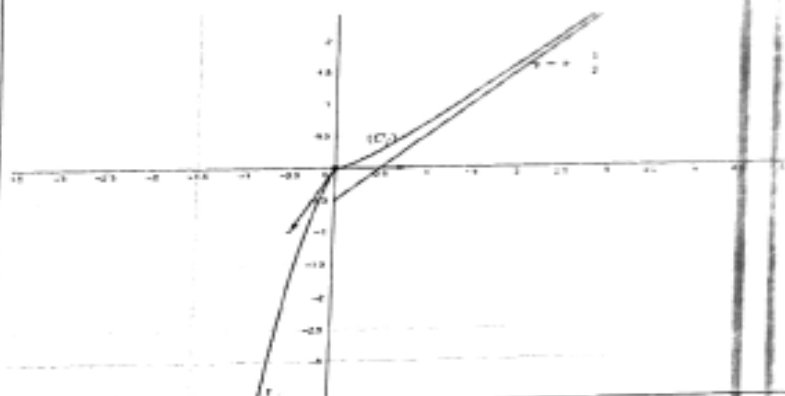
$\forall x > 0, \varphi(x) \geq 0$ donc $f(x) - x + \frac{1}{2} \geq 0$ soit $f(x) \geq x - \frac{1}{2}$

Donc la courbe de f est au dessus de (D)

Tracé de la courbe de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} + 2e^{-x} - \frac{1}{x} = +\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$



Identifie (D) et f(x) sur $]0; +\infty[$

Écrit

$$\varphi(x) \geq 0 \text{ donc } f(x) - x + \frac{1}{2} \geq 0$$

Conclut que la courbe de f est au dessus de (D)

Utilise la propriété de l'étude des branches infinies

Trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
Et conclut

Identifié le tableau de variation ; l'asymptote ; les demi-tangentes

Trace un repère

Trace la courbe de f

14

a) Vérifie que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$\forall x > 0, x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2}{1+x}$$

Identifie l'égalité

Trouve

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

Donc $\forall x > 0 \quad \frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$				
b) En utilisant une intégration par partie, exprimons $A(\lambda)$ en fonction de λ. $x > 0 ; A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_{\lambda}^1 x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$ $u'(x) = x^2$ on prend $u(x) = \frac{x^3}{3}$ $v(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow v'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$ Donc $A(\lambda) = \left[\frac{x^3}{3} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_{\lambda}^1 + \frac{1}{3} \int_{\lambda}^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ $A(\lambda) = \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{\lambda^3}{3} \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_{\lambda}^1$ $A(\lambda) = \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{\lambda^3}{3} \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{\lambda^2}{2} + \lambda - \ln(\lambda+1) + 1 \right)$ $A(\lambda) = \frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{\lambda^3}{3} \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6} \lambda^2 - \frac{1}{3} \ln(\lambda+1) + \frac{1}{3} \lambda$	Identifie $A(\lambda)$	Utilise la méthode d'intégration par parties et la linéarité de l'intégrale	Trouve $A(\lambda)$ $= \left[\frac{x^3}{3} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right]_{\lambda}^1 + \frac{1}{3} \int_{\lambda}^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ $A(\lambda)$ $= \frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{6}$ $- \frac{\lambda^3}{3} \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - \frac{1}{6} \lambda^2$ $- \frac{1}{3} \ln(\lambda+1) + \frac{1}{3} \lambda$	
b) Calculons $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{6}$	Identifie $A(\lambda)$ trouvée	Utilise $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.	Trouve $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$ $= \frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{6}$	
	40Ca 1Ca=0,5pt	60Cm 1Cm=0,5pt	40Co 1Co=1pt	

Critère de perfectionnement : Soit N la note sur 90

$N < 40 \Rightarrow Cp = 0$

$40 \leq N < 60 \Rightarrow 0 < Cp \leq 5$

$N \geq 60 \Rightarrow 0 < Cp \leq 10$

Baccalauréat Blanc Départemental/session d'avril 2024

Épreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Série : D

Coefficients : 4

Situation d'évaluation

Contexte : Déperdition scolaire.

Depuis un certain nombre d'années, les effectifs dans les collèges et lycées diminuent graduellement. Trois frères élèves Paul, André et Ben ont choisi abandonner les classes pour se trouver des activités génératrice de revenus dans la société.

Paul décide quitter le pays pour aller au Nigéria pour des activités champêtres.

André s'est mis en apprentissage dans un atelier de vitrier.

Ben suit son oncle topographe pour les travaux de recasement de terrains.

Paul, sur son parcours, rencontre trois feux tricolores de signalisation situé à proximité des carrefours matérialisés par les points R , Q et Ω dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où R , Q et Ω sont les points-images des racines du polynôme complexe P tel que

$$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

avec z un nombre complexe ; $Im(z_R) < Im(z_Q) < Im(z_\Omega)$.

A l'atelier de vitrier, un client commande à André une boîte en forme d'une pyramide avec des instructions mathématiques pour sa conception.

Ben et son oncle sont confrontés à un calcul d'aire de la surface d'un domaine de Bio, situé non loin de la mairie.

André et Ben, par manque de connaissances en mathématiques, ont des difficultés à déterminer la hauteur de la boîte pyramidale, et l'aire du terrain recasé.

Tâche : Étant élève en classe de Terminale D, tu es invité(e) à aider ces trois frères en résolvant les problèmes suivants.

Problème I

- Démontre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 à préciser.
 - Résous l'équation $p(z) = 0$.
 - Écris ces solutions sous forme trigonométrique.
- Représente dans le plan complexe les points R ; Q et Ω .
 - Démontre que R ; Q , Ω sont sur un même cercle de centre O dont tu préciseras le rayon .
 - Calcule $z_Q - z_R$ et $z_Q - z_\Omega$.
- Démontre que le quadrilatère $ORQ\Omega$ est un losange.

Problème II

La commande faite dans l'atelier de Ben est une boîte ayant la forme d'une pyramide $SABDC$ dont la base $ABDC$ est un parallélogramme.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A(0; 3; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $C(1; -2; 1)$. L'une des faces latérales de la pyramide est contenue dans le plan (Π) d'équation $11x - 10y + 2z + 3 = 0$ et son sommet S appartient à l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que $\vec{e}_1 \wedge \vec{AM} = \vec{e}_2$ avec $\vec{e}_1 = -\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

La pyramide sera posée sur une planche (E) et décorée par un ensemble (C) . (E) a pour support le plan (Γ) déterminé par la droite (D) passant par B et dirigée par $\vec{e}_1$ et la droite (D') dont un système d'équation cartésienne est

$$(D') : \begin{cases} -x + 2 = \frac{y + 1}{-2} \\ z = 2 \end{cases}$$

et (C) est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{MC} \cdot \vec{MD} = \vec{MD}^2$$

4. (a) Justifie que le point B appartient à (Δ) .
(b) Démontre que $(\Delta) = (D)$.
5. (a) Détermine les coordonnées de S .
(b) Calcule la hauteur de la pyramide.
6. (a) Démontre que (D) et (D') définissent un unique plan.
(b) Détermine une équation cartésienne du plan (Γ) .
(c) Démontre que A est le barycentre des points B , C et D affectés des coefficients que tu préciseras.
(d) Dédus-en l'ensemble (C) .

Problème III

L'aire du domaine de Bio recherché par Ben est, en unité d'aire, la valeur absolue de la valeur prise en -2 par la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{-1}^x \frac{3^t - 1}{t} dt$.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x + 3) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm. $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f .

7. (a) Étudie les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x \ln 3)3^x - 3^x + 1$.
(b) Dédus-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
8. (a) Détermine le domaine de définition de f .

- (b) Étudie la continuité de f en 0.
9. (a) Détermine le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$x \longmapsto 3^x$$
- (b) Étudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
10. Achève l'étude des variations de f puis construis $(\mathcal{C})$.
11. (a) Détermine la dérivée de la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = (x + 3) \ln(x + 3) - (x + 3).$$
- (b) Calcule l'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 3$.
12. Soit l'application
- $$\begin{aligned} g :] - \infty; 0[&\longrightarrow f(] - \infty; 0[) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
- Démontre que g est une bijection.
13. (a) Justifie que l'ensemble de définition de F est $] - \infty, 0[$.
- (b) Étudie le sens de variation de F .
- (c) Étudie le signe de $F(x)$.
14. Donne un encadrement de $F(-2)$ par la méthode des rectangles, en divisant l'intervalle $[-2; -1]$ en cinq intervalles de même amplitude.

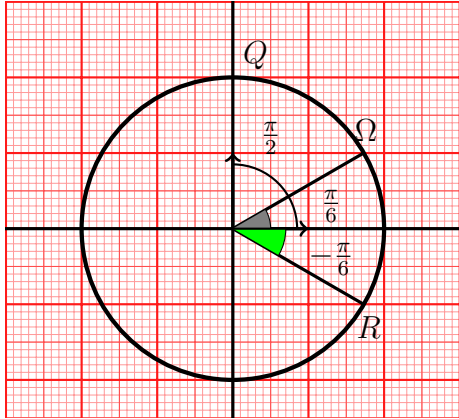
BONNE COMPOSITION

CLÉ ET GRILLE DE CORRECTION

Coefficients : 4

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
	<u>Problème 1</u>		l'élève	l'élève	l'élève
1.(a)	Démontrons que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire z_0 à préciser : $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$ Posons $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ $P(ib) = 0 \iff (ib)^3 - 2(\sqrt{3} + i)(ib)^2 + 4(1 + i\sqrt{3})(ib) - 8i = 0$ $\iff -ib^3 + 2\sqrt{3}b^2 + 2ib^2 + 4ib - 4\sqrt{3}b - 8i = 0$ $\iff 2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b + i(-b^3 + 2b^2 + 4b - 8) = 0$ $\iff \begin{cases} 2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b = 0 & \textcircled{1} \\ -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$ ① donne $b = 0$ et $b = 2$. $b = 0$ est impossible puisque que z_0 est imaginaire pure. Pour $b = 2$ dans ② on a : $-8 + 8 + 8 - 8 = 0$. D'où l'équation (E) admet une solution imaginaire pure $z_0 = 2i$.	3.5	★ Identifie le polynôme P ↓	★ Pose $z = ib, b \in \mathbb{R}^*$ ↓ ★ Détermine les valeurs de b pour $P(ib) = 0$ ↓ ★ Élimine $b = 0$. ↓	★ Trouve $b = 0; b = 2$ et ★ conclut $z_0 = 2i$ □
1.(b)	Résolvons l'équation $P(z) = 0$ On a $z_0 = 2i$ solution de l'équation $P(z) = 0$ Donc il existe un polynôme Q de second degré tel que $P(z) = (z - 2i)Q(z)$.				

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
	$\begin{array}{r l} \begin{array}{rrrr} z^3 & -2(\sqrt{3}+i)z^2 & +4(1+i\sqrt{3})z & -8i \\ -z^3 & +2iz^2 & & \end{array} & \begin{array}{l} z-2i \\ z^2-2\sqrt{3}z+4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} 0 & -2\sqrt{3}z^2 & +4(1+i\sqrt{3})z & -8i \\ & 2\sqrt{3}z^2 & -4i\sqrt{3}z & \end{array} & \\ \hline \begin{array}{rrr} 0 & 4z & -8i \\ & -4z & +8i \\ & 0 & +0 \end{array} & \end{array}$ On a $P(z) = (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$ Donc $Q(z) = z^2-2\sqrt{3}z+4$ $P(z) = 0 \iff (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$ $\iff z-2i = 0$ ou $z^2-2\sqrt{3}z+4 = 0$ Résolvons $Q(z) = 0$ $\Delta = [-2\sqrt{3}]^2 - 4(1)(4)$ $\Delta = -4 = (2i)^2$ Alors $z = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$ ou $z = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$ Donc l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $\{2i; \sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i\}$	3.5	★ Identifie P et $z_0 = 2i$ ┐	★ Détermine le polynôme Q tel que $P(z) = (z-2i)Q(z)$. ┐ ★ Résous $Q(z) = 0$ ┐	★ Trouve $Q(z) = z^2-2\sqrt{3}z+4$ ┐ ★ Trouve $z = \sqrt{3}-i$ ou $z = \sqrt{3}+i$ ┐ ★ Conclut l'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ est $\{2i; \sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i\}$ ┐
1.(c)	Ecrivons ces solutions sous forme trigonométrique $2i = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$ $\sqrt{3}-i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ $\sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$	4	★ Identifie les trois solutions de $P(z) = 0$ ┐	★ Détermine le module et l'argument de chaque solution ┐	★ Trouve la forme trigonométrique de chaque solution ┐
2.(a)	Représentons dans le plan complexe les points $R; Q, L$ et Ω. R, Q et Ω sont les points-images des racines du polynôme complexe P. Les racines du polynôme complexe P sont $2i; \sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i$. On a : $Im(z_R) < Im(z_Q) < Im(z_\Omega)$ Donc $z_R = \sqrt{3}-i; z_Q = \sqrt{3}+i$ et $z_\Omega = 2i$. On obtient : $z_\Omega = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$ $z_R = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ $z_Q = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$	3	★ Identifie les racines de P ┐	★ Utilise $Im(z_R) < Im(z_Q) < Im(z_\Omega)$ ┐ ★ Construit dans un repère un cercle de rayon 2 et utilise les arguments des racines. ┐	★ Place les points R, Q et Ω. ┐

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
					
2.(b)	Démontrons que $R; Q, \Omega$ sont sur un même cercle de centre O dont tu préciseras le rayon . $ z_R = \sqrt{3} - i = 2,$ $ z_Q = \sqrt{3} + i = 2$ $ z_\Omega = 2i = 2$ On a $ z_R - 0 = z_Q - 0 = z_\Omega - 0 = 2$ Alors $OR = OQ = O\Omega = 2$ D'où les points R, Q et Ω sont sur un même cercle de centre O et de rayon 2	2.5	★ Identifie $R; Q$ et Ω . 	★ Utilise $ z_R - 0 ,$ $ z_Q - 0 $ et $ z_\Omega - 0 $ puis les compare. ┐	★ Trouve $OR = OQ = O\Omega = 2$ et conclut ┐
2.(c)	Calculons $z_Q - z_R$ et $z_Q - z_\Omega$. $z_Q - z_R = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i$ $z_Q - z_R = 2i$ $z_Q - z_\Omega = \sqrt{3} + i - 2i$ $z_Q - z_\Omega = \sqrt{3} - i$	2.5	★ Identifie $R; Q$ et Ω . 	★ Calcule $z_Q - z_R$ et $z_Q - z_\Omega$ ┐	★ Trouve $z_Q - z_R = 2i$ et $z_Q - z_\Omega = \sqrt{3} - i$ ┐
3.	Démontrons que le quadrilatère $ORQ\Omega$ est un losange. $ z_Q - z_R = 2i = 2$ alors $RQ = 2$ et $ z_Q - z_\Omega = \sqrt{3} - i = 2$ alors $\Omega Q = 2$ De plus $OR = O\Omega = 2$ Donc $OR = O\Omega = RQ = \Omega Q$ D'où le quadrilatère $ORQ\Omega$ est un losange.	2.5	★ Identifie le quadrilatère $ORQ\Omega$ 	★ Calcule $OR, O\Omega, RQ$ et ΩQ ┐	★ Trouve $OR = O\Omega = RQ = \Omega Q$ et conclut ┐
N°	Totaux Problème 1	Pts=21.5	Nbre de CA = 10	Nbre de CM = 15	Nbre de CO =18

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
	<u>Problème 2</u>		l'élève	l'élève	l'élève
4.(a)	<u>Justifions que le point B appartient à (Δ).</u> $(\Delta) = \{M \in \mathcal{E} / \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{e}_2\}$ On a $\vec{e}_1(-1; -2; 0)$ et $\overrightarrow{AB}(1; -1; 1)$ $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$ $= -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2$ D'où $B \in (\Delta)$	2	★ Identifie B et (Δ) . I	★ Calcule $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AB}$ I	★ Trouve $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2$ et conclut ┐
4.(b)	<u>Démontrons que $(\Delta) = (D)$.</u> Soit $M \in \mathcal{E}$ $M \in (\Delta) \iff \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{e}_2$ $\iff \vec{e}_1 \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{e}_2$ $\iff \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{e}_2$ $\iff \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{e}_2$ $\iff \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ $M \in (\Delta) \iff M \in (D)$ D'où $(\Delta) = (D)$	2.5	★ Identifie (Δ) et (D) I	★ Utilise $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{e}_2$ et la distributivité du $\wedge$ ┐	★ Trouve $\vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{e}_2 \iff \vec{e}_1 \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ I ★ Ecrit $M \in (\Delta) \iff M \in (D)$ et conclut I
5.(a)	<u>Déterminons les coordonnées de S.</u> On a $S \in (\Pi) \cap (\Delta)$ $S \in (\Delta) \iff S \in (D)$ Soit $M(x; y; z) \in \mathcal{E}$ $M \in (D) \iff \overrightarrow{BM} = \alpha \vec{e}_1; \alpha \in \mathbb{R}$ $M \in (D) \iff \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ $S \in (\Pi) \cap (\Delta) \iff \begin{cases} x_S = -\alpha + 1 \\ y_S = -2\alpha + 2 \\ z_S = 1 \\ 11x_S - 10y_S + 2z_S + 3 = 0 \end{cases}$ On obtient $\alpha = \frac{4}{9}$. Par suite $S\left(\frac{5}{9}; \frac{10}{9}; 1\right)$	3	★ Identifie S I	★ Utilise $(\Delta) = (D)$ et $S \in (\Pi) \cap (\Delta)$ ┐	★ Trouve (D) : $\begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = 1 \end{cases}$ I ★ Trouve $S\left(\frac{5}{9}; \frac{10}{9}; 1\right)$ ┐

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
5.(b)	Calculons la hauteur de la pyramide. $h = d(S; (ABC)) = \frac{ \vec{AS} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) }{\ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ }$ $\vec{AB}(1; -1; 1) \text{ et } \vec{AC}(1; -5; 1)$ $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{k}$ $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{i} - 4\vec{k}$ $\vec{AS} \left(\frac{5}{9}; -\frac{17}{9}; 1 \right)$ $h = \frac{\left \frac{5}{9}(4) - \frac{17}{9}(0) + 1(-4) \right }{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2}}$ $h = \frac{2\sqrt{2}}{9}ul$	2.5	★ Identifie $h = d(S; (ABC))$	★ Utilise $h = \frac{ \vec{AS} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) }{\ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ }$ ★ Calcule $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$	★ Trouve $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{i} - 4\vec{k}$ ★ Trouve $h = \frac{2\sqrt{2}}{9}ul$
6.(a)	Démontrons que (D) et (D') définissent effectivement un unique plan. (D) : (B; $\vec{e}_1$) avec B (1; 2; 1) et $\vec{e}_1$ (-1; -2; 0) (D') : $\begin{cases} -x + 2 = \frac{y+1}{-2} \\ z = 2 \end{cases}$ Posons $-x + 2 = \frac{y+1}{-2} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ On obtient (D') : $\begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = -2\alpha - 1 \\ z = 2 \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$ (D') a pour repère (I; $\vec{u}$) avec I(2, -1; 2) et $\vec{u}(-1; -2; 0)$. On a $\vec{BI}(1; -3; 1)$ $\vec{e}_1 \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$ On obtient $\vec{e}_1 \wedge \vec{u} = \vec{0}$ Alors (D) et (D') sont parallèles. ③ $\vec{BI} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$	3	★ Identifie (D) et (D')	★ Détermine un repère de (D') ★ Utilise $\vec{e}_1 \wedge \vec{u}$ ★ Utilise $\vec{BI} \wedge \vec{u}$	★ Trouve $\vec{e}_1 \wedge \vec{u} = \vec{0}$, $\vec{BI} \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$ puis conclut

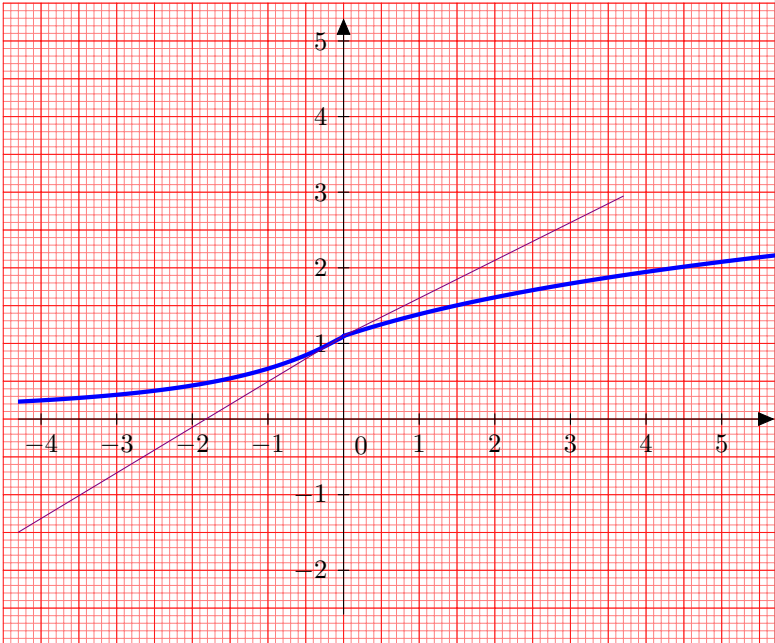
N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
	$\vec{BI} \wedge \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{BI} \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$ Alors $B \notin (D')$ ④ De ③ et ④, (D) et (D') sont strictement parallèles. D'où (D) et (D') définissent un unique plan.				
6.(b)	Déterminons une équation cartésienne du plan (Γ) . Le plan (Γ) est défini par (D) et (D') . Donc $\vec{BI} \wedge \vec{u}$ est un vecteur normal à (Γ) $\vec{BI} \wedge \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$ Soit $M(x; y; z) \in \mathcal{E}$ $M \in (\Gamma) \iff \vec{BM} \cdot (\vec{BI} \wedge \vec{u}) = 0$ $\iff 2(x-1) - 1(y-2) - 5(z-1) = 0$ $\iff 2x - y - 5z + 5 = 0$ Donc $(\Gamma) : 2x - y - 5z + 5 = 0$	2	★ Identifie (Γ) I	★ Utilise $M \in (\Gamma) \iff \vec{BM} \cdot (\vec{BI} \wedge \vec{u}) = 0$ ┐	★ Trouve $(\Gamma) : 2x - y - 5z + 5 = 0$ I
6.(c)	Démontre que A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que tu préciseras. $ABDC$ est un parallélogramme alors $\vec{AB} = \vec{CD}$ $\vec{AB} = \vec{CD} \iff \vec{AB} = \vec{CA} + \vec{AD}$ $\iff \vec{AB} - \vec{CA} - \vec{AD} = \vec{0}$ $\iff \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{0}$ On a : $1 + 1 - 1 = 1$ et $1 \neq 0$ Alors $A = \text{bar}\{(B; 1), (C; 1), (D; -1)\}$	3	★ Identifie le parallélogramme $ABDC$ ┐	★ Utilise $\vec{AB} = \vec{CD}$ ┐	★ Trouve $\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{0}$ I ★ Trouve $A = \text{bar}\{(B; 1), (C; 1), (D; -1)\}$ I
6.(d)	Dédus-en l'ensemble (C) . $(C) = \{M \in \mathcal{E} / \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{MC} \cdot \vec{MD} = \vec{MD}^2\}$ Soit $M \in \mathcal{E}$ $M \in (C) \iff (\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}) \cdot \vec{MD} = 0$ Or $A = \text{bar}\{(B; 1), (C; 1), (D; -1)\}$ $M \in (C) \iff \vec{MA} \cdot \vec{MD} = 0$ (C) est la sphère de diamètre $[AD]$	3	★ Identifie (C) et A ┐	★ Utilise $M \in (C) \iff \vec{MB} \cdot \vec{MD} + \vec{MC} \cdot \vec{MD} = \vec{MD}^2$ ┐	★ Trouve $M \in (C) \iff \vec{MA} \cdot \vec{MD} = 0$ et conclut ┐
N°	Totaux Problème 2	Pts= 21	Nbre de CA = 11	Nbre de CM = 16	Nbre de CO = 15

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts												
	<u>Problème 3</u>		l'élève	l'élève	l'élève												
7.(a)	Etudions les variations de u définie par $u(x) = (x \ln 3)3^x - 3^x + 1$. ★ <i>Domaine de définition :</i> On a $u(x) = (x \ln 3)e^{x \ln 3} - e^{x \ln 3} + 1$. $D_u = \{x \in \mathbb{R}/u(x) \in \mathbb{R}\}$ $D_u = \mathbb{R}$ ★ <i>Continuité et dérivabilité :</i> u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \ln 3 e^{x \ln 3} + x(\ln 3)^2 e^{x \ln 3} - \ln 3 e^{x \ln 3}$ $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = x(\ln 3)^2 e^{x \ln 3}$ ★ <i>Sens de variation :</i> $\forall x \in]-\infty; 0[, u'(x) < 0;$ $\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) > 0$ et $u'(0) = 0$ u est strictement décroissante sur $] - \infty; 0[$ et u strictement croissante sur $]0; +\infty[$ ★ <i>Limites de u au bornes de $\mathbb{R}$</i> $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x \ln 3)e^{x \ln 3} - e^{x \ln 3} + 1)$. $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} \left((x \ln 3) - 1 + \frac{1}{e^{x \ln 3}} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x \ln 3)e^{x \ln 3} - e^{x \ln 3} + 1)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ car $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ On a $u(0) = 0$ ★ <i>Tableau de variation de u</i><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$u'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$u(x)$</td><td>1</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$u'(x)$		$-$	$+$	$u(x)$	1	0	$+\infty$	6	★ Identifie u	★ Utilise $D_u = \{x \in \mathbb{R}/u(x) \in \mathbb{R}\}$ ★ Écrit u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dérive u sur $\mathbb{R}$ ★ Etudie le signe de u' sur $\mathbb{R}$ ★ Calcule la limite de u en $+\infty$ puis en $-\infty$ ★ Réalise le tableau de variation de u	★ Trouve $D_u = \mathbb{R}$ ★ Trouve $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = x(\ln 3)^2 e^{x \ln 3}$ ★ Trouve le sens de variation de u ★ Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ ★ Trouve les variations de u
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$u'(x)$		$-$	$+$														
$u(x)$	1	0	$+\infty$														

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
7.(b)	<u>Déduisons-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.</u> La fonction u admet un minimum 0 en 0. Donc $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, u(x) > 0$ et $u(0) = 0$	2	★ Identifie les variations de u 	★ Utilise le minimum absolu de u sur $\mathbb{R}$ 	★ Trouve le signe de u sur $\mathbb{R}$ 
8.(a)	<u>Déterminons le domaine de définition de f.</u> $\begin{cases} f(x) = \frac{3^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(x + 3) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Posons $D_1 = \{x \in]-\infty; 0[/ x \neq 0\}$ et $D_2 = \{x \in [0; +\infty[/ x + 3 > 0\}$ On a $D_f = D_1 \cup D_2$ $D_1 =]-\infty; 0[\setminus \{0\} =]-\infty; 0[$ et $D_2 = [0; +\infty[\cap]-3; +\infty[= [0; +\infty[$ $D_f =]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[$ $D_f = \mathbb{R}$	3	★ Identifie f 	★ Pose $D_f = D_1 \cup D_2$ 	★ Trouve $D_1 =]-\infty; 0[$, $D_2 = [0; +\infty[$ et $D_f = \mathbb{R}$ 
8.(b)	<u>Étudions la continuité de f en 0.</u> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x + 3)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln 3$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{x \ln 3} - 1}{x}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x \ln 3} - 1}{x \ln 3} (\ln 3)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \ln 3$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ $f(0) = \ln(0 + 3) = \ln 3$ On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$ Alors la fonction f est continue en 0	4	★ Identifie f 	★ Calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ et $f(0)$ 	★ Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln 3$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \ln 3$ et $f(0) = \ln 3$ puis conclut 

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
9.(a)	Déterminons le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto 3^x$ Soit $v : x \mapsto 3^x = e^{x \ln 3}$ La fonction v est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = e^{x \ln 3}$ et $v(0) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = \ln 3 e^{x \ln 3}$ et $v'(0) = \ln 3$ $\forall x \in \mathbb{R}, v''(x) = (\ln 3)^2 e^{x \ln 3}$ et $v''(0) = (\ln 3)^2$ Donc $v(x) = 1 + (\ln 3)x + \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$	2.5	★ Identifie la fonction $x \mapsto 3^x$ ┐	★ Utilise $v(x) = v(0) + v'(0)x + \frac{v''(0)}{2!}x^2 + x^2\epsilon(x)$ ┐	★ Trouve $v(x) = 1 + (\ln 3)x + \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ ┐
9.(b)	Étudions la dérivabilité de f en 0 et Interprétons graphiquement le résultat obtenu. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x+3) - \ln 3}{x}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\frac{x}{3} + 1)}{\frac{x}{3}} \times \frac{1}{3}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{3}$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ Alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{3}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{x \ln 3} - 1 - x \ln 3}{x^2}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{v(x) - 1 - x \ln 3}{x^2}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{(\ln 3)^2}{2} + \epsilon(x) \right)$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(\ln 3)^2}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ Alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{(\ln 3)^2}{2}$ On a $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.	4.5	★ Identifie f ┐	★ Calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ┐	★ Trouve $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{3}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(\ln 3)^2}{2}$ ★ Conclut f n'est pas dérivable en 0. ★ Trouve les demi-tangentes (T_g) et (T_d) d'équations respectives : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{(\ln 3)^2}{2}x + \ln 3 \end{cases}$

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts												
	Interprétations graphiques La courbe (C) admet deux demi-tangentes au point $M_0(0; \ln 3)$ et d'équations : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{(\ln 3)^2}{2}x + \ln 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \ln 3 \end{cases}$				$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{1}{2}x + \ln 3 \end{cases}$ ❑												
10.	Achevons l'étude des variation de f puis construis (C). ★ <i>Continuité et dérivabilité :</i> f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\begin{cases} f'(x) = \frac{x \ln 3 e^{x \ln 3} - e^{x \ln 3} + 1}{x^2} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ f'(x) = \frac{1}{x + 3} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$ ★ <i>Sens de variation :</i> $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$ et $u(x) > 0$ $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ★ <i>Limites de u au bornes de D_f</i> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 3) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln 3} - 1}{x} = 0$ Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 3} = 0$ ★ <i>Tableau de variation de f</i> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>$\xrightarrow{\ln(3)}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	$ $	$+$	$f(x)$	0	$\xrightarrow{\ln(3)}$	$+\infty$	5	★ Identifie f ┐	★ Dresse le tableau de variation f ★ Etudie les branches infinies de (C)	★ Dérive f et trouve $f'(x)$. ★ Trouve f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ★ Trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ★ Trouve le tableau de variation de f. ★ Trouve les branches infinies de (C). ★ Trace dans un repère la courbe (C) ❑
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$														
$f(x)$	0	$\xrightarrow{\ln(3)}$	$+\infty$														

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
	★ Branches infinies On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 0$ Alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ ★ Courbe C 				
11.(a)	Dérivons la fonction h sur $[0; +\infty[$. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[\quad h'(x) = 1 \times \ln(x+3) + (x+3) \times \frac{1}{x+3} - 1$ $\forall x \in [0; +\infty[\quad h'(x) = \ln(x+3)$	2	★ Identifie h I	★ Dérive h I	★ Trouve $\forall x \in [0; +\infty[$ $h'(x) = \ln(x+3)$ ┐

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
11.(b)	Calculons l'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 3$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine. $\mathcal{A} = \left(\int_0^3 f(x) dx \right) ua$ $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \ln(x+3) dx$ h est une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$ $\int_0^3 f(x) dx = [(x+3) \ln(x+3) - (x+3)]_0^3$ $= 6 \ln 6 - 6 - 3 \ln 3 + 3$ $\int_0^3 f(x) dx = 6 \ln 2 + 3 \ln 3 - 3$ Ainsi $\mathcal{A} = (6 \ln 2 + 3 \ln 3 - 3) ua$	3	★ Identifie le domaine ┐	★ Pose $\mathcal{A} = \left(\int_0^3 f(x) dx \right) ua$ ┐ ★ Utilise h pour primitive de $x \mapsto \ln(x+3)$ ┐	★ Trouve $\mathcal{A} = (6 \ln 2 + 3 \ln 3 - 3) ua$ ┐
12.	Démontrons que g est une bijection. La fonction f est continue et strictement croissante sur $] -\infty; 0]$ et $f(] -\infty; 0]) =]0; \ln 3]$ alors l'application $g :] -\infty; 0[\longrightarrow]0; \ln 3]$ est une bijection. $x \longmapsto f(x)$	2	★ Identifie g ┐	★ Utilise la continuité et la monotonie de f ┐	★ Conclut g est une bijection ┐
13.(a)	Justifions que F est définie sur $] -\infty, 0[$. On a : $F(x) = \int_{-1}^x \frac{3^t - 1}{t} dt = \int_{-1}^x f(t) dt$ La fonction f est continue sur $] -\infty, 0[$ qui contient -1. Donc F est bien définie sur $] -\infty, 0[$	2	★ Identifie F ┐	★ Utilise la continuité de f ┐	★ Conclut F est définie sur $] -\infty, 0[$ ┐
13.(b)	Étudions le sens de variation de F. Soit G une primitive de f sur $] -\infty, 0[$ On a : $F(x) = [G(x)]_{-1}^x = G(x) - G(-1)$ alors F est dérivable sur $] -\infty, 0[$. $\forall x \in] -\infty, 0[, F'(x) = G'(x) = f(x)$ Or $\forall x \in] -\infty, 0[, F'(x) > 0$ Alors F est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$.	3.5	★ Identifie F ┐	★ Dérive F ★ Utilise le signe de $f(x)$ ┐	★ Trouve $\forall x \in] -\infty, 0[, F'(x) > 0$ ┐ ★ Conclut ┐

N°	Éléments de réponses	Points	CA = 0.5 pts	CM = 0.5 pts	CO = 0.5 pts
13.(c)	Étudions le signe de $F(x)$. $\forall x \in]-\infty, 0[, F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ $\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) > 0$ Donc $\forall x \in]-\infty, -1[$ on a $x < t < -1$ donc $\int_x^{-1} f(t)dt > 0$ Alors $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt < 0$ Donc $\forall x \in]-1, 0[$ on a $-1 < t < x$ donc $\int_{-1}^x f(t)dt > 0$ Alors $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt > 0$ D'où $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[, F(x) < 0 \\ \forall x \in]-1, 0[, F(x) > 0 \\ F(-1) = 0 \end{cases}$	5	★ Identifie F et f ┐	★ Utilise $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) > 0$ et les bornes de l'intégrale □	★ Trouve $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[, F(x) < 0 \\ \forall x \in]-1, 0[, F(x) > 0 \\ F(-1) = 0 \end{cases}$ □
14.	Donnons un encadrement de $F(-2)$ par la méthode des rectangles. $F(-2) = \int_{-1}^{-2} f(t)dt$ Soit $\mathcal{A}_1 = \frac{-2+1}{5} (f(-2) + f(-1.8) + f(-1.6) + f(-1.4) + f(-1.2))$ $\mathcal{A}_1 = -0.2 \times (0.44 + 0.48 + 0.52 + 0.56 + 0.61)$ <u>$\mathcal{A}_1 \simeq -0.522$</u> et $\mathcal{A}_2 = \frac{-2+1}{5} (f(-1.8) + f(-1.6) + f(-1.4) + f(-1.2) + f(-1))$ $\mathcal{A}_1 = -0.2 \times (0.48 + 0.52 + 0.56 + 0.61 + 0.67)$ <u>$\mathcal{A}_1 \simeq -0.568$</u> D'où $-0.522 \leq F(-2) \leq -0.568$	3	★ Identifie F et f	★ Utilise la méthode des rectangles pour encadrer $F(2)$ ┐	★ Trouve $-0.522 \leq F(-2) \leq -0.568$ ┐
N°	Totaux Problème 3	Pts= 45.5	Nbre de CA = 19	Nbre de CM = 29	Nbre de CO = 47
N°	Totaux	Pts=90	Nbre de CA = 40	Nbre de CM = 60	Nbre de CO = 80

Critère de perfectionnement (CP)

Soit N la note sur 90 et p la note de perfectionnement sur 10 :

Premier cas : Si $N < 40$, alors $p = 0$;

Deuxième cas : Si $40 \leq N < 60$, alors p varie de 0 à 5 ;

Troisième cas : Si $N \geq 60$, alors p varie de 0 à 10.

Modèle de notation des questions (dans la marge)

CA+CM+C0=T

Exemple : $2+3+4=9$

Modèle de notation de la copie (en haut de la copie)

$N = \dots$; $CP = \dots$; $T = \frac{\dots}{100}$ $\frac{\dots}{20}$

Exemple : $N = 72$; $CP = 7$; $T = \frac{79}{100}$ $\frac{16}{20}$

BONNE CORRECTION



EXAMEN BLANC DÉPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024

Niveau : BAC

Série : D

Durée : 4 H

M 048

ÉPREUVE D

MATHÉMATIQUES

DURÉE 4H

Contexte : La ferme

Deux ouvriers O_1 et O_2 veulent se rendre dans la ferme.

Deux voies assimilables respectivement aux droites (D_1) et (D_2) de système

d'équations paramétriques respectives
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 3s \\ y = 1 + s, s \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 5s \end{cases}$$

O_1 a démarré du point $A_1(1; 0; 1)$ a parcouru la distance de $4\sqrt{14}$ sur (D_1) pour se rendre à la ferme au point B_1 d'abscisse positive et O_2 a démarré du point $A_2(-2; 2; -3)$, a parcouru une distance $2\sqrt{35}$ sur (D_2) avant d'atteindre la ferme au point B_2 d'abscisse négative.

Deux grandes portes sont situées dans une façade de la clôture symbolisée le plan (Q) d'équation $x - y + z - 6 = 0$.

Par ailleurs, la ferme est au bord d'un fleuve qu'on peut assimiler à une partie d'une courbe (Y) .

Dans cette ferme, un domaine clôturé est réservé pour la culture maraîchère. Les deux ouvriers veulent savoir les points qu'ils vont atteindre respectivement pour être dans la ferme après avoir parcouru ces distances, la longueur de la clôture et évaluer l'aire du domaine réservé pour la culture maraîchère.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Tâche : tu vas aider les ouvriers dans leurs préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

PROBLÈME 1

1- Vérifie que $A_1 \in (D_1)$ et $A_2 \in (D_2)$

2-

2-1 Prouve que (D_1) et (D_2) sont sécantes et se coupent au point de coordonnées $(-5; 3; -8)$.

2-2 Démonstre que le plan défini par (D_1) et (D_2) est perpendiculaire au plan (Q) .

3- Détermine les coordonnées respectives des points B_1 et B_2 .

PROBLEME 2

Une partie du domaine est clôturée et la longueur de cette clôture est δ (en kilomètre) où δ est le rayon du cercle circonscrit à un certain triangle.

4- Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} x^2 + 1 = y^2 - 2x \\ xy - y = 0 \end{cases}$$

5- Soit $z = a + ib$ un complexe avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

5-1 Donne la forme algébrique du complexe $z^2 + 2\bar{z} + 1$.

5-2 Déduis-en les solutions de l'équation $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

6- Le triangle en question est celui formé par les points A ; B et C d'affixes respectives $\alpha = -1$; $\beta = 1 + 2i$ et $\gamma = 1 - 2i$.

6-1 Mets le complexe $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$ sous forme exponentielle.

6-2 Déduis-en une interprétation géométrique du résultat.

7- Déduis-en la longueur de la clôture en mètre.

PROBLEME 3

Le domaine de culture maraichère est délimité par la courbe (Y) de f la fonction

numérique réelle définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x \geq 0 \\ x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ la droite d'équation

$y = x$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$.

On pose D le domaine de définition de f et (Y) sa courbe représentative.

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}_1; \vec{u}_2)$

Partie A

8-

8-1 Vérifie que $D = \mathbb{R} - \{1\}$

8-2 Calcule les limites de f aux bornes de D .

8-3 Etudie les branches infinies de (Y)

9-

9-1 Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète les résultats.

9-2 Détermine le domaine de dérivabilité de f .

10- Achève l'étude des variations de f .

11- Construis (Y) (prendre 1cm pour unité graphique).

Partie B

12- Une autre limite de la ferme est assimilable à une partie de la courbe représentative (T) de la fonction g définie par $g : \begin{cases}]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto f(x) \end{cases}$.

12-1 Prouve que g est bijective.

12-2 Démontre que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel $d > 0$ $g'(d) < 0$.

12-3 Donne le tableau de variation de g .

0.1.1.

COURS INTENSIFS juillet 2024

(COURS DE RENFORCEMENT 2024)

Classes ouvertes : 3^{ème} – 1^{ères} (C, D) T^{les} (ABCD)

MODALITES DE PAIEMENT

Option 1 : Payez la totalité à l'inscription.

Option 2 : Payez 10.000F à l'inscription et le reste au plus tard le **lundi 10 juillet 2024**

Pour plus d'informations appeler : 96 38 92 49 - 52 81 89 60 95 51 17 61

OBJECTIF VISE : PROGRAMMES DES CLASSES OUVERTES

**{ 3^è SA1 – SA2 – SA3 – SA4
T^{le} CD – SA1 – SA2 – SA3 en deux MOIS.
1^{ères} – SA1 – SA2 – SA3**

- **DEROULEMENT : Du 03 Juillet au 31 Août 2024**
- **DUREE DE FORMATION : 09 Semaines**
- **JOURS ET HEURES : Du lundi au Jeudi de 8H30 à 13H00**
- **LIEU : EPP GBEGAMEY SUD GROUPE ABC (après le CEG GBEGAMEY en face du Collège Notre-Dame des Apôtres de Cotonou)**

NB : Les inscriptions sont prévues du 01 mai au 17 juin 2024.

Au Groupe la Certitude, c'est l'expérience et le travail bien fait.