

CORRIGE	Barème															
<p>Exercice 1 (3 points)</p> <p>Soit E_V l'ensemble de validité $E_V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } x > 0 \text{ et } -y > 0\}$ donc $E_V =]0; +\infty[\times]-\infty; 0[$ -----></p> <p>$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln(-y) = \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(-xy) = \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -xy = 3 \end{cases}$</p> <p>La résolution de ce système donne $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(3; -1)\}$ -----></p> <p>1- $P(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$ a) Je calcule $P(3)$ $P(3) = 0$ -----></p> <ul style="list-style-type: none"> • Factorisation de $P(x)$ $P(3) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $x - 3$ Utilisation correcte de la division euclidienne ou de la méthode des coefficients indéterminés. -----> <p>On obtient $P(x) = (-x^2 - 2x - 1) = -(x + 1)^2(x - 3)$ -----></p> <ul style="list-style-type: none"> • Signe de $P(x)$ Le signe de $P(x)$ est celui de $-(x - 3)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 \geq 0$ $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$ -----> <p>Tableau de signe</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$-x + 3$</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px; border: 1px solid black;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$P(x)$</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px; border: 1px solid black;">0</td> <td style="padding: 5px; border: 1px solid black;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> </table> <p>$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 3[, P(x) > 0$ $\forall x \in]3; +\infty[, P(x) < 0$ $\forall x \in \{-1; 3\}, P(x) = 0$ -----></p> <p>b) Solution de l'inéquation $x \in E_V \Leftrightarrow 2 - 3x > 0$ $-3x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$ Donc $E_V =]-\infty; \frac{2}{3}[$ Posons $\forall x \in]0; +\infty[,$ et $X \in \mathbb{R}, X = \ln(2 - 3x)$ L'inéquation devient : $-X^3 + X^2 + 5X + 3 \leq 0$ -----></p> <p>Posons $P(X) \leq 0 \Leftrightarrow X \in [3; +\infty[$</p>	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	$-x + 3$	+	+	0	-	$P(x)$	+	0	0	-	<p>0,25 pt</p> <p>0,5 pt</p> <p>0,25 pt</p> <p>0,25 pt</p> <p>0,25 pt</p> <p>0,25 pt</p> <p>0,25 pt</p> <p>0,25 pt</p>
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$												
$-x + 3$	+	+	0	-												
$P(x)$	+	0	0	-												

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $S_{\mathbb{R}} =]0; \frac{e^3-2}{-3}]$ ----->

0,5 pt

Exercice 2 (3 points)

1- Soit M un point du plan d'affixe

$$z = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 + i(x - y + 1) \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des nombres réels.}$$

a) Je détermine l'ensemble des points M tel que $z \in \mathbb{R}$.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \text{ ----->}$$

0,25 pt

Donc (λ) est la droite d'équation $y = x + 1$. ----->

0,25 pt

b) Je détermine l'ensemble (φ) des points M du plan pour que : $z \in i\mathbb{R}$

$$M \in (\varphi) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \text{ ----->}$$

0,25 pt

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \text{ ----->}$$

0,25 pt

Donc (φ) est le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3 ----->

0,5 pt

2- Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ un nombre complexe.

a) Je détermine la forme trigonométrique de j

$$|j| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1 \text{ ----->}$$

0,25 pt

$$\theta = \text{Arg}(j) \Leftrightarrow \theta = \text{Arg}(j) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ----->}$$

0,25 pt

$$\text{Donc } j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ----->}$$

0,25 pt

b) Calculons j^2

$$j^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\bar{j} \text{ ----->}$$

0,5 pt

c) Je détermine la nature du triangle ABC

Soient A, B et C les points images respectifs des nombres complexes 4, j et j^2

ABC est un triangle isocèle en ----->

0,25 pt

Exercice 3 (5 points)

1- a) Tableau de calculs

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} y_i^2$
310	4.170	135.610	10.414	1.791 .500

0,5 pt

b) Je justifie que le budget moyen et du chiffre d'affaire moyen sont respectivement $\bar{X} = 31$ et $\bar{Y} = 417$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

$$\bar{X} = 31$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10}$$

$$\bar{Y} = 417$$

0,25 pt

0,25 pt

c) Je calcule de V(X) , V(Y) et COV (X ,Y)

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \bar{X}^2$$

$$V(X) = 80,4$$

$$V(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{10} - \bar{Y}^2$$

$$V(Y) = 5261$$

0,5 pt

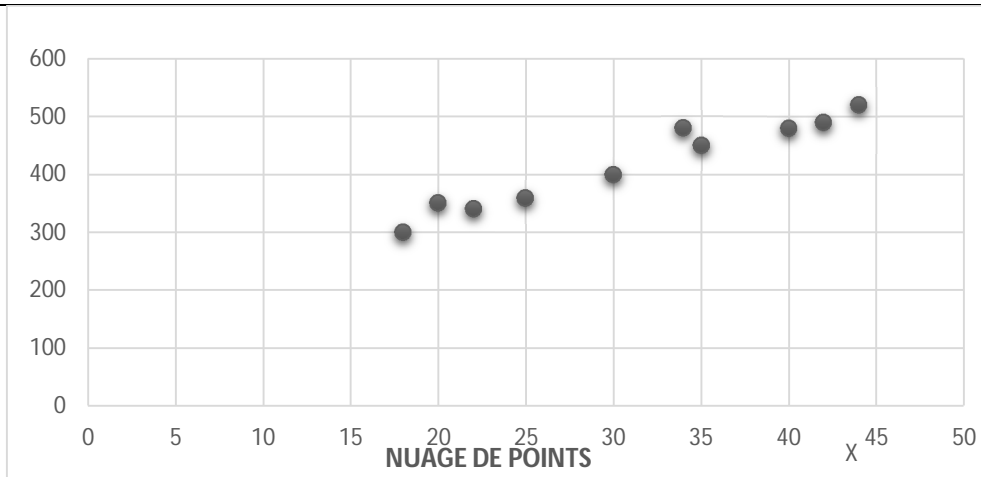
0,5 pt

$$COV(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i}{10} - \bar{X} \bar{Y}$$

$$COV(X, Y) = 634$$

0,5 pt

2- a) Je construis le nuage de points



-----> 0,5 pt

b) Un ajustement linéaire est possible car les points du nuage sont pratiquement alignés .

-----> 0,25 pt

3- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$r = 0,97$$

-----> 0,5 pt

4- Je détermine une équation de la droite de régression (D)

On a (D) : $y = ax + b$

$$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = 7,89$$

-----> 0,25 pt

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 172,41$$

-----> 0,25 pt

Donc (D) : $y = 7,89x + 172,41$

-----> 0,25 pt

5- Calcul du chiffre d'affaire

On a : $y = 7,89x + 172,41$

Pour $x = 50$, $y = 7,89 \times 50 + 172,41$

$$Y = 566,91$$

-----> 0,25 pt

Donc le chiffre d'affaires est **566.910 .000 FCFA**

-----> 0,25 pt

Problème (9 points)

Partie A (3,5 points)

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} - 4\ln x$

1- a) Je calcule la limite en 0 et en $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - 4\ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 - 4x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

-----> 0,25 pt

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 4\ln x = -\infty$$

-----> 0,25 pt

b) J'étudie les variations de g

- **Je calcule la dérivée de g**

g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{-1-4x}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{-(1+4x)}{x^2}$$

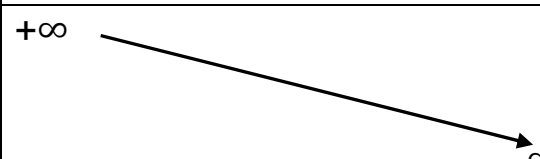
0,5 pt

- **Signe de la dérivée et sens de variation de g**

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

0,5 pt

c) Tableau de variation de g

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	/	-	
$g(x)$	$+\infty$		
			$-\infty$

0,5 pt

2 -a) Je démontre que $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc, g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$, or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

0,5 pt

b) Signe de $g(x)$

D'après le tableau de variation :

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$x \in]0; \alpha[\Rightarrow x < \alpha$ d'où $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$.

Donc $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$

0,25 pt

$x \in \alpha; +\infty[\Rightarrow x > \alpha$ d'où $\forall x \in \alpha; +\infty[, g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$.

Donc $\forall x \in \alpha; +\infty[, g(x) < 0$

0,25 pt

c) Je démontre que $\alpha \in]1,22; 1,23[$

on a : $g(1,22) = 0,024$

$g(1,23) = -0,015$

0,25 pt

Comme $g(1,22) \times g(1,23) < 0$ alors $1,22 < \alpha < 1,23$

0,25 pt

Partie B (5 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2(\ln x)^2$

1- a) Je calcule les limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + 2(\ln x)^2 = +\infty$$

0,25 pt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2(\ln x)^2 = +\infty$$

0,25 pt

b) Je calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 2(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{2(\ln x)^2}{x} = 0 \quad \text{-----} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$. ----- $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$

2- a) Je démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{x} g(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} \times \ln x = -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - 4 \ln x \right) \quad \text{-----} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} g(x) \text{ car } g(x) = \frac{1}{x} - 4 \ln x \quad \text{-----} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

b) J'étudie le signe de $f'(x)$ et je dresse le tableau de variation de f

le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$ car $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ ----- $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$

or $\left. \begin{array}{l} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{array} \right\} \text{-----} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$

D'où $\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$, ----- $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $] \alpha; +\infty[$ ----- $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$

Tableau de variation de f

x	0	α	
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$	↗ $+\infty$

----- $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

3- a) Je démontre que $f(\alpha) = \frac{1}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$

on a : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2(\ln \alpha)^2$

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - 4 \ln \alpha = 0$

$\Leftrightarrow -4 \ln \alpha = -\frac{1}{\alpha}$

$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{4\alpha} \quad \text{-----} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$

Ainsi, $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2$

$= \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{16\alpha^2}$

Donc $f(\alpha) = \frac{1}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{-----} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$

b) J'encadre $f(\alpha)$ à 10^{-2} près et je donne une valeur approchée de α à 10^{-1} par défaut.

On a : $1,22 < \alpha < 1,23$

$(1,22)^2 < \alpha^2 < (1,23)^2$

$8(1,22)^2 < 8\alpha^2 < 8(1,23)^2$

$$\frac{1}{8(1,23)^2} < \frac{1}{8\alpha^2} < \frac{1}{8(1,22)^2}$$

On a : $\frac{1}{1,23} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1,22}$

Par somme membre à membre, on a :

$$\frac{1}{8(1,23)^2} + \frac{1}{1,23} < \frac{1}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{8(1,22)^2} + \frac{1}{1,22}$$

0,25 pt

$$0,89 < f(\alpha) < 0,90$$

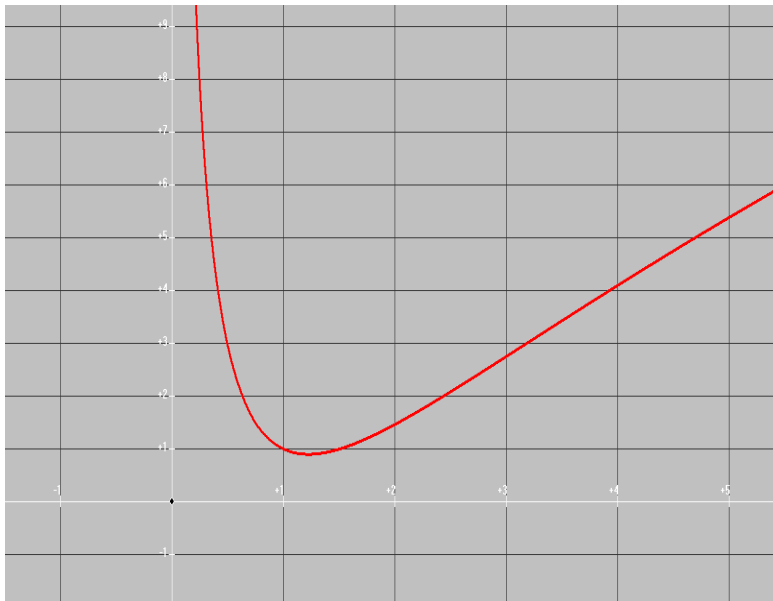
$$0,8 < f(\alpha) < 0,9$$

Donc $f(\alpha) = 0,8$ par défaut

0,25 pt

0,25 pt

2- Construction de (C_f)



0,5 pt

Partie C (0,5 point)

Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = x \ln x - x + 1$

a) Je démontre que h est une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = \ln x$ donc h est une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$

0,25 pt

b) Je calcule $h(e^2) - h(e)$

$$h(e^2) - h(e) = e^2$$

0,25 pt