**BACCALAUREAT BLANC**
**SESSION MARS 2024**

# MATHEMATIQUES

**Durée : 4 heures**
**Coefficient : 4**

**SÉRIE : D**



***Cette épreuve comporte quatre pages numérotées 1/4 , 2/4 , 3/4 et 4/4.***
***Le candidat devra se munir d'un papier millimétré. L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.***

## EXERCICE 1 *(2 points)*

Pour chacune des affirmations ci-dessous, écris sur ta copie le numéro de la ligne suivi de ***VRAI*** si l'affirmation est vraie ou ***FAUX*** si l'affirmation est fausse.

| N° | Affirmations |
|---|---|
| 1 | L'image de l'intervalle $[-2;3]$ par la fonction carrée est l'intervalle $[4;9]$. |
| 2 | Soit $f$ une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que : $-1 \leq f'(x) \leq 1$ pour tout $x$ élément de $[a;b]$. On a donc : $a-b \leq f(a)-f(b) \leq b-a$. |
| 3 | Soit la fonction logarithme népérien $\ln$ et $f$ une fonction strictement positive sur $]0\,;+\infty[$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = -\infty$. |
| 4 | Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, definie par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Toute primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$ est de la forme : $x \mapsto 2\sqrt{x}+k$, $(k \in \mathbb{R})$. |

## EXERCICE 2 *(2 points)*

Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous, quatre réponses sont données dont une seule est juste.
Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | affirmations | Réponses | |
|---|---|---|---|
| 1 | $z$ est le nombre complexe défini par $z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Le module $r$ de $z$ et l'argument principal $\theta$ de $z$ vérifient : | A | $r=-2$ et $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ |
| | | B | $r=2$ et $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}$ |
| | | C | $r=-2$ et $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}$ |
| | | D | $r=2$ et $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ |
| 2 | Pour tout nombre réel positif $x$, le nombre $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[4]{x}$ est égal à : | A | $\sqrt[12]{x}$ |
| | | B | $\sqrt[7]{x}$ |
| | | C | $\sqrt[12]{x^7}$ |
| | | D | $\sqrt[7]{x^{12}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $\left(\log\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$ est égal à : | A | $\dfrac{\left(\log(x)\right)^2}{4}$ |
| | | B | $\dfrac{\left(\log(x)\right)^2}{2}$ |
| | | C | $\log(x)$ |
| | | D | $\log\left(2\sqrt{x}\right)$ |
| 4 | Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 + (2+3i)z - 2(1-2i) = 0$ sont … | A | $2i$ et $-2-i$ |
| | | B | $2i$ et $2+i$ |
| | | C | $-2i$ et $2-i$ |
| | | D | $-2i$ et $-2-i$ |

## EXERCICE 3 *(2,5 points)*

Pour tout entier naturel *n*, on définit les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{3u_n+5} \end{cases}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

1. a) justifie que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{16}{9u_n + 15}$

   *b)* A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.

   *c)* Justifie que la suite $(U_n)$ est décroissante.

2. Déduis des questions précédentes que la suite $(U_n)$ est convergente.

3. *a*) Démontre que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et précise son premier terme.

   b) Déduis-en l'expression de $V_n$ puis celle de $U_n$ en fonction de $n$.

   c) Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

## **EXERCICE 4** : *(3,5 points)*

*Les deux parties A et B sont indépendants.*
*Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à $10^{-4}$.*

### Partie A

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note :

- V, l'événement « la personne est contaminée par le virus »
- T, l'événement « le test est positif ».
- $\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. a) Précise les valeurs des probabilités : $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\bar{V}}(\bar{T})$

   b) Traduis la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   c) Déduis-en la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontre que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. a) Justifie par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

   b) Détermine la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

### Partie B

On choisit successivement $n$ personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces $n$ personnes.

1. Justifie que la probabilité $P_n$ d'avoir au moins une personne contaminée par le virus parmi est :

$P_n = 1 - (0{,}98)^n$.

2. Déterminer la valeur minimale de $n$ pour que la probabilité d'avoir au moins une personne contaminée par le virus soit supérieure à 0,99.

☞ ***Tourne la page STP***

## <u>EXERCICE 5</u> *(5 points)*

**<u>Partie A</u>**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x} - 2\ln x$

1. a) Détermine : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

   b) Démontre que : $\forall x \in ]0;+\infty[$, $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}(2e^{x}+x)}{x}$.

   c) Etudie le sens de variation de $g$ puis dresse son tableau de variation.

2. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0;+\infty[$.

   b) Vérifie que : $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

   c) Déduis-en que : $\forall x \in ]0;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

**<u>Partie B</u>**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} - 2x + 2x\ln x \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ,I ,J). L'unité graphique est 3 cm.

1. Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
2. Démontre que $f$ est continue en 0.
3. a) Justifie que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

   b) Interprète graphiquement ce résultat.
4. On admet que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

   a) Démontre que : $\forall x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = -g(x)$.

   b) Etudie les variations de $f$ puis dresse son tableau de variation.
5. Construis la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 3]. On prendra : $\alpha = 1{,}1$ et on admettra que la courbe (C) Coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives $0{,}1$ et $2{,}7$.

## <u>EXERCICE 6</u> : *(5 points)*

A la fin de chaque mois, une nouvelle entreprise de fabrication de boisson gazeuse fait le bilan de ses recettes du mois écoulé. Un expert en finances et ami du directeur de l'entreprise, ayant obtenu des chiffres sur l'évolution financière de cette entreprise, fait une modélisation des recettes sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ par la fonction $k$ définie par sa formule explicite ci-dessous:

$k(x) = 3x - xln(\frac{1}{2}\,x)$ où $x$ désigne le nombre de mois d'existence de l'entreprise et $k(x)$ est exprimée en millions de francs CFA.

Pour prévenir d'éventuelles difficultés que pourrait connaître son entreprise, le directeur veut savoir le mois à partir duquel une baisse des recettes sera enregistrée, en vue d'accroître le capital d'investissement. N'ayant pas les compétences requises pour effectuer de tels calculs, il te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à sa préoccupation.