BACCALAURÉAT BLANC **Coefficient : 4**

SESSION : FÉVRIER 2025 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

Série : D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat aura à utiliser une (01) feuille de papier millimétré.
Seule la calculatrice scientifique non graphique et non connectable est autorisée.

EXERCICE 1 : ***(2 points)***

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de "**V**" si l'affirmation est vraie ou "**F**" si elle est fausse :

N°	PHRASES INCOMPLETES
1	La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction exponentielle qui s'annule en 1.
2	h étant une fonction définie en 4, h admet une limité en 4 si et seulement si h admet en 4 une limite à gauche et une limite à droite égales.
3	Ω étant l'univers d'une expérience aléatoire, A un événement de Ω de probabilité non nul et B un événement de Ω, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, est $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
4	f étant une fonction non définie en 2, d'ensemble de définition D_f et de limite le nombre 3 en 2, la fonction g définie par $g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\in D_f \\ f(2) = 5 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f au point 2.

EXERCICE 2 : ***(2 points)***

Pour chaque affirmation incomplète du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'obtenir l'affirmation vraie.
Écris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation incomplète suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS INCOMPLÈTES	RÉPONSES	
1	Pour tout nombre réel positif x et pour tous nombres entiers naturels non nuls n et m, le nombre $(x^n)^{\frac{1}{p}}$ est égal à …	A	$\sqrt[p]{x^n}$
		B	$x^{\frac{p}{n}}$
		C	$\sqrt[n]{x^p}$
		D	$(\sqrt[n]{x})^p$
2	Soit f la bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x)= 4x + 8$. La bijection réciproque de f est la bijection g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que …	A	$g(x)=\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$
		B	$g(x)= x - 2$
		C	$g(x)= 8x - 4$
		D	$g(x)=\frac{1}{4}x - 2$
3	On considère la bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers]-1 ; 1[telle que $f(x) = sinx$. Sachant que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$, on obtient $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égale à …	A	$\frac{-1}{f'(\frac{\pi}{6})}$
		B	$\frac{1}{cos(\frac{\pi}{6})}$
		C	$\frac{1}{sin(\frac{\pi}{6})}$
		D	$\frac{1}{cos(\frac{1}{2})}$

4	Si on répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où p est la probabilité d'obtenir succès dans chacune, alors la probabilité d'obtenir k succès est égale à …	A	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
		B	$C_n^k p^k (1-p)^n$
		C	$C_n^k p^n (1-p)^p$
		D	$C_n^k (1-p)^{n-k}$

EXERCICE 3 : ***(3,5 points)***

Une urne contient 10 billes toutes indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.

Un jeu consiste à tirer simultanément deux billes de cette urne.

1) Calcule la probabilité des événements suivants :
   A : « Tirer deux boules portant chacune le chiffre 1. »
   B : « Tirer deux boules portant chacune le chiffre 5. »
   C : « Tirer deux boules portant des chiffres différents. »
   D : « Tirer deux boules portant le même chiffre. »

2) On suppose maintenant que l'urne contient a billes portant le chiffre 1 et b billes portant le chiffre 5 tel que : $a + b = 10$; $1 < a < 9$ et $1 < b < 9$.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage effectué, la somme des chiffres portés sur les billes.

2-1 Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2-2 Démontre que l'espérance mathématique E(X) est égale à $\frac{50-4a}{5}$.

2-3 Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 : ***(3,5 points)***

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1) $2ln(x) < 1$.
2) $e^{2x} - x - 2 > 0$.

Partie B

Dans cette partie, on désire déterminer sur $]-\infty ; 1[$ une primitive F de la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On désigne alors par g, h et k, les fonctions définies respectivement par :

$$g(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2} ; \; \hbar(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; \; k(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

1) 1-a) Démontre que pour tout $x \in]-\infty ; 1[$, $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$.

   1-b) Déduis-en une expression de $G(x)$ où G est une primitive de g sur $]-\infty ; 1[$.

2) 2-a) Soit k' la dérivée de la fonction k. Justifie que : $k'(x) = \hbar(x)$.

   2-b) Déduis-en une primitive de $\hbar$ sur $]-\infty ; 1[$.

3) En utilisant les résultats précédents, trouve une expression de $F(x)$.

EXERCICE 5 : ***(5 points)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative de dans le plan mini d'un repère orthonormé (O ; I ; J) tel que OI $=$ 2 cm et OJ $=$ 1 cm.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire :**

Soit la fonction g dérivable, définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$.

1-a) Calcule les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

1-b) Etudie le sens de variation de g.

1-c) On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Démontre qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0 ; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

1-d) Vérifie que : $0{,}703 < \alpha < 0{,}704$.

On admettra que α est l'unique nombre réel tel que $g(\alpha) = 0$.

1-e) Démontre que pour tout x appartenant à $]-\infty ; \alpha[$, $g(x)<0$ et pour tout x appartenant à $]\alpha ; +\infty[$, $g(x)>0$.

2) Étude de la fonction f :

On admet que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. On note f' la fonction dérivée de f.

2-a) Calcule les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$, à gauche en 0 et à droite en 0.

2-b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.

2-c) Précise les asymptotes de la courbe (C_f).

2-d) Démontre que pour tout réel x non nul, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

2-e) Déduis-en le sens de variation de f.

2-f) Dresse le tableau de variation de f.

2-g) Démontre que sur $]0 ; +\infty[$, la fonction f admet en α un minimum égal à : $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$.

2-h) Construis la courbe (C_f).

EXERCICE 6 : ***(5 points)***

Lors d'une expérience au laboratoire d'un Lycée, un groupe d'élèves a injecté une dose de 1 000 bactéries à un lapin. Dans le corps de celui-ci, le nombre de bactéries est multiplié par 1,1 chaque heure. De plus, sa consommation devient dangereuse pour les prédateurs à partir du moment où il contient plus de 9 milliards de ces bactéries.
Par inattention, le lapin s'est échappé du laboratoire juste après qu'il ait reçu l'injection et a disparu dans la broussaille non loin du laboratoire.

Les élèves sont inquiets et veulent éviter que le lapin devienne un danger. Ils veulent savoir le temps dont ils disposent pour retrouver le lapin et lui inoculer l'antidote. Ils demandent ton aide.

A l'aide d'une production écrite basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine le temps dont disposent les élèves pour retrouver le lapin et lui inoculer l'antidote avant qu'il ne constitue un danger.