



# MATHÉMATIQUES

*Série D*

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1, 2 et 3.*

*Toute calculatrice scientifique est autorisée.*

*Le candidat utilisera deux feuilles de papier millimétré.*

## EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, relève le numéro suivi de V si elle est vraie ou F si elle est fausse.  
(Aucune justification n'est demandée)

N°	AFFIRMATIONS
1	Si $f$ est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x_0$ et si sa dérivée seconde s'annule en $x_0$ en changeant de signe, alors le point $(x_0 ; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de $f$ .
2	Pour tous nombres réels $x$ et $y$ , on a : $(\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^y \Leftrightarrow x < y$ .
3	Toute fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ .
4	$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables et à dérivées continues sur un intervalle $I$ . Une primitive sur $I$ de la fonction $u' \times v' \circ u$ est la fonction $v \circ u$ .

## EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule réponse est vraie.

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	Réponses	
		A	B
1	Si $f$ est une fonction dérivable et bijective sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(1) = 2$ et $f(1) = -2$ alors $(f^{-1})'(-2) = \dots$	A	0
		B	1
		C	$\frac{1}{2}$
		D	$-\frac{1}{2}$
2	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(-x + 3) \geq 2$ est ...	A	$[3; 3 - e^2[$
		B	$\emptyset$
		C	$[3; +\infty[$
		D	$] -\infty; 3 - e^2]$
3	Une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = (2x + 5)^{\frac{1}{2}}$ est la fonction $F$ définie par .....	A	$F(x) = \frac{(2x + 5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1}$
		B	$F(x) = \frac{1}{3}(2x + 5)^{\frac{3}{2}}$

		<b>C</b>	$F(x) = (x^2 + 5x)^{\frac{1}{2}}$
		<b>D</b>	$F(x) = \frac{2}{x^2 + 5x}$
<b>4</b>	Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs et différents de 1, on a : $\log_a(b) = \dots$	<b>A</b>	$\frac{1}{\log_b(a)}$
		<b>B</b>	$\frac{\ln(ab)}{\ln 10}$
		<b>C</b>	$-b \times \log(a)$
		<b>D</b>	$-\log_a(b)$

### **EXERCICE 3 (3,25 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm), on donne les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $Z_A = 2i$  ;  $Z_B = 3 + i$  ;  $Z_C = 2 - 2i$ .

- Place les points  $A, B$  et  $C$ .
- Calcule les distances  $AB, AC$  et  $BC$ .
  - Déduis-en que le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $B$ .
- Détermine l'affixe du point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.
- Soit  $P$  un polynôme défini par :  $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i$ .
  - Calcule  $P(2i)$ .
  - Détermine les nombres complexes  $a$  et  $b$  tel que  $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$
  - On admet que  $(1 + 3i)^2 = -8 + 6i$ .  
Résous dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E')$ :  $z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i = 0$ .
  - Déduis-en les solutions de l'équation :  $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ .

### **EXERCICE 4 (3 points)**

On considère deux urnes  $U$  et  $V$ . L'urne  $U$  contient 3 boules rouges et 2 boules noires ; l'urne  $V$  contient 3 boules rouges et 3 boules noires. On réalise l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne  $U$  :

- Si elle est noire, on la remet dans l'urne  $V$  ;
- Sinon on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne  $V$ . On considère les événements suivants :

- $R_1$  « La boule tirée de l'urne  $U$  est rouge » ;  
 $N_1$  « La boule tirée de l'urne  $U$  est noire » ;  
 $R_2$  « La boule tirée de l'urne  $V$  est rouge » ;  
 $N_2$  « La boule tirée de l'urne  $V$  est noire ».

- Calcule les probabilités de chacun des événements  $R_1$  et  $N_1$ .
  - Justifie que les probabilités  $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2}$  et  $P_{N_1}(R_2) = \frac{3}{7}$ .
  - A l'aide d'un arbre pondéré, justifie que :  $P(R_2) = \frac{33}{70}$ .
  - Déduis-en la probabilité de l'événement  $N_2$ .
- On répète  $n$  ( $n \geq 2$ ) fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de l'urne  $U$  suivie du tirage d'une boule de l'urne  $V$  dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.

- Justifie que la probabilité  $P_n$  d'obtenir au moins une fois une boule rouge est  $1 - \left(\frac{37}{70}\right)^n$ .
- Détermine le nombre minimum d'essais qu'on doit effectuer pour que la probabilité  $P_n$  soit supérieur à 0,99.

### **EXERCICE 5 (4,75 points)**

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = e^x - 1 - xe^x \ln x \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- Calcule la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- Démontre que  $\forall x > 0, g'(x) = -(x+1)e^x \ln x$ .
  - Etudie les variations de  $g$  puis dresse son tableau de variation.
- Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1; +\infty[$ .
  - On admet que  $1,6 < \alpha < 1,7$ . Démontre que  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{e^x - 1}$ . On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; I; J)$ .  $OI = 2$  cm et  $OJ = 4$  cm.

- Justifie que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
  - Interprète graphiquement chacun des résultats précédents.
- Démontre que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x - 1)^2}$
  - Démontre que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$ .
  - Etudie les variations de  $f$ , puis dresse son tableau de variation.
- Construis  $(C_f)$ .

### **EXERCICE 6 (5 points)**

Un pâtissier de la ville de Korhogo commercialise des glaces très prisées par les consommateurs. Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale située au quartier SOBA. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le bénéfice journalier réalisé par le pâtissier pour la vente de  $x$  centaines de glaces est noté  $B(x)$ .

D'après les données précédentes, l'artisan sait que :

- Pour tout  $x$  élément de l'intervalle  $[1; 3; ]$ ; on a :  $B'(x) = -20x + 30$ , où  $B(x)$  est exprimés en milliers de francs CFA et  $B'(x)$  est la fonction dérivée de  $B(x)$  sur  $[1; 3; ]$ .
- Pour une centaine de glaces vendues, son bénéfice est de 30 mille francs CFA.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer le nombre de glaces qu'il doit fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximal et de déterminer la valeur de ce bénéfice.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à sa sollicitation.

