BACCALAURÉAT BLANC
DRENA SAN PÉDRO
UP : Mathématiques

Année scolaire 2023-2024
Niveau : T^{le} C
Durée : 04h00
Coefficient 5

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3 .
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées

EXERCICE 1 : (*2 points*)

Écris sur ta copie le numéro de chaque affirmation, suivi de "V" si elle est vraie ou de "F" si elle est fausse.

N°	*Affirmations*
1	Si $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x+3)=0$, alors la droite d'équation $y=2x-3$ est asymptote oblique en $-\infty$ à la courbe représentative de de f dans un repère (O ; I ; J).
2	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k})$, si P est le plan d'équation cartésienne : $x+\frac{3}{2}y+2z-4=0$, alors le vecteur $\vec{n}(2;3;4)$ est un vecteur normal à P.
3	Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, de demi distance focale $\sqrt{7}$ a pour foyer F($\sqrt{7}$; 0) et F'(-$\sqrt{7}$; 0).
4	Toute suite numérique bornée et croissante admet une limite finie.

EXERCICE 2 : (*2 points*)

Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.
Écris le numéro de chaque affirmation, suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	*Affirmations*	*Réponses*	
1	Dans un repère de l'espace, les droites (D) et (Δ) de représentations paramétriques respectives $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\\z=2-3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $\begin{cases}x=-1+3u\\y=6u\\z=-1-9u\end{cases}, u\in\mathbb{R}$ sont ...	A	sécantes.
		B	strictement parallèles.
		C	sont perpendiculaires.
2	L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle isocèle en C tel que AB=4, AC=BC=6 et I milieu de [AB]. L'ensemble (E) des points M du plan tel que $2MA^2+2MB^2-4MC^2=0$ est	A	un cercle.
		B	une droite.
		C	un plan.
3	Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e_1}\,;\ \vec{e_2})$ et A le point d'affixe $2-i$. L'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z tels que $\text{Arg}\,(z-2+i)=\frac{\pi}{4}$ est……..	A	une droite passant par A.
		B	un cercle de centre A.
		C	une demi-droite d'origine A.
4	Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), l'ensemble (Γ) d'équation $(x-2)^2-4(y+1)^2-16=0$ est ...	A	une hyperbole.
		B	une parabole.
		C	une ellipse.

EXERCICE 3: (*4points*)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2-a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D).

3-Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4-Construire la courbe (C_3). (On prendra $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

5-a) Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < ln\, n$.

b) Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que :

$x_n \leq -lnn$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim_{x\to+\infty} y_n$.

6-On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x & x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0 .

b) Vérifier que pour $n \geq 3$, on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.

c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

EXERCICE 4 : (*3points*)

L'unité est le centimètre. Dans le plan orienté, on donne un carré ABCD de centre I tel que AB=3 et F le barycentre des points pondérés (A ;4), (B ;-1) et (D ;-1).

1- a) Démontre que A est le milieu du segment [FI].

b) Justifie que $FB^2 = \frac{45}{2}$ puis que FB = FD.

2- Soit (E_1) l'ensemble des points du plan tels que :$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.

a) Démontre que $M \in (E_1) \Leftrightarrow 2MF^2 - 27 = 9$.

b) Détermine et construis l'ensemble (E_1)

3- Dans le plan muni d'un repère $(B;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on admet que les coordonnées des points A et C sont A(0 ;3), C(3 ;0) et la droite (AD) a pour équation : y = 3. Soit (E_2) l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(y-3)^2 - 27$.

a) Détermine les coordonnées du point F puis justifie que dans le repère $(B;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, une équation de (E_2) est : $\frac{4(x+1,5)^2}{3} + (y-5)^2 = 1$.

b) Déduis-en que (E_2) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice associée.

c) Justifie que les coordonnées des sommets sont : $S_1\left(-\frac{3}{2};4\right)$ et $S_2(-\frac{3}{2};6)$.

d) Construis (E_2) sur la même figure que (E_1).

EXERCICE 5 : (*4points*)

Partie I :

1.a) On donne le nombre complexe : $a = 2 - 2i\sqrt{3}$. Détermine sous forme algébrique les racines carrées de a.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (3\sqrt{3} + 3i)z + 4i\sqrt{3} = 0$

2. Soit le polynôme complexe p tel que : $p(z) = 2z^3 - 3(\sqrt{3} + 3i)z^2 - 10(1 - i\sqrt{3}) + 8\sqrt{3}$.

a) Vérifie que : $p(2i) = 0$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, unité graphique 2cm. On donne les points U, B et K d'affixes respectives $z_U = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2i$ et $z_K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

1. a) Place les points U, B et K dans le plan complexe.
   b) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes z_U, z_B et z_K.
2. Détermine la nature du triangle BOU.
3. Soit C l'image du point O par la symétrie de centre K.
   a) Détermine l'affixe du point C.
   b) Démontre que le quadrilatère BOUC est un losange.
4. On note $G = bar\,\{(O, 2), (U, -1), (C, 1)\}$.
   a) Démontre que G est le milieu du segment [BO].
   b) Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{A})$ des points M du plan tels que :

$\|2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MU} - 2\overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 6 : (5 points)

Pour fructifier ses affaires, KOUYA un jeune de la commune de SAN PEDRO décide d'ouvrir le coffre-fort contenant des objets précieux que lui a légués son défunt père anciennement professeur de Mathématiques. Après avoir ouvert le coffret contenant le coffre-fort, il découvre une enveloppe contenant une feuille sur laquelle sont données des indications sur le code de déverrouillage du coffre-fort. Sur la feuille, on pouvait lire ceci :

- le code de déverrouillage est un nombre entier naturel de quatre chiffres, multiple de 99 ;
- le chiffre des milliers est le chiffre des unités du nombre 3^{2023} ;
- le chiffre des centaines est la plus petite solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation (E): $4x + 5 \equiv 0[7]$.

Ne sachant comment exploiter ces informations, il te sollicite. A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances mathématiques, donne une réponse à KOUYA.