BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : BG	**Durée : 3H00**	**Coefficient : 4**	**Feuille : 1/3**	**Session** : Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

Exercice1 : (5pts)

1- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique.

$$z_1 = -2(\sin x + i\cos x) \text{ et } z_2 = -3e^{-\frac{2\pi i}{3}} \qquad (0{,}75\text{pt}+0{,}75\text{pt})$$

2- Soit la fonction polynôme P dan C définie par :

$P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50.$

a- Démontrer que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure $z_0 = ib$. (0.5)

b- Résoudre dans C l'équation p(z)=0, on note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$. (1,5 pt)

3- Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = 3+4i$ et $z_C = 4+3i$.

a- Montrer que le point G barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B,-1) et (C, 1) a pour affixe $z_G = 1+i$ puis écrire z_G sous la forme exponentielle. (0 ,5pt+05pt)

b- Quelle est la nature du quadrilatère ABCG ? (0,5pt)

Exercice2 : (5pts)

Soit f l'endomorphisme de IR^3 dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

1-Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (1pt)

2-Soit $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ l'image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de l'endomorphisme f telle que f
Exprimer les coordonnées x', y' et z' de $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées x, y et z de $\vec{u}$. (1pt)

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : BG	**Durée : 3H00**	**Coefficient : 4**	**Feuille : 2/3**	**Session** : Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

3- Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\vec{e}_1)$. (1pt+0,5pt)

4- Déterminer l'image de f et en donner une base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. (1pt+0,5pt)

Exercice3 : (7pts)

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)= (x+1)e^{-2x}+1-x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1/a- Montrer que $\forall$ x$\in$ $[0, +\infty[$: $f'(x)= (-2x-1)e^{-2x} - 1$. (0,5pt)

b-Dresser le tableau de variation de f' sur $[0, +\infty[$ puis en déduire le signe de f' sur $[0, +\infty[$. (0,5pt+0,25pt)

c-Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$. (0,5pt)

d-Montrer que la droite (D) d'équation y=-x+1 est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$. (0,25pt)

e-Construire (C) et (D) dans le même repère. (0,75pt)

2/a- Montrer que l'équation $f(x)$=0 admet sur $[0, +\infty[$ une solution unique α. (0,25pt)

b- Montrer que : $1 \leq \alpha \leq 2$, sachant que f est décroissante. (0,25pt)

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : BG	**Durée : 3H00**	**Coefficient : 4**	**Feuille : 3/3**	**Session** : Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $g(x)=xe^{-2x}+e^{-2x}+1.$

1-Etudier les variations de g sur I puis en déduire que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I.$ (2pts+0,75pt)

2-Montrer que pour tout $x\in I$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$. En déduire que pour tout $x\in I$ on a : $|g(x)-g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$. (0,5pt+0,5pt)

<u>Exercice4</u> : (3pts)

On prélève 5 œufs dans un lot de 10 œufs dont 4 proviennent d'une poule et d'un coq de race F et 6 d'une poule et d'un coq de race G. Les œufs d'une race sont indiscernables des œufs de l'autre race.

1-Trouver le nombre de façons possibles de prélever 5 œufs parmi les dix. (1pt)

2-Calculer la probabilité des événements suivants :

A :<<Il y a un seul œuf de race F parmi les 5 œufs prélevés >>. (1pt)

B :<<le prelevement contient exactement 3 œufs de race F>>. (1pt)

Correction bac technique

Lane

Série : BG

Exercice 1 :

1- Déterminons le module et un argument des n.c :

$z_1 = -2(\sin x + i\cos x)$

Module : $z_1 = -2i(\cos(-x) + i\sin(-x))$

$|z_1| = 2$ (0,5pt)

Argument :

$\arg(z_1) = \arg(-2i) + \arg(\cos x - i\sin x)$

$\arg(z_1) = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (0,5pt)

Forme trigonométrique de z_1

$= 2\left[\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ (0,5pt)

$z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

Module :

$|z_2| = 3$. (0,5pt)

Argument :

$\arg(z_2) = \arg(3) + \arg\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$

$= \pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$ (0,5pt)

Forme trigonométrique de z_2

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (0,5pt)

$P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$

- Démontrons que P admet une racine imaginaire pure z_0

Posons $z_0 = ib$

D'où $z_0 = 2i$ (0,5pt) (1pt)

- Résolvons dans ℂ, $P(z) = 0$. ①

$P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$

$a = 1$ $b = -7-7i$ et $c = 25i$

$P(z) = (z-2i)(z^2 - (7+7i)z + 25i)$ (0,5pt)

$P(z) = 0 \Rightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - (7+7i)z + 25i = 0$

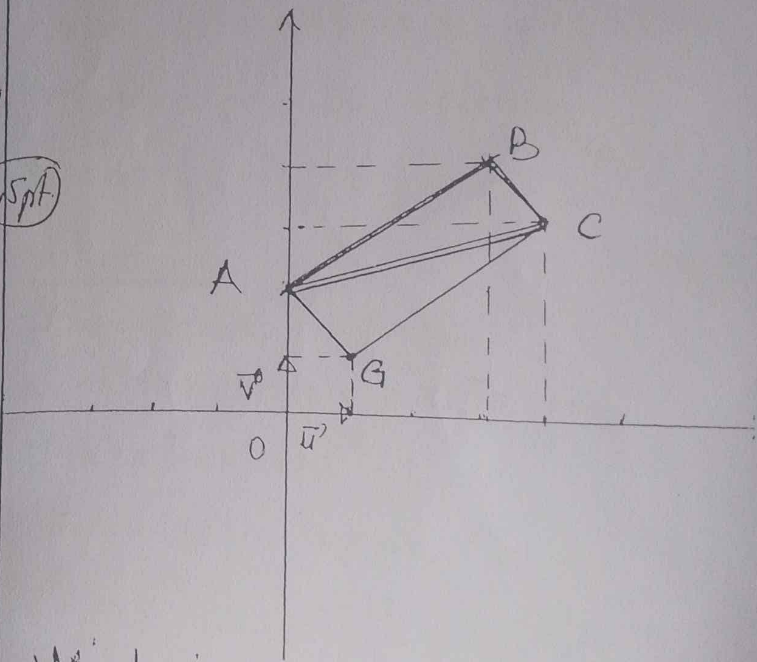
$\Delta = 2i$

$\sqrt{\Delta} = 1-i$ ou $\sqrt{\Delta} = -1+i$

D'où $z_0 = 2i$; $z_1 = 3+4i$ et $z_2 = 4+3i$

$S = \{2i ; 3+4i ; 4+3i\}$ (1pt)

3) $z_A = 2i$, $z_B = 3+4i$ et $z_C = 4+3i$



a) Montrons que $z_G = 1+i$.

$\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

$(z_G - z_A) = -(z_B - z_A) + (z_C - z_A)$

$\Rightarrow z_G = 1+i$ (0,5pt)

- Forme exponentielle de z_G.

$z_G = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (0,5pt)

b- Nature du quadrilatère ABCG.

$z_{\vec{..}} = z_{.} - z_{.} = 2+9i$

$t_G - t_C = 3 + 2i$

$= \vec{GC}$, alors le quadrilatère ABCG est un parallélogramme. (0,5pt)

Solution 2 :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

Déterminons la matrice de f.

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (1pt)

Exprimons x', y' et z' en fonction de x, y et z.

$\vec{u}' = f(\vec{u})$

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$ (1pt)

- Déterminons Ker f et une base $(\vec{e_1})$.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$ (1pt)

$\vec{u} = (x, y, z) = y(0, 1; -1)$.

$= y\vec{e_1}$ avec $\vec{e_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e_1} = \vec{j} - \vec{k}$.

4 - Déterminons Im f et une base $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$.

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \Rightarrow y' = z' + x' \\ z' = x \qquad \Rightarrow x' - y' + z' = 0. \end{cases}$$ (1pt)

$\vec{u}' = (x; y; z) = (x; x+z, z)$

$= x(1; 1; 0) + z(0; 1; 1)$

$\vec{u} = x\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ avec $\vec{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'image de f est un plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$ engendré par les vecteurs $\vec{e_2} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3} = \vec{j} + \vec{k}$. (0,5pt)

Solution 3 :

$f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$

1- a) Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[$

$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x} - 1$

$f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$

$f'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} - 1$

D'où $\forall x \in [0, +\infty[$, $\underline{f'(x) = (-2x-1)e^{-2x} - 1}$ (0,5pt)

b- Dressons le T.V de f' sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in [0; +\infty[$, $f''(x) = 4xe^{-2x}$

$\forall x \in [0; +\infty[$; $f''(x) = 4xe^{-2x} \geq 0$, alors f' est croissante sur $[0, +\infty[$ (0,25pt)

$f'(0) = -2$

$\lim f'(x) = -1$

	+
y	$-2 \nearrow -1$

(0,5pt)

- Dressons le T.V de f sur $[0,+\infty[$
$x \in [0,+\infty[$; $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$

(0,5pt)

$f(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

- Montrons que la droite (D) : $y = -x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1)e^{-2x} + 1 - x + 1 + x\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-2x} = 0.$

Donc (D) : $y = -x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. (0,25pt)

2/a- Montrons que $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0,+\infty[$
f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty,2]$. Or $0 \in]-\infty,2]$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique ... $f(\alpha) = 0$. (0,25pt)

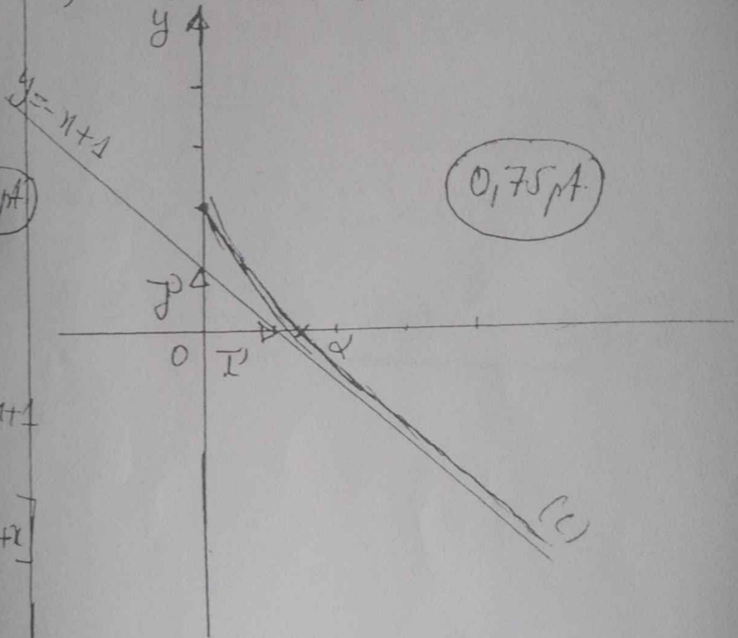
b- Montrons que $1 \leq \alpha \leq 2$ sachant que f est décroissante.

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0,27 \\ f(2) = -0,95 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(1) \times f(2) < 0$, alors

$f(2) \leq f(\alpha) \leq 1$.

Donc $1 \leq \alpha \leq 2$. (0,25pt)

c) Construisons (C) et (D)



(0,75pt)

Partie B :

$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$ sur $I = [0,+\infty[$

1- Etudions les variations de g sur I.

$\forall x \in I$; $g'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$. (1pt)

$\forall x \in I$; $g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur I (0,5

Déduisons que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$

Tableau de variation :

$$\begin{array}{c} + \\ 2 \searrow 1 \end{array}$$

(0,5pt)

$(0) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$\in I = [0, +\infty[\Rightarrow g(x) > 0$

$\Rightarrow g(x) \in]0 ; +\infty[\subset [0, +\infty[$

$\Rightarrow g(x) \in [0, +\infty[$

ors $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. (0,75pt)

Montrons que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{3}{e}$

$x \in I$, $g''(x) = 4x e^{-2x} \geq 0$

$x \in I$, $g''(x) \geq 0$, alors g' est
oissante sur I.

$x \in I$, $0 \leq x \Leftrightarrow g'(0) \leq g'(x)$

$\Leftrightarrow -1 \leq g'(x)$

r g' est croissante, alors $|g'(x)| \leq 1 \leq 3e^{-2}$

$\Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$.

(0,5pt)

éduisons $\forall x \in I$,

$g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$.

n utilisant l'inégalité des
accroissements finis sur I, on a :

$x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2} \Leftrightarrow$

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$:

$\in [0, +\infty[$; $f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha} + 1 - \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha} + 1 = \alpha$

$\Rightarrow g(\alpha) = \alpha$

D'où $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha| \Leftrightarrow$

(0,5pt)

$|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$ car $g(\alpha) = \alpha$.

<u>Solution 4</u> : (3pts)

1- Trouvons le nombre de façons possibles de prelever 5 oeufs.

$Card\,\Omega = C_{10}^{5} = 252$. (1pt)

2- Calculons les probabilités :

$Card\,A = C_4^1 \times C_6^4 = 60$

$P(A) = \frac{60}{252} \Rightarrow \underline{P(A) = 0,23}$ / (1pt)

$Card\,B = C_4^3 \times C_6^2 = 60$

$P(B) = \frac{60}{252} \Rightarrow \underline{P(B) = 0,23}$ / (1pt)