BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : E	**Durée : 4H00**	**Coefficient : 05**	**Feuille : 1/3**	**Session :** Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

EXERCICE N° 1

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n}-1$ est divisible par 8
   b) En déduire le reste de la division euclidienne de 2019^{1971} par 8

2) Résoudre dans N^2 le système suivant : $\begin{cases} PPCM(x,y)=168 \\ xy=1008 \end{cases}$

3) Soit $N=x43y$ un entier naturel. Déterminer tout les nombres N divisibles è la fois par 2 et 9

4) On considère dans Z^2 l'équation (E): $17x+11y=1$
   a) Montrer que l'équation (E) admet des solutions dans Z^2
   b) Déterminer une solution particulière$(x_0;y_0)$ de (E), puis résoudre l'équation (E)
   c) Déterminer l'ensemble des inverses modulo 17 de 11
   d) En déduire le plus petit inverse positif modulo 17 de 11

5) Résoudre dans $Z/8Z$ l'équation $x^2+3x+5=0$

EXERCICE N° 2

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Soit g l'endomorphisme de R^2 défini par : $\begin{cases} g(\vec{\imath})=-3\vec{\imath}-2\vec{\jmath} \\ g(\vec{\jmath})=4\vec{\imath}+3\vec{\jmath} \end{cases}$

1) Donner la matrice M_g de g $dans$ la $base$ $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2) Calculer $M_g \times M_g$, puis en déduire la nature de g.
3) Déterminer l'expression analytique de g
4) Donner les éléments caractéristiques de g

Partie B

Dans le plan orienté, on considère le triangle A'CA rectangle en A' tels que A'C=2cm et $\overline{(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit D le point tel que le quadrilatère AA'CD soit un rectangle, B le symétrique de C par rapport à (AA') et E le symétrique de A par rapport à (DC) . On désigne par O le centre du triangle ABC, B' et C' les milieux respectifs des segments [AC] et [AB], I le symétrique de O par rapport à C'.

1) Faire la figure (On prendra [A'C] horizontalement)
2) Soit f un antidéplacement tels que $f(A)=C$ et $f(C)=E$. Donner la nature exacte et la forme réduite de f
3) Soit S la similitude plane directe telles que $S(I)=O$ et $S(C)=B$
   a) Déterminer le rapport k_1 et $l'angle$ θ de S.

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : E	**Durée : 4H00**	**Coefficient : 05**	**Feuille : 2/3**	**Session :** Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

b) Construire le centre Ω de S

c) Montrer que $S((AI)) = (OA)$ puis déterminer $S((AC))$

d) En déduire que $S(A) = A'$

4) Soit R la rotation de centre O telle que R(A)=C et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Montrer que $S = hoR$

5) Soit $\bar{S}$ la similitude plane indirecte telle que $\bar{S}(I) = O$ et $\bar{S}(C) = B$. On note J le centre de $\bar{S}$

a) Déterminer le rapport k_2 de $\bar{S}$

b) Déterminer $\bar{S}oS^{-1}(O)$ et $\bar{S}oS^{-1}(B)$ puis caractériser $\bar{S}oS^{-1}$

c) Montrer que $\bar{S}(B) = A'$ et que $J = bary\{(C;1);(A';-4)\}$

6) Soit (P) la parabole de directrice (AA') passant par E et dont la tangente correspondante est la droite (OE).

a) Montrer que le point C est le foyer de (P)

b) Préciser l'axe focal et le paramètre de la parabole (P)

c) Placer le L de (P) puis tracer (P).

EXERCICE N° 3

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{x+1}} ; \text{ si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Montrer que f est continue à droite en -1

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{f(x)}{x+1} = 0$. Interpréter le résultat.

3) Vérifier que pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} f(x)$, puis dresser le tableau de f

4) Montrer que $f^{-1}(x)$ existe puis dresser le tableau de variation de f^{-1}

5) Calculer $f(0)$ et $(f^{-1})'(e^{-1})$

6) Expliciter $f^{-1}(x)$

7) Tracer la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Série : E	Durée : 4H00	Coefficient : 05	Feuille : 3/3	Session : Avril 2025
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

8) Soit $\alpha > 0$, *on note* $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ *et* $x = \alpha$.

a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$

b) Montrer que $\alpha - \ln(\alpha + 1) \leq A(\alpha) \leq \alpha - \ln(\alpha + 1) + \frac{\alpha}{2(\alpha++1)}$

c) En déduire $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha}$.

EXERCICE N° 4 : (3pts)

Un jeu consiste à choisir un joueur, qui à son tour tire simultanément deux boules d'un sac contenant trois boules blanches et deux boules noires indiscernables au toucher. Le joueur gagne s'il obtient des boules de couleurs différentes. On admet que 20% des joueurs sont des tricheurs et la probabilité qu'un tricheur gagne est 4/5

On note T l'événement << le joueur est un tricheur >> et

G l'événement << le joueur gagne >>.

1) Montrer que $P_{\bar{T}}(G) = \frac{3}{5}$. (0,50pt)

2) Représenter l'arbre de probabilité traduisant les données de l'énoncé. (0,5pt)

3) Calculer $P(T \cap G)$ *et* $P(\bar{T} \cap G)$ puis en déduire $P(G)$. (0,50pt+0,50pt+0,5pt)

4) Le joueur à gagner, quelle est la probabilité soit un tricheur ? (0,5pt)

Corrigé Série E (BAC Blanc 2025)

EXERCICE N°1

1.a) Démontrons que pour tout entier naturel non nul n, $3^{2n}-1$ est divisible par 8

$3^2=9$

$3^2=1+8$

$3^2\equiv 1[8]$

$(3^2)^n\equiv(1)^n[8]$, $n\in\mathbb{N}^*$ 0,25

$3^{2n}\equiv 1[8] \Rightarrow 3^{2n}-1\equiv 0[8]$

Donc $3^{2n}-1$ est divisible par 8, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Déduisons le reste de la division euclidienne de 2019^{1971} par 8.

$2019=3+252\times 8$

$2019\equiv 3[8]$

$1971=1+2\times 985$. Posons $n=985$, on a

$1971=1+2n$

Ainsi $2019^{1971}\equiv 3^{1971}[8]$

$2019^{1971}\equiv 3^{1+2n}[8]$

$2019^{1971}\equiv 3\times 3^{2n}[8]$

$\Rightarrow 2019^{1971}\equiv 3[8]$ car $3^{2n}\equiv 1[8]$

Donc $\boxed{r=3}$ 0,25

2) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ le système :

$$\begin{cases} PPCM(x;y)=168 \\ xy=1008 \end{cases}$$

$PGCD(x;y)\times PPCM(x;y)=xy \Rightarrow$

$$PGCD(x;y)=\frac{xy}{PPCM(x;y)}$$

$$PGCD(x;y)=\frac{1008}{168}$$

$PGCD(x;y)=6$

Posons $x=6x'$ et $y=6y'$ ①

$$\begin{cases} PGCD(x;y)=6 \\ xy=1008 \end{cases}$$

$$\begin{cases} PGCD(6x';6y')=6 \\ (6x')(6y')=1008 \end{cases}$$

$$\begin{cases} PGCD(x';y')=1 \\ x'y'=28 \end{cases}$$ 0,5

x'	1	28	4	7	2	14
y'	28	1	7	4	14	2
x	6	168	24	42		
y	168	6	42	24		

$\boxed{S=\{(6;168),(168;6),(24;42),(42;24)\}}$

3) Déterminons tout les nombres N divisible à la fois par 2 et 9

$N=\overline{x43y}$

N est divisible par 2 si $y\in\{0,2,4,6,8\}$

N est divisible par 9 $\Leftrightarrow x+4+3+y\equiv 0[9] \Rightarrow$

$x+y+7\equiv 0[9]$

$x+y\equiv -7[9]$ or $-7=2-9 \Rightarrow -7\equiv 2[9]$

Donc $x+y\equiv 2[9]$

Pour $y=0$ 0,5

$x+0\equiv 2[9]$

$x\equiv 2[9] \Rightarrow x=2$, $\boxed{N=2430}$

Pour $y=2$

$x+2\equiv 2[9] \Rightarrow x=0$, $\boxed{N=0432}$

Pour $y=4$

$x+4\equiv 2[9]$

$x\equiv -2[9]$, or $-2=7-9 \Rightarrow -2\equiv 7[9]$

$x\equiv 7[9] \Rightarrow x=7$; $\boxed{N=7434}$

Pour $y=8$

$x+8\equiv 2[9]$

$x \equiv -6[9]$ or $-6 = 3-9 \Rightarrow -6 \equiv 3[9]$

$x \equiv 3[9] \Rightarrow x = 3$, $\boxed{N = 3438}$

4) $(E): 17x + 11y = 1$

a) Montrons que l'équation (E) admet des solution dans $\mathbb{Z}^2$

a	17	11	6	5
b	11	6	5	1
r	6	5	1	0
q	1	1	1	5

0,5

Comme PGCD(17; 11) = 1, donc l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

b) Déterminons une solution particulière $(x_0; y_0)$

$a = b \times q + r \Rightarrow r = a - bq$

$1 = 6 - 5$

$5 = 11 - 6$

$1 = 6 - (11 - 6)$

$1 = 6 - 11 + 6 \Rightarrow 1 = 11(-1) + 6(2)$

$6 = 17 - 11$

$1 = 11(-1) + 2(17 - 11)$

$1 = 11(-1) + 17(2) + 11(-2)$

$\Rightarrow 17(2) + 11(-3) = 1$

D'où $\boxed{\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -3 \end{cases}}$ 0,25

Résolvons l'équation (E)

$\begin{cases} 17x + 11y = 1 \\ 17(2) + 11(-3) = 1 \end{cases}$ $\ominus$

$17(x-2) + 11(y+3) = 0$

$17(x-2) = 11(-y-3)$

or $17 \wedge 11 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss $11 \mid x-2$ et $17 \mid -y-3$

$\begin{cases} x - 2 = 11k \\ -y - 3 = 17k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 11k \\ y = -3 - 17k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{S = \{(2 + 11k ; -3 - 17k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$ 0,25

c) Déterminons l'ensemble des inverses modulo 17 de 11

Soit S_k l'ensemble des inverses modulo 17 de 11.

$17(2) + 11(-3) = 1$

$11(-3) = 1 - 17(2)$

$11(-3) \equiv 1[17] \Rightarrow \boxed{S_k = -3 + 17k,\ k \in \mathbb{Z}}$ 0,5

d) Déduisons le plus petit inverse positif modulo 17 de 11

Pour $k = 1$, $S_1 = -3 + 17$

$\Rightarrow \boxed{S_1 = 14}$ 0,5

5) Résolvons dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \dot{3}x + \dot{5} = \dot{0}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$\dot{3}x$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{7}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$
$x^2 + \dot{3}x + \dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{7}$	$\dot{7}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$	$\dot{3}$

$\boxed{S = \emptyset}$ 0,5

EXERCICE N°2

Partie A

$\begin{cases} g(\vec{i}) = -3\vec{i} - 2\vec{j} \\ g(\vec{j}) = 4\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases}$

1) Donnons la matrice M_g de g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\boxed{M_g = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$ 0,25

2) Calculons $M_g \times M_g$

$$M_g \times M_g = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$ 0,25

$$M_g \times M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{M_g \times M_g = I}$$

Déduisons la nature de g

Comme $M_g \times M_g = I$, donc g est une symétrie vectorielle. 0,25

3) Déterminons l'expression analytique de g

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}' = g(\vec{u})$

$\vec{u}' = M_g \times \vec{u}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{g : \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}}$$ 0,25

4) Donnons les éléments caractéristiques de g

* Base : $\mathrm{Inv}(g) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / g(\vec{u}) = \vec{u}\}$

Posons $x' = x$ et $y' = y$. on a:

$$\begin{cases} x = -3x + 4y \\ y = -2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0$$ 0,25

La base de g est une droite vectorielle d'équation $x - y = 0$ engendrée par $\vec{e}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Direction : $E_{-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / g(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

Posons $x' = -x$ et $y' = -y$. on a:

$$\begin{cases} -x = -3x + 4y \\ -y = -2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

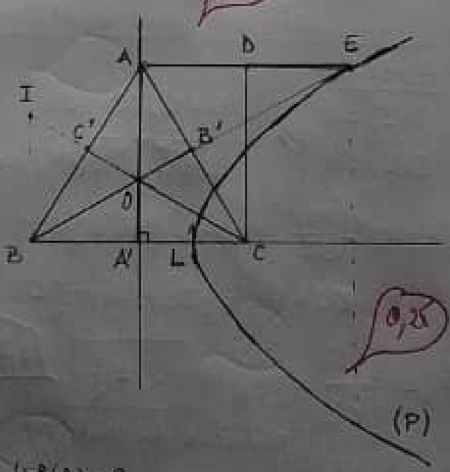
0,25 $$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$$

La direction de g est une droite vectorielle d'équation $x - 2y = 0$, engendrée par $\vec{e}_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Partie B

1) Figure.

0,50



2) $\begin{cases} f(A) = C \\ f(C) = E \end{cases}$

Donnons la nature exacte de f

Les segments [AC] et [CE] ne partagent pas la même médiatrice donc f est une symétrie glissante. 0,25

Donnons la forme réduite de f

$f = S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$

* Axe (Δ)

(Δ) passe par le milieu de [AC] et celui de [CE] donc $(\Delta) = (B'C')$

* Vecteur $\vec{u}$

$f \circ f = t_{2\vec{u}}$

$t_{2\vec{u}}(A) = f \circ f(A)$

$t_{2\vec{u}}(A) = f(C)$

$t_{2\vec{u}}(A) = E \Rightarrow 2\vec{u} = \vec{AE}$

$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AE}$

$\vec{u} = \vec{AD}$

D'où $\boxed{f = S_{(B'C')} \circ t_{\vec{AD}}}$ 0,5

3) $\begin{cases} S(I) = O \\ S(C) = B \end{cases}$

a) Déterminons le rapport k_1 et l'angle θ de S

$\begin{cases} S(I) = O \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OB = k_1 IC & (1) \\ \theta \equiv (\vec{IC}; \vec{OB}) [2\pi] & (2) \end{cases}$

(1) : $k_1 = \frac{OB}{IC}$ or $OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}CC'$

et $IC = IC' + C'C = \frac{1}{3}C'C + C'C = \frac{4}{3}C'C$

$k_1 = \frac{\frac{2}{3}C'C}{\frac{4}{3}C'C} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{k_1 = \frac{1}{2}}$ 0,25

(Théorème du centre de gravité)

2e méthode

Considérons le triangle BIC rectangle en B. O milieu de [IC], on a :

$OB = \frac{1}{2}IC \Rightarrow \frac{OB}{IC} = \frac{1}{2}$ (Théorème de la médiane) 0,25

(2) $\theta \equiv (\vec{IC}; \vec{OB}) [2\pi]$

$\theta \equiv (\vec{OC}, \vec{OB}) [2\pi] \Rightarrow \boxed{\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]}$

$\boxed{k_1 = \frac{1}{2} ; \theta = -\frac{2\pi}{3}}$

$S = Sim(\Omega ; \frac{1}{2} ; -\frac{2\pi}{3})$

b) Construisons le centre Ω de S

$\begin{cases} S(\Omega) = \Omega \\ S(C) = B \end{cases} \Rightarrow (\vec{\Omega C}; \vec{\Omega B}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$(\vec{OC}; \vec{OB}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{\Omega C}; \vec{\Omega B}) \equiv (\vec{OC}; \vec{OB}) [2\pi]$, les points Ω, O, B et C sont cocycliques. Ω appartient au cercle $(\mathscr{C}_1)$ circonscrit au triangle BOC.

$\begin{cases} S(\Omega) = \Omega \\ S(I) = O \end{cases} \Rightarrow (\vec{\Omega I}; \vec{\Omega O}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$(\vec{\Omega O}; \vec{\Omega I}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Le triangle AIO est équilatéral, on a :

$(\vec{AI}; \vec{AO}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$(\vec{\Omega O}; \vec{\Omega I}) + (\vec{AI}; \vec{AO}) \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{\Omega O}; \vec{\Omega I}) \equiv (\vec{AO}; \vec{AI}) + \pi [2\pi]$

Les points Ω, O, A et I sont cocycliques. Ω appartient au cercle $(\mathscr{C}_2)$ circonscrit au triangle OAI.

$(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2) = \{O ; \Omega\}$ 0,5

c) Montrons que $S((AI)) = (OA)$

$S((AI)) = (S(A)S(I))$

$S((AI)) = (A_1O)$

(A_1O) passe par O tel que $(\vec{AI}, \vec{A_1O}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$\Rightarrow (A_1O) = (OA) \Rightarrow \boxed{S((AI)) = (OA)}$ 0,25

Déterminons $S((AC))$

$S((AC)) = (S(A)S(C)) = (A_1B)$

(A_1B) passe par B tel que $(\vec{AC}, \vec{A_1B}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$\Rightarrow (A_1B) = (CB)$; $\boxed{S((AC)) = (CB)}$ 0,25

d) Déduisons que $S(A)=A'$

$\{A\}=(AI)\cap(AC)$

$S(A)=S((AI))\cap S((AC))$ 0,25

$S(A)=(OA)\cap(CB) \Rightarrow \boxed{S(A)=A'}$

4) $R(O)=O$; $R(A)=C$, $h_{(B;\frac{1}{2})}$

Montrons que $S=h\circ R$

$\begin{cases} R(O)=O \\ R(A)=C \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})[2\pi]$

$\alpha \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$R_{(O;-\frac{2\pi}{3})}$

$S(I)=h\circ R(I)$

$S(I)=h(I_1)$

$h(I_1)=I_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BI_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI_1}=\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow I_2=O$

$S(I)=O$ (vrai)

$S(C)=h\circ R(C)=h(B)=B$

$S(C)=B$ (vrai)

Donc $S=h\circ R$

$S=h_{(B;\frac{1}{2})}\circ R_{(O;-\frac{2\pi}{3})}$

$S=Sim(\Omega;\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3})$ 0,5

5) $\overline{S}(I)=O$, $\overline{S}(C)=B$ et $\overline{S}(J)=J$

a) Déterminons le rapport k_2 de $\overline{S}$

$\begin{cases} \overline{S}(I)=O \\ \overline{S}(C)=B \end{cases} \Rightarrow OB=k_2 IC$

$k_2=\frac{OB}{IC} \Rightarrow \boxed{k_2=\frac{1}{2}}$ 0,25

b) Déterminons $\overline{S}\circ S^{-1}(O)$ et $\overline{S}\circ S^{-1}(B)$

$S(I)=O \Rightarrow S^{-1}(O)=I$

$\overline{S}\circ S^{-1}(O)=\overline{S}(I) \Rightarrow \boxed{\overline{S}\circ S^{-1}(O)=O}$ 0,25

$S(C)=B \Rightarrow S^{-1}(B)=C$

$\overline{S}\circ S^{-1}(B)=\overline{S}(C) \Rightarrow \boxed{\overline{S}\circ S^{-1}(B)=B}$ 0,25

Caractérisons $\overline{S}\circ S^{-1}$

$\overline{S}\circ S^{-1}$ est la composée d'une similitude plane indirecte $\overline{S}$ de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une similitude plane directe S^{-1} de rapport $(\frac{1}{2})^{-1}=2$. Donc $\overline{S}\circ S^{-1}$ est une similitude plane indirecte de rapport $k=\frac{1}{2}\times 2=1$. Comme $k=1$, donc $\overline{S}\circ S^{-1}$ est une symétrie axiale d'axe $(\mathcal{D})$ à déterminer.

$\overline{S}\circ S^{-1}=S_{\mathcal{D}}$

$S_{\mathcal{D}}(O)=\overline{S}\circ S^{-1}(O)=O \Rightarrow O\in(\mathcal{D})$

$S_{\mathcal{D}}(B)=\overline{S}\circ S^{-1}(B)=B \Rightarrow B\in(\mathcal{D})$

$\begin{cases} O\in(\mathcal{D}) \\ B\in(\mathcal{D}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D})=(OB)$

$\boxed{\overline{S}\circ S^{-1}=S_{(OB)}}$ 0,25

c) Montrons que $\overline{S}(B)=A'$

$\begin{cases} \overline{S}(C)=B \\ \overline{S}(B)=A' \end{cases} \Rightarrow BA'=k_2 CB$ 0,25

$k_2=\frac{BA'}{CB}=\frac{BA'}{2BA'} \Rightarrow k_2=\frac{1}{2}$ (vrai)

car A' milieu de $[BC]$.

Donc $\boxed{\overline{S}(B)=A'}$

Montrons que $J=bary\{(C;1);(A';-4)\}$

$\overline{S}=h_{(J;\frac{1}{2})}\circ S_{(\Delta)}=S_{(\Delta)}\circ h_{(J;\frac{1}{2})}$ avec $J\in(\Delta)$

$\bar{S} \circ \bar{S} = h_{(J, 1/2)} \circ \ldots = h_{(J, 1/2)}$

$\bar{S} \circ \bar{S} = h_{(J, 1/2)} \circ h_{(J, 1/2)} = h_{(J, 1/4)}$

$\bar{S} \circ \bar{S} = h_{(J, 1/4)}$

$h_{(J, 1/4)} = \bar{S} \circ \bar{S}$

$h_{(J, 1/4)}(C) = \bar{S} \circ \bar{S}(C)$

$h_{(J, 1/4)}(C) = \bar{S}(A)$

$h_{(J, 1/4)}(C) = A'$

$\vec{JA'} = \frac{1}{4}\vec{JC}$ 0,5

$4\vec{JA'} = \vec{JC} \Rightarrow \vec{JC} - 4\vec{JA'} = \vec{0}$

D'où $\boxed{J = \text{bary}\{(C; 1), (A'; -4)\}}$

6) (P) parabole de directrice (AA') passant E et dont la tangente correspondante est la droite (DE).

a) Montrons que le point C est le foyer de (P) 0,25

A est le projeté orthogonal de E sur la droite (AA'). La droite (DE) est la médiatrice du segment [AC], on a : EC = EA. Par conséquent C est le foyer de (P).

b) Axe focal : (CA') 0,25

Paramètre : p = CA' 0,25

c) Voir figure

EXERCICE N°3

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} ; \text{ si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

1) Montrons que f est continue à droite en -1

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} e^{-\frac{1}{x+1}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$, donc f est continue à droite en -1 0,5

2) Montrons que $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{e^{-\frac{1}{x+1}}}{x+1} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Posons $t = \frac{1}{x+1}$

Si $x \to -1^+$, $t \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = 0}$ 0,25

Interprétation

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - 0}{x+1}$ 0,25

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = 0$, la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -1$, la courbe (C) admet une demi-tangente horizontale en $x = -1$

3) Vérifions que pour tout $x > -1$,

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} f(x)$

$f'(x) = \left(\frac{-1}{x+1}\right)' e^{\frac{-1}{x+1}} \Rightarrow$

$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot f(x)}$ 0,25

Dressons le tableau de variation de f

Pour tout $x > -1$, $f'(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1/x+1} = e^{\frac{-1}{+\infty}} = e^{0} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ 0,5

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

4) Montrons que $f^{-1}(x)$ existe 0,25

D'après le tableau de variation, f est continue et strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$, donc f est bijective. Par conséquent $f^{-1}(x)$ existe.

Tableau de variation de f^{-1}

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$(f^{-1})'(x)$	$+$
$f^{-1}(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

0,25

5) Calculons $f(0)$ et $(f^{-1})'(e^{-1})$ 0,25

$f(0) = e^{\frac{-1}{0+1}} \Rightarrow \boxed{f(0) = e^{-1}}$

$(f^{-1})'(e^{-1}) = \frac{1}{f'[f^{-1}(e^{-1})]}$

or $f(0) = e^{-1} \Rightarrow f^{-1}(e^{-1}) = 0$

$(f^{-1})'(e^{-1}) = \frac{1}{f'(0)}$

$f'(0) = \frac{1}{(0+1)^2} \cdot f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(e^{-1}) = e}$ 0,5

6) Explicitons $f^{-1}(x)$

$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$f(x) = e^{\frac{-1}{x+1}}$

$y = e^{\frac{-1}{x+1}}$

$\ln y = \ln e^{\frac{-1}{x+1}}$

$\ln y = \frac{-1}{x+1}$

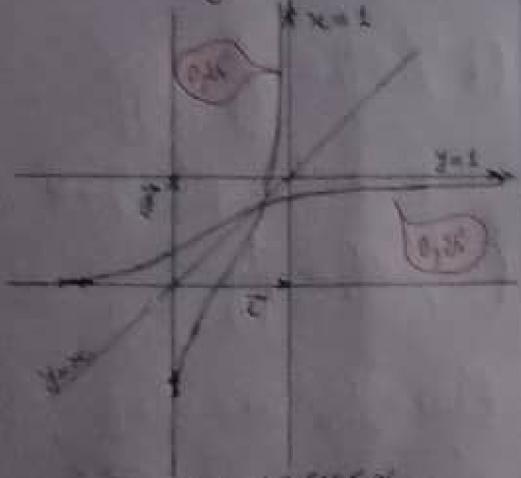
$x+1 = \frac{-1}{\ln y}$

$x = \frac{-1}{\ln y} - 1 = \frac{-1-\ln y}{\ln y}$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{-1-\ln x}{\ln x}}$ 0,25

7) Traçons $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.



8) $\alpha > 0$, $\mathcal{A}(\alpha) : \begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

a) Montrons que pour tout réel $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$

$h(u) = 1 - u - e^{-u}$

$h(0) = 0$; $\lim\limits_{u \to +\infty} h(u) = -\infty$

$h'(u) = -1 + e^{-u}$

Supposons que $h'(u) \geq 0$

$-1 + e^{-u} \geq 0$

$e^{-u} \geq 1$

$-u \geq 0 \Rightarrow u \leq 0$

u	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$h'(u)$	$-$
$h(u)$	$0 \searrow -\infty$

Pour tout $u \geq 0$, $h(u) \leq 0$

$1 - u - e^{-u} \leq 0 \Rightarrow 1 - u \leq e^{-u}$ (1)

$g(u) = e^{-u} - 1 + u - \frac{u^2}{2}$

$g(0) = 0$; $\lim\limits_{u \to +\infty} g(u) = -\infty$

$g'(u) = -e^{-u} + 1 - u$

$g'(u) = h(u)$

Pour tout $u \geq 0$, $g'(u) \leq 0$

u	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(u)$	$-$
$g(u)$	$0 \searrow -\infty$

Pour tout $u \geq 0$, $g(u) \leq 0$

$e^{-u} - 1 + u - \frac{u^2}{2} \leq 0 \Rightarrow e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}}$ 0,75

b) Montrons que $\alpha - \ln(\alpha+1) \leq \mathcal{A}(\alpha) \leq \alpha - \ln(\alpha+1) + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

$1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$

Posons $u = \frac{1}{x+1}$

$1 - \frac{1}{x+1} \leq e^{-\frac{1}{x+1}} \leq 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}$

$\int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \leq \int_0^\alpha f(x)\,dx \leq \int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right) dx$

$\Rightarrow \boxed{\alpha - \ln(\alpha+1) \leq \mathcal{A}(\alpha) \leq \alpha - \ln(\alpha+1) + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}$

c) Déduisons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha}$

5

$$1-\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} \leq \frac{A(\alpha)}{\alpha} \leq 1-\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha}+\frac{1}{2(\alpha+1)}$$

$$1 \leq \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha} \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha} = 1}$$ 0,25

EXERCICE N°4

T « le joueur est un tricheur »

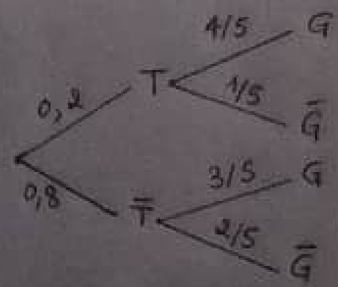
G « le joueur gagne »

1) Montrons que $P_{\overline{T}}(G) = \frac{3}{5}$

$$P_{\overline{T}}(G) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{2\times 3}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\overline{T}}(G) = \frac{3}{5}}$$ 0,5

2) Arbre de probabilité



0,5

3) Calculons $P(T\cap G)$ et $P(\overline{T}\cap G)$

$$P(T\cap G) = 0,2 \times \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T\cap G) = 0,16}$$ 0,5

$$P(\overline{T}\cap G) = 0,8 \times \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\overline{T}\cap G) = 0,48}$$ 0,5

Déduisons P(G)

$$P(G) = P(T\cap G) + P(\overline{T}\cap G)$$

$$P(G) = 0,16 + 0,48$$

$$\Rightarrow \boxed{P(G) = 0,64}$$ 0,5

4) Calculons $P_G(T)$

$$P_G(T) = \frac{P(T\cap G)}{P(G)} = \frac{0,16}{0,64}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_G(T) = 0,25}$$ 0,5