BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC DEPARTEMENTAL				
SERIE : F-H4-H5	DUREE : **04HEURES**	COEF : 4	FEUILLE : 1/2	SESSION DU : **18 AVRIL 2023**
EPREUVE : **MATHEMATIQUES GENERALES**				

EXERCICE1 : **(5pts)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : $2cm$.

1-Soit le nombre complexe $Z_0 = 1+i$.

a-Montrer que Z_0 est solution de l'équation (E) definie par :

$$Z^3-(7+i)Z^2+2(8+3i)Z-10(1+i)=0 \textbf{(0,5pt)}$$

b-Déterminer les réels a, b et c tels que (E) : $(Z-Z_0)(aZ^2+bZ+C)=0$ **(1pt)**

c- Résoudre dans C l'équation(E). **(0,75pt)**

2-On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives $1+i$; $3+i$ et $3-i$.

a-Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$. **(0,75pt)**

b-En déduire la nature exacte du triangle ABC.**(0,5pt)**

c-Placer les points A, B et C dans un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ et au fur et à mesure. **(0.5pt)**

3-Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC..Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.(C)**(1pt)**

EXERCICE2 **(5pts)**

On considère l'endomorphisme f de IR^3 défini dans la base $\beta=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par :

$$\begin{cases} x' = x+y+z \\ y' = y \\ z' = x+z \end{cases}$$

1-a-Définir un endomorphisme.f **(0,25pt)**

b-Déterminer $f(\vec{e}_1)$; $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$**(0,25pt) + (0,25pt)+(0,25pt)**

c-Donner la matrice de f dans la base β. **(0,25pt)**

2-a-Déterminer le noyaude f, puis en déduire sa base $\vec{u}_1$**(0,5pt) +(0,5pt)**

b-Déterminer l'image de , puis en déduire sa base $(\vec{u}_2;\vec{u}_3)$. **(0,5pt)+(0,5pt)**

c-Montrer que$(\vec{u}_1;\ \vec{u}_2;\vec{u}_3)$. est une famille libre**(0,25pt)**

d- Montrer que$(\vec{u}_1;\ \vec{u}_2;\vec{u}_3)$. est une famille génératrice**(0,25pt)**

e-En déduire que $(\vec{u}_1;\ \vec{u}_2;\vec{u}_3)$.est une base de IR^3 **(0,25pt)**

3-a-Déterminer $f(\vec{u}_1)$; $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$**(0,25pt) + (0,25pt)+(0,25pt)**

b-Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$.**(0,25pt)**

EXERCICE3 (7Pts)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0{:}\,2[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1-a-Calculer $\lim_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim_{x\to2^-}f(x)$.**(0.5pt)+(0.5pt)**

b-Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $]0;2[$, puis montrer que pour tout $x\epsilon]0;2[$ on a :$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}$

. **(0.25pt) + (0.75pt)**

c-Dresser le tableau de variations de la fonction f. (1,5pt)

d-Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point A$(1;0)$.**(0,5pt)**

2- On pose : $\rho(x)=f(x)-x$ pour tout x de l'intervalle $]0,2[$.

a-Montrer que $\rho\left(\frac{3}{2}\right) < 0$et $\rho\left(\frac{7}{4}\right) > 0(On\ prendra\ \ln 3 = 1{,}1\ et\ \ \ln 7 = 1{,}94)$. **(0,5pt)**

b- Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\propto$ telle que : $\frac{3}{2} < \propto < \frac{7}{4}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.**(0,5pt)+(0,5pt)**

c-Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera. **(0,5pt)**

3-Construire dans le même repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe (C) et la courbe (τ) représentative de la fonction f^{-1}.**(1Pt)**

<u>EXERCICE 4</u> (3pts)

Dans une classe 60% des eleves reconnaissent aimer la philosophie ; 40% aimer les mathématiques ; 15% aimer la philosophie et mathématiques.

On interroge au hasard un élève de cette classe.

Quelle est la probabilité pour que cet élève :

1- aime la philosophie mais pas les mathématiques **(1pt)**
2- aime les mathématiques mais pas la philosophie **(1pt)**
3- n'aime ni la philosophie, ni les mathématiques. **(1pt)**

F-31

Direction Départementale de l'Enseignement Technique de Pointe-Noire

Baccalauréat Blanc Départemental			
Série : TF et TH	Durée : 4 heures	Coeff. :	Session : Avril 2022
Epreuve de : Mathématiques			

Exercice 1 : (5 pts)

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point M(z) associe le point M'(z') défini par : $Z' = (1+i)Z - 1$.

1- Montrer que f est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques. (3 pts)

2- Soit la droite $(D): x - y + 2 = 0$ et (C) le cercle de centre $I(1-i)$ et de rayon 2. Déterminer (D') et (C') les images respectives de (D) et (C) par la similitude f. (2 pts)

Exercice 2 : (5 pts)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{avec } \vec{e}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{k} \,;\, \vec{e}_2 = \vec{\jmath} - \vec{k} \text{ et } \vec{e}_3 = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$$

1- Déterminer $f(\vec{\imath})$; $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$ (1 pt)

2- Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (0,5 pt)

3- Vérifier si f est bijectif. (1 pt)

4- Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. (1 pt)

5- Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f et en donner une base B. (1,5 pt)

Exercice 3 : (7 pts)

Soit la fonction f de la variable x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)$.

1- a- Etudier les variations de f. (1 pt)

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$. Que peut-on déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe (Unité : 2 cm) (1 pt)

c- Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,0[$. (0,5 pt)

2- Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x} ln(1+e^x)$.

a- Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

b- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = e^{-x}$.f(x). (0,5 pt) c- Montrer que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = 1$. (0,25 pt)

d- Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent. (1,5 pt)

3- a- Montrer que : $\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. (0,5 pt)

b- A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx$. Justifier l'existence de $I(\lambda)$. Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties. (0,75 pt)

c- Calculer $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} I(\lambda)$. (0,25 pt)

Exercice 4 (3 pts)

Dans une classe de 35 élèves, 20 élèves pratiquent le Basket-Ball, 15 élèves pratiquent le Football. Sachant qu'il y'a 2 élèves qui ne pratiquent aucun de ces deux sports, déterminer :

1- Le nombre d'élèves qui pratiquent le Basket et le foot à la fois. (1,5 pt)

2- Le nombre d'élèves qui pratiquent exactement un sport. (1,5 pt)

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC			
OPTION: TOUTES	Durée: 4 Heures	Feuille : 1/2	SESSION : du 20 Avril 2021
SPECIALITE: **F1-F2-F3 -F4 - H4-H5**		EPREUVE: **MATHEMATIQUES**	

Exercice 1 (5pts)

Soit les équations $(E_1): Z^6 = 1$ et $(E_2): Z^6 = 8i$

1-Résoudre dans C , l' équation (E_1)(On donnera les solutions sous formes algébrique et exponentielle). **(1,5pt)**

2-a)Vérifier que $(1-i)^6 = 8i$ **(0,5pt)**

b)Montrer que Z est une solution de l'équation (E_2) équivaut à $\frac{Z}{1-i}$ est une solution de l'équation (E_1). **(1pt)**

c) En déduire les solutions de l'équation (E_2)(On donnera les solutions sous formes algébrique et exponentielle).**(1pt)**

d)En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **(0,5pt)**

e)Placer toutes les solutions de l'équation (E_2) dans le repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$ **(0,5pt)**

Exercice 2 (5pts)

Dans le plan vectoriel E muni de sa base canonique $(\vec{i};\vec{j})$.

On considère les sous-espaces vectoriels $H_1:\{\vec{u}(x;y) \in E / x-2y=0\}$ et $H_2:\{\vec{u}(x;y) \in E / x-y=0\}$.

1-Montrer que les sous-espaces vectoriels H_1 et H_2 sont respectivement engendrées par les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e_2} = \vec{i}+\vec{j}$. **(1pt)**

2-Vérifier que $(\vec{e}_1;\vec{e_2})$ est une base de E . **(0,5pt)**

3-Soit f la projection vectorielle de base H_1 et de direction H_2.

a)Exprimer $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. **(1pt)**

b)Déterminer les vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. **(1pt)**

c)Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{i};\vec{j})$. **(0,5pt)**

4-a)Soit le vecteur $\vec{u'} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$ image du vecteur $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ par f exprimer les coordonnées x' et y' de $\vec{u'}$ en fonction de celles x et y de $\vec{u}$. **(0,5pt)**

b) Vérifier que $fof = f$.**(0,5pt)**

Exercice 3 (7pts)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(o;\vec{i};\vec{j})$ du plan .

1-a) Montrer que f est une fonction d dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que , $f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$. **(0,5pt)**

b) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter ce résultat. **(0,5pt)**

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. **(0,5pt)**

d) Dresser le tableau de variation de f . **(0,5pt)**

e) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$. **(0,5pt)**

f) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f^{-1}(x) = (e^x-1)^2$. **(0,5pt)**

OPTION: TOUTES	Durée: 4 Heures	Feuille : 2/2	SESSION : du 20 Avril 2021
SPECIALITE: F1-F2-F3 -F4 - H4-H5		EPREUVE: MATHEMATIQUES	

2-On considère l'intervalle $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. **(0,5pt)**

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle I une unique solution α vérifiant $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{2}{3}$.
(0,5pt)

3-a) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$; ou $(C_{f^{-1}})$ est la courbe représentative de la fonction f^{-1}
(On précisera les demi - tangentes en o) . **(0,5pt)**

c) Calculer , en fonction de α , l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) ; $(C_{f^{-1}})$et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$. **(0,5pt)**

4- On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **(0,5pt)**

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ **(0,5pt)**

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(0,5pt)**

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$. Que peut-on en déduire ? **(0,5pt)**

Exercice 4 (3pts)

Les résultats du baccalauréat dans un établissement Public Technique donné du Pays sont :

-60 % des candidats sont admis .

-Parmi les candidats admis 80 % ont obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20 .

-Parmi les candidats non admis , 70% ont obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20 .

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat de cet établissement et on désigne par A et M les événements suivants

A « le candidat interrogé est admis au baccalauréat».

M « la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à10 sur 20 ».

1-a)Déterminer $P(A)$, $P\left(M/_A\right)$ et $P\left(M/_{\bar{A}}\right)$. **(0,75pt)**

b)Justifier que $P\left(\bar{M}/_A\right) = \frac{1}{5}$. **(0,5pt)**

2-Construire l'arbre pondéré décrivant cette situation. **(0,25pt)**

3- a) Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis et que sa moyenne soit inférieure à 10 sur 20. **(0,5pt)**

b)Montrer que $P(M) = 0{,}76$. **(0,5pt)**

c)Calculer la probabilité qu'un candidat interrogé soit admis sachant qu'il a obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20. **(0,5pt)**

1/6

CORRIGÉ DU BAC BLANC d'Avril 2021 de Pointe-Noire

Epreuve de MATHS

Séries F_1, F_2, F_3, F_4, H_4 et H_5 :

Exercice 1 :

1/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $Z^6 = 1$, tout en présentant les solutions finales sous formes algébrique et exponentielle :

0,25

On a : $|1| = 1$ et $Arg(1) = 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow Z_k = \left[1 ; \frac{2k\pi}{6}\right]$, avec $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$. 0,25

Sous forme exponentielle : 0,25

$S = \{e^{i0\pi} ; e^{i\pi/3} ; e^{i\frac{2\pi}{3}} ; e^{i\pi} ; e^{i4\pi/3} ; e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$

Sous forme algébrique : 0,25

$S = \{1 ; \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -1 ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$

2-a) Vérifions que $(1-i)^6 = 8i$

$\Rightarrow (1-i)^6 = 8i$, Vrai. 0,25

b/ M.Q. Z est une solution de (E_2)

On a $Z^6 = 8i$ et $\frac{Z}{1-i}$ est solution de $(E_1) \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{1-i}\right)^6 = 1 \Rightarrow \frac{Z^6}{(1-i)^6} = 1$

Or, $(1-i)^6 = 8i \Rightarrow \frac{Z^6}{8i} = 1$

1

$\Rightarrow Z^6 = 8i$, donc Z est une solution de $(E_2) \Leftrightarrow \frac{Z}{1-i}$ est une solution de (E_1), Vrai.

c) Déduisons les solutions de (E_1) :

Comme $\frac{Z}{1-i}$ est solution de (E_1) si Z est solution de (E_2).

Or, selon (E_2), on a : $Z^6 = 8i$.

En posant $\frac{Z}{1-i} = t \Rightarrow t^6 = 1$

$\Rightarrow t_0 = Z_0 ; t_1 = Z_1 ; t_2 = Z_2 ; t_3 = Z_3$, $t_4 = Z_4$ et $t_5 = Z_5$. On peut alors désigner par $Z'_0, Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4$ et Z'_5 les solutions de $(E_2) \Rightarrow Z'_i = (1-i) \times t_i$.

Donc, sous forme algébrique les solutions de (E_2) sont :

$Z'_0 = 1 - i$; $Z'_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} i$;

$Z'_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} i$; $Z'_3 = -1 + i$; 0,5

$Z'_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} i$ et $Z'_5 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} i$

Puis sous forme exponentielle, elles sont :

$Z'_0 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$; $Z'_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$; $Z'_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{11\pi}{12}}$;

$Z'_3 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{4}}$; $Z'_4 = \sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$ et 0,5 0,25

$Z'_5 = \sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

d/ Déduisons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

On sait d'une part que $Z'_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

et d'autre part $Z'_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} i$.

On a donc $Z'_1 = Z'_1$

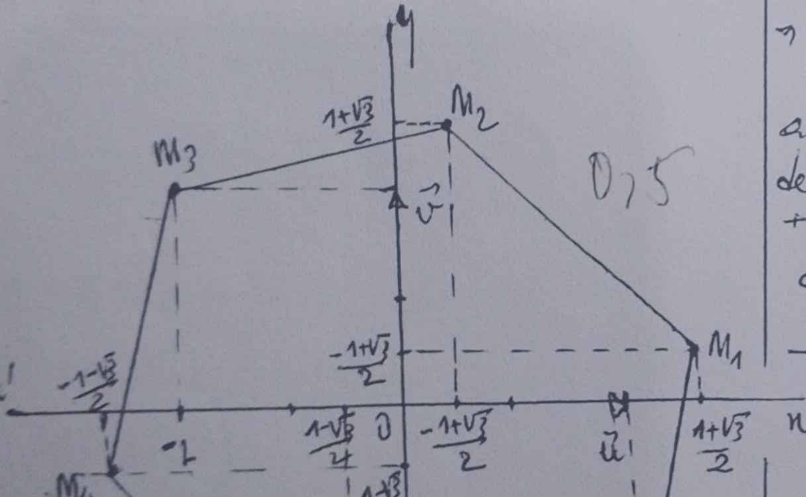
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}}$$ 0,5

e/ Plaçons toutes les solutions de (E_2) dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$:

On peut alors désigner par M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 les points images des solutions de (E_2), d'où on a :

$$M_0\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ M_1\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},\ M_2\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

$$M_3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ M_4\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{ et } M_5\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$



Exercice 3 :

$f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$.

1-a) On sait que $E_f = [0;+\infty[\Rightarrow E_{Cf} = E_f$ et $E_{df} = E_{\sqrt{x}} - \{0\} \Rightarrow E_{df} =]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$. 0,5

Montrons que $f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

On a effectivement $f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

b/ M.Q $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

Posons : $t=\sqrt{x}$ / $x\to0^+ \Rightarrow t\to0^+$

$\Rightarrow \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = \frac{1}{0^+}\times 1 = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$, vraie 0,25

Interprétation : Comme $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \infty$, alors (C) admet 1/2 tgte verticale en $x_0 = 0$ à droite, d'où ce point est un point d'arrêt. 0,25

c) Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow (C)$ 0,5

admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

d/ Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+\infty$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

f) Comme f est définie, continue et monotone croissante sur $[0;+\infty[$, alors f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$. 0,5

Montrons que pour tout $x\geq 0$, $f^{-1}(x) = (e^x-1)^2$:

Posons : $f(x) = y$

(2)

$\Rightarrow \ln(1+\sqrt{x}) = y$

$\Rightarrow 1+\sqrt{x} = e^y$

$\Rightarrow \sqrt{x} = e^y - 1$

$\Rightarrow x = (e^y - 1)^2$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2}$ 0,5

2/ Considérons $I = [\frac{1}{4} ; 1]$

M.Q pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

Comme f est croissante

$\Rightarrow f([\frac{1}{4} ; 1]) = [f(\frac{1}{4}) ; f(1)]$

$= [\ln\frac{3}{2} ; \ln 2]$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{f(1) - f(\frac{1}{4})}{1 - \frac{1}{4}} \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow -0,66 \leq 0,37 \leq 0,66$

Donc $\forall x \in [\frac{1}{4} ; 1]$, on a :

$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. 0,5

M.Q $f(x) = x$ admet une solution unique α vérifiant $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$: 0,5

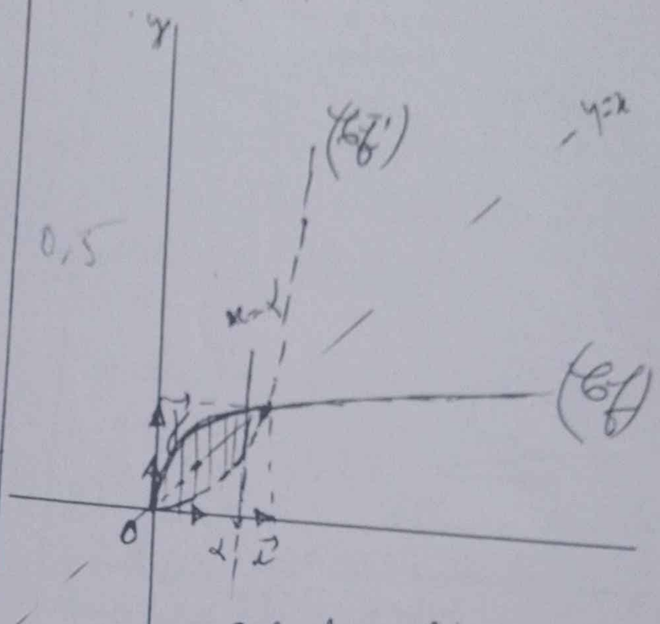
Cette solution α existe $/ \alpha \in]\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}[$

$\Leftrightarrow$ On a $(f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2})(f(\frac{2}{3}) - \frac{2}{3}) < 0$

3-a) Traçons (Cf) et (Cf^{-1}) :

Dans un même repère (Cf) et (Cf^{-1}) seront symétriques par rapport à la 1ère bissectrice qui est la droite $y = x$.

Graphique :



- Calculons l'aire

y'

$A = 2 u.a \times \int_0^{\alpha} [f(x) - x]\, dx$ 0,5

$\Rightarrow \boxed{A = [(1+\sqrt{\alpha})\ln(1+\sqrt{\alpha}) - (1+\sqrt{\alpha}) + 1 + \frac{\alpha}{2}] . u.a}$

4/ Considérons $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

$\Rightarrow U_{n+1} = \ln(1+\sqrt{U_n})$

- Vérifions au 1er rang :

$u_0 = 1 \in [0 ; 1]$, Vrai et $u_1 = \ln 2 \in [\frac{1}{4} ; 1]$ Vrai

- Supposons que $u_k \in [\frac{1}{4} ; 1]$ vrai, avec $\frac{1}{4} \leq u_k \leq 1$, Vrai (hypothèse de récurrence)

- Prouvons au rang $n = k+1$:

$\frac{1}{4} \leq u_{k+1} \leq 1$

or, $\frac{1}{4} \leq u_k \leq 1$, Vrai selon HR.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{u_k} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + \sqrt{u_k} \leq 2$

$\Rightarrow \ln(3/2) \leq \ln(1+\sqrt{u_k}) \leq \ln 2$

$\Rightarrow 0,4 \leq \ln(1+\sqrt{u_k}) \leq 0,69 \leq 1$

$\Rightarrow 0,25 \leq 0,4 \leq u_{k+1} \leq 0,69 \leq 1$ 0,5

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc $\forall n, u_n \in [\frac{1}{4} ; 1]$

b/

$\Rightarrow \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \leq 2/3$

$\Rightarrow \frac{|f(u_n)-f(\alpha)|}{|u_n-\alpha|} \leq 2/3$

$\Rightarrow |f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$.

Or, $\begin{cases} f(u_n)=u_{n+1} \\ \text{et } f(\alpha)-\alpha=0 \Rightarrow f(\alpha)=\alpha, \\ \forall \alpha \in [1/4 ; 1] \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|, \forall n \in \mathbb{N}$.

c/ Déduisons que $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$:

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$ 0,5

- Pour $n=0 \Rightarrow |u_1-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_0-\alpha|$
- Pour $n=1 \Rightarrow |u_2-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2|u_0-\alpha|$
- Pour $n=3 \Rightarrow |u_3-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3|u_0-\alpha|$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Pour tout n $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|$.

d/ Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha| = 0$.

- Comme $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|, \forall n \in \mathbb{N}$.

et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

0,2

On peut donc déduire que la suite (u_n) est convergente, puis que $\alpha \in [1/4 ; 1]$. 0,25

Exercice 4 :

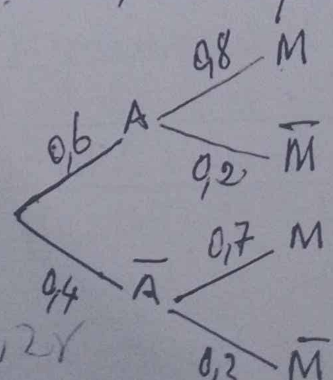
1-a) Déterminons : $p(A)$; $p(M/A)$ et $p(M/\bar{A})$:

$\boxed{p(A) = 0,6}$ 0,2

$\boxed{p(M/A) = 0,8}$ 0,2

$\boxed{p(M/\bar{A}) = 0,7}$ 0,2

2-a) arbre probabiliste :



0,2

b/ Justifions que $p(\bar{M}/A) = \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{5}}$ 0,5

3-a/ $\boxed{p(A/\bar{M}) = 0,2}$ 0,5

b) M.Q $p(M) = 0,76$:

$p(M) = p(M\cap A) + p(M\cap\bar{A})$

$= (0,6\times 0,8) + (0,4\times 0,7)$

$= 0,48 + 0,28$

$\Rightarrow \boxed{p(M) = 0,76}$

0,5

c/ Calculons $p(A/M)$

$p(A/M) = 0,6\times 0,8$

$\Rightarrow \boxed{p(A/M) = 0,48}$.

0,5

Exercice 2 :

Soit $H_1 = \{\vec{u}(x,y) \in E \,/\, x-2y=0\}$ et $H_2 = \{\vec{u}(x,y) \in E \,/\, x-y=0\}$:

1- Montrons que les sous-espaces H_1 et H_2 sont respectivement engendrés par les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e_2} = \vec{i}+\vec{j}$:

- Pour H_1 : 0,5

$\vec{e_1} = (x,y) = (2y,y) = y(2;1) \Rightarrow \vec{e_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$.

- Pour H_2 : 0,5

$\vec{e_2} = (x,y) = (y,y) = y(1;1) \Rightarrow \vec{e_2} = \vec{i}+\vec{j}$

Donc $\vec{e_1} = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{e_2} = \vec{i}+\vec{j}$ sont respectivement engendrés par H_1 et H_2.

2- Vérifions que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E :

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E $\Leftrightarrow$ on a $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \neq 0$.

En effet, $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$

$\Rightarrow \det(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1 \neq 0$, donc $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E. 0,5

3-a) Exprimons $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, sachant que f est la projection vectorielle de base H_1 et de direction H_2 :

- H_1 étant la base, c'est l'invariant $\Rightarrow \boxed{f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} = 2\vec{i}+\vec{j}}$ 0,5

- H_2 étant la direction, c'est le noyau $\Rightarrow \boxed{f(\vec{e_2}) = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}}$ 0,5

8

b/ Déterminons $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

Déterminons d'abord $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$:

$$\begin{cases} 2\vec{i}+\vec{j} = \vec{e_1} \\ \vec{i}+\vec{j} = \vec{e_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \vec{e_1}-\vec{e_2} \\ \vec{j} = 2\vec{e_2}-\vec{e_1} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\vec{i}) = f(\vec{e_1}-\vec{e_2}) = f(\vec{e_1}) - f(\vec{e_2})$

$= (2\vec{i}+\vec{j}) - (0\vec{i}+0\vec{j})$

$\Rightarrow \boxed{f(\vec{i}) = 2\vec{i}+\vec{j}}$ 0,5

$\Rightarrow f(\vec{j}) = f(2\vec{e_2}-\vec{e_1}) = 2f(\vec{e_2}) - f(\vec{e_1})$

$= 2(0\vec{i}+0\vec{j}) - (2\vec{i}+\vec{j})$

$\Rightarrow \boxed{f(\vec{j}) = -2\vec{i}-\vec{j}}$ 0,5

c/ Matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$:

On a : $\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i}+\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -2\vec{i}-\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ 0,5

4-a) Exprimons x' et y' de $\vec{u'}$ en fonction de x et y de $\vec{u}$, sachant que $\vec{u'}$ est l'image de $\vec{u}$:

$f(\vec{u}) = \vec{u'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{f : \begin{cases} x' = 2x-2y \\ y' = x-y \end{cases}}$ 0,5

b) Vérifions que $f \circ f = f$:

On a : $(f \circ f)(\vec{i}) = f[f(\vec{i})] = f(2\vec{i}+\vec{j}) = 2f(\vec{i}) + f(\vec{j})$

$(f\circ f)(\vec{i}) = 2(2\vec{i}+\vec{j}) + (-2\vec{i}-\vec{j})$

$= 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j}$

$= (4\vec{i} - 2\vec{i}) + (2\vec{j} - \vec{j})$

$\Rightarrow (f\circ f)(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} = f(\vec{i})$

et

$(f\circ f)(\vec{j}) = f[f(\vec{j})] = f(-2\vec{i}-\vec{j})$

$= -2f(\vec{i}) - f(\vec{j})$

$= -2(2\vec{i}+\vec{j}) - (-2\vec{i}-\vec{j})$

$= -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\Rightarrow (f\circ f)(\vec{j}) = -2\vec{i} - \vec{j} = f(\vec{j})$.

Donc $f\circ f = f$ est vrai. 0,5

Exercice 4 :

1-a) Déterminons $p(A)$; $p(M/A)$ et

et $P(M/\bar{A})$:

9

10

9

11

46

12

13

46

EXAEL - ARISTIDE F.S.1

BACCALAUREAT BLANC TECHNIQUE

SERIES : F1-F2-F3-F4	DUREE : 4 HEURES	COEF: 4	FEUILLE : 1/2	SESSION DU 16 AVRIL 2019

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES GENERALES

EXERCICE 1 (5 pts)

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : Z^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)Z - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

1-a)Vérifier que $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **(0,5pt + 0,5 pt)**

b) Vérifier alors que $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E) **(0,5pt)**

c)Trouver alors l'autre solution Z_2 de l'équation (E) **(0,5pt)**

d) Ecrire chacun des nombres complexes Z_1 et Z_2sous forme cartésienne **(0,5pt)**

2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$; on considère les point A et B d'affixes respectives $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z_B = -\sqrt{3} + i$

a)Vérifier que $Z_B = iZ_A$ **(0,25pt)**

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle isocèle **(0,25pt)**

c)Construire les points A et B **(0,5pt)**

3-Soit C le point du plan d'affixe$Z_C = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

a)Montrer que $OACB$ est un carré **(0,5pt)**

b) Placer le point C **(0,5pt)**

c)Déterminer la forme exponentielle de Z_C **(0,5pt)**

EXERCICE 2(5pts)

Sur l'espace vectoriel E muni de la base canonique $(\vec{i}\,;\vec{j})$ et f l'endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f o f(\vec{i}) = \vec{i}$.

1-Montrer que $f(\vec{j}) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ **(0,5pt)**

2-Montrer que $f o f(\vec{j}) = \vec{j}$ **(0,5pt)**

3-En déduire la nature de l'endomorphisme f **(0,5pt)**

4-Soit $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par f tel que $\vec{u}' = f(\vec{u})$ **(0,5pt)**

a) En se servant de $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$, montrer que $x'\vec{i} + y'\vec{j} = (3x + 4y)\vec{i} + (-2x - 3y)\vec{j}$ **(0,5pt)**

b) En déduire les expressions de x'et y'en fonction de x et y **(0,5pt)**

5-Déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme

a) L'axe E_1puis en donner une base $\vec{e}_1$**(0,5pt)**

b) La direction E_2puis en donner une base $\vec{e}_2$ **(0,5pt)**

6-On donne $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$

a)Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E**(0,5pt)**

b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$**(0,5pt)**

1/2

EXERCICE 3 (7pts)

1-On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x - 1 + x\ln x$

a) Etudier les variations de la fonction h . **(0,5pt)**

b) Calculer $h(1)$ .En déduire le signe de la fonction h sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty$ **(0,5pt)**

2-On considère la f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$ et on désigne par (C) sa courb Représentative dans un repère orthonormé direct$(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5pt)**

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5pt)**

3-a)Montrer que pour tout réel $x\epsilon]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$. **(0,25pt)**

b) Dresser le tableau de variation de la fonction$f$. **(0,5pt)**

4-a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$,l'équation$f(x) = x$. **(0.5pt)**

b) Montrer que,$f(x) \leq x$, si et seulement si $x\epsilon[1;e]$.**(0,5pt)**

c)En déduire la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ)d'équation $y = x$, **(0,5pt)**

5-Construire la courbe(C). **(0,5pt)**

6-Soit A, l'aire, en $u.a$ de la partie du plan limitée par la courbe(C) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $= e$.

a) Par une intégration par parties, montrer que :$\int_1^e (x\ln x)dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$. **(0,5pt)**

b) Calculer alors A. **(0,5pt)**

7-On considère la suite (u_n)définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a)Montrer par récurrence que pour tout $n\,\epsilon\,IN; 1 \leq u_n \leq e$. **(0,5pt)**

b) Montrer que la suite (u_n)est décroissante. **(0,25pt)**

c)En déduire que la suite (u_n)est convergente et déterminer sa limite. **(0,5pt)**

EXERCICE 4(3pts)

Pour contrôler la qualité de son produit, une usine de fabrication de machines effectue deux test Le premier test pour vérifier la partie mécanique du produit. Les deux tests sont faits indépendamment l'un de l'autre.

On constate que :

81% des machines n'ont aucun défaut

10% des machines ont un défaut électrique

Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

On note les événements suivants

E :≪ La machine présente un défaut électrique ≫

M :≪ La machine présente un défaut mécanique ≫

1-Construire l'arbre pondéré relatif à cette situation **(1pt)**

2-a) Déterminer les probabilités $P(E)$ et $P(\overline{E} \cap \overline{M})$ **(0,5pt +0,5pt)**

b) En déduire que $P\left(\overline{M}/_{\overline{E}}\right) = 0,9$ **(0,5pt)**

3-Montrer que $P(M) = 0,16$ **(0,5pt)**

2/2

Année Scolaire 2018-2019

Exercice 1 (5pts)

(E): $z^2-(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}})z-4e^{i\frac{\pi}{6}}=0$

1-a) <u>Vérifions que</u>:

$$e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=e^{\frac{2\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}i}\right)=e^{i\left(\frac{5\pi+3\pi}{12}\right)}-e^{i\left(\frac{5\pi-3\pi}{12}\right)}$$

$$e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=e^{i\left(\frac{8\pi}{12}\right)}-e^{i\left(\frac{2\pi}{12}\right)}$$

donc $\boxed{e^{\frac{5\pi}{12}i}\left(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=e^{\frac{2\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{6}i}}$ 0,25 pt

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{5\pi}{12}i}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

or $e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}=2i\sin\frac{\pi}{4}$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{6}}=2i\sin\frac{\pi}{4}e^{\frac{5\pi}{12}}$$

SERIE : F1-F2-F3-F4 | BACCALAUREAT BLANC | DUREE : 4heures | FEUILLE : 1/1 | SESSION DU 19 AVRIL 20

$z_2 = -2e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})}$; $\boxed{z_2 = -2e^{-\frac{\pi}{6}i}}$ (0,5pt)

d- Ecriture de Z_1 et Z_2 sous forme cartésienne

$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\boxed{Z_1 = 1 + i\sqrt{3}}$ (0,25pt)

$Z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$Z_2 = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$\boxed{Z_2 = -\sqrt{3} + i}$ (0,25pt)

2- a) Vérifions que $Z_B = iZ_A$

$Z_B = i(1 + i\sqrt{3})$

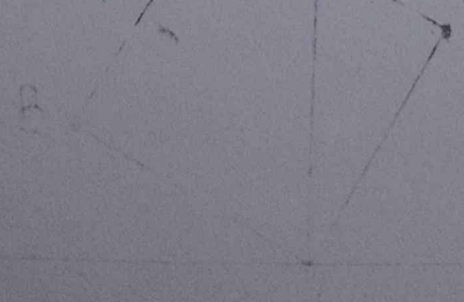
$Z_B = i - \sqrt{3}$; $Z_B = -\sqrt{3} + i$ D'où $\boxed{Z_B = iZ_A}$ (0,25pt)

b) Déduisons que le triangle CAB est rectangle isocèle

$Z_B = iZ_A$

$\boxed{\frac{Z_B}{Z_A} = i}$ (0,25pt) Donc CAB est un triangle rectangle isocèle en C (0,5pt)

c) Construction des points A et B



A (0,5pt)

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{6}i} = 2i\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

D'où $\boxed{e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{6}i} = i\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{12}i}}$ (0,25 pt)

b- Vérifions alors que $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

$$Z_1^2 - 2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}Z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$4e^{\frac{2\pi}{3}i} - 4i\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$4e^{\frac{2\pi}{3}i} - 4i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$4\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{6}i}\right) - 4i\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

Or $e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{6}i} = i\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$

$$Z_1^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)Z_1 - 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4i\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i} - 4i\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

$Z_1^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)Z_1 - 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 0$ Donc Z_1 est une solution de l'équation (E) (0,5 pt)

c- Trouvons alors l'autre racine Z_2 de l'équation (E)

On sait que $Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$

a) <u>Montrons que OACB est un carré</u>

OACB est un carré si, et seulement si $OA = OB = AC = BC$

or $OA = OB$ car OAB est un triangle rectangle isocèle

$AC = |z_C - z_A| = |(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) - 1 - i\sqrt{3}|$

$AC = |\cancel{1} - \sqrt{3} + i + \cancel{i\sqrt{3}} - \cancel{1} - \cancel{i\sqrt{3}}|$

$AC = |-\sqrt{3} + i| = 2$

$BC = |z_C - z_B| = |(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) + \sqrt{3} - i|$

$BC = |1 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{i} + i\sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{i}|$

$BC = |1 + i\sqrt{3}| = 2$

0,5pt

Comme $OA = OB = AC = BC$ alors OACB est un carré

c) <u>Déterminons la forme exponentielle de z_C</u>

$z_C = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} = (1+i\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}+i)$

$\cancel{z_C = (1+i\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}+i)} = z_A + z_B$ or $z_B = iz_A \Rightarrow z_C = (1+i)z_A$

$\cancel{z_C = 2e^{\frac{\pi}{3}i} + 2e^{\frac{5\pi}{6}i}}$

$\cancel{\boxed{z_C = 2\left(e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)}}$ 0,5pt

$z_C = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(2e^{i\frac{\pi}{3}})$

$z_C = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Exercice 2 (5pts)

$f\circ f(\vec{i}) = f(3\vec{i}-2\vec{j})$

$f\circ f(\vec{i}) = 3f(\vec{i})-2f(\vec{j})$

$3f(\vec{i})-2f(\vec{j}) = \vec{i}$

$-2f(\vec{j}) = \vec{i}-3f(\vec{i})$

$2f(\vec{j}) = 3f(\vec{i})-\vec{i}$

$2f(\vec{j}) = 3(3\vec{i}-2\vec{j})-\vec{i}$

$2f(\vec{j}) = 9\vec{i}-6\vec{j}-\vec{i}$

$2f(\vec{j}) = 8\vec{i}-6\vec{j}$

$\boxed{f(\vec{j}) = 4\vec{i}-3\vec{j}}$ 0,5pt

2- <u>Montrons que $f\circ f(\vec{j}) = \vec{j}$</u>

$f\circ f(\vec{j}) = f[f(\vec{j})]$

$f\circ f(\vec{j}) = f(4\vec{i}-3\vec{j})$

$f\circ f(\vec{j}) = 4f(\vec{i})-3f(\vec{j})$

$f\circ f(\vec{j}) = 4(3\vec{i}-2\vec{j})-3(4\vec{i}-3\vec{j})$

$f\circ f(\vec{j}) = 12\vec{i}-8\vec{j}-12\vec{i}+9\vec{j}$

$\boxed{f\circ f(\vec{j}) = \vec{j}}$ 0,5pt

$\vec{u'} = f(\vec{u})$

a) Montrons que : $x'\vec{i} + y'\vec{j} = (3x+4y)\vec{i} + (-2x-3y)\vec{j}$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = f(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = x f(\vec{i}) + y f(\vec{j})$$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = x(3\vec{i} - 2\vec{j}) + y(4\vec{i} - 3\vec{j})$$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = 3x\vec{i} - 2x\vec{j} + 4y\vec{i} - 3y\vec{j}$$

$$\boxed{x'\vec{i} + y'\vec{j} = (3x+4y)\vec{i} + (-2x-3y)\vec{j}}$$ 0,75pt

b) Déduisons les expressions de x' et y' en fonction de x et y

Par Identification on a :

$$\boxed{f : \begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}}$$ 0,75pt

- Déterminons les éléments caractéristiques de f

a- L'axe E_1 puis en donner une base $\vec{e_1}$

$E_1 = \{\forall \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$

$$\begin{cases} x = 3x + 4y \\ y = -2x - 3y \end{cases} ; \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

L'axe est une droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$ engendrée par $\vec{e_1}(-2 ; 1)$ [illegible]

E_2 [illegible]

$E_2 = \{\forall \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

$\begin{cases} \ldots = 3x+4y \\ \ldots y = -2x-3y \end{cases}$; $\begin{cases} -4x-4y=0 \\ \ldots y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

a direction est une droite vectorielle d'équation $x+y=0$ engendrée par $\vec{e_2}(-1;1)$ 0,5pt

- On donne $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$

a- Montrons que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E

$(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2+1=-1$ 0,5pt

Comme $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$; alors $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E.

b- Déterminons la matrice de f dans la base $(\vec{u};\vec{v})$

$\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$

$f(\vec{u})=-2f(\vec{i})+f(\vec{j})$

$f(\vec{u})=-2(3\vec{i}-2\vec{j})+4\vec{i}-3\vec{j}$

$f(\vec{u})=-6\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{j}$

$f(\vec{u})=-2\vec{i}+\vec{j}$; $f(\vec{u})=\vec{u}+0\vec{v}$

$\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$

$f(\vec{v})=-f(\vec{i})+f(\vec{j})$

$f(\vec{v})=-3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{i}-3\vec{j}$

$f(\vec{v})=\vec{i}-\vec{j}$ $\quad f(\vec{v})=0.\vec{u}-\vec{v}$

$M_{f(\vec{u},\vec{v})}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

...ice 3 (7p5)

$h(x) = x - 1 + x\ln x$

1- **Etude des variations de la fonction h**

Limites aux bornes de Eh

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1 + x\ln x) = -1$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 + x\ln x) = +\infty$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$

Dérivée et signe

$h'(x) = 1 + \ln x + 1$

$\boxed{h'(x) = 2 + \ln x}$

Supposons que $h'(x) \geq 0$

$2 + \ln x \geq 0$

$\ln x \geq -2$

$x \geq e^{-2}$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Tableau de variation

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$			
$h(x)$	‖ -1	↘		↗	0	↗	$+\infty$

...minons le signe de la fonction h sur chacun des intervalles]0; 1] et [1; +∞[

$\forall x \in]0;1],\ h(x) < 0$ 0,5pt

$\forall x \in [1;+\infty[\ h(x) > 0$

$f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Interprétons graphiquement ce résultat

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + (x-1)\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x\ln x - \ln x = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$ 0,25pt

La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ 0,25pt

- Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprétons graphiquement le résultat

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + (x-1)\ln x = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$ 0,25pt

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 + x\ln x - \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x}\ln x = +\infty$

2-a) Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

$f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = \frac{x\ln x + x - 1}{x}$

$f'(x) = \frac{x - 1 + x\ln x}{x}$ d'où $\boxed{f'(x) = \frac{h(x)}{x}}$ (0,25pt)

b- Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(0,5pt)

3-a) Résolvons dans $]0;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x$; $1 + (x-1)\ln x = x$

$1 - x + (x-1)\ln x = 0$

$(x-1)(\ln x - 1) = 0$

$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ \ln x - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = e \end{cases}$ $\boxed{S = \{1 ; e\}}$ (0,5pt)

...me $\forall x \in [1; e]$; $f(x) - x \leq 0$ donc $f(x) \leq x$ (0,5pt)

Déduisons la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$

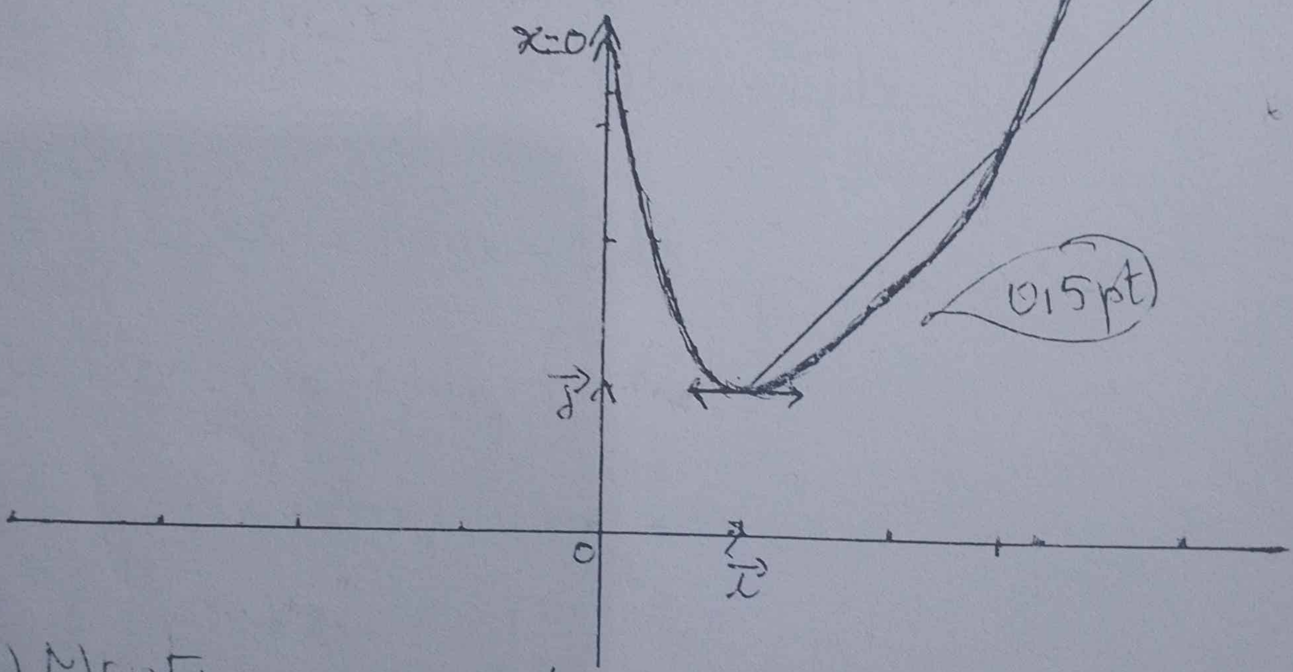
(0,5pt)

$\forall x \in]0; 1]$; $f(x) - x \geq 0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de la droite (Δ)

$\forall x \in]1; e]$; $f(x) - x \leq 0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de la droite (Δ)

$\forall x \in [e; +\infty[$; $f(x) - x \geq 0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de la droite (Δ)

i- Construction de la courbe $(\mathscr{C}_f)$



6- a) Montrons que :

$$\int_1^e (x \ln x)\,dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

$u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$

$v' = x$, $v = \frac{1}{2}x^2$

$$\int_1^e (x \ln x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$$

$$\int_1 (x\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e^2\ln e - \frac{1}{4}[e^2-1]$$

$$\int_1^e (x\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^e (x\ln x)\,dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$$ 0,5pt

5- Calculons l'aire A.

$$A = \int_1^e (y - f(x))\,dx = \int_1^e [x - (x-1)\ln x - 1]\,dx$$

$$A = \int_1^e (x - x\ln x + \ln x - 1)\,dx$$

$$A = \int_1^e (x + \ln x - 1)\,dx - \int_1^e x\ln x\,dx$$

$$A = \int_1^e (x - 1 + \ln x)\,dx - \int_1^e x\ln x\,dx$$

$$A = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + x\ln x - x\right]_1^e - \int_1^e x\ln x\,dx$$

$$A = \left[\left(\frac{1}{2}e^2 - e + \cancel{e} - \cancel{e}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - 1\right)\right] - \left[\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{e^2}{4} \text{ [illegible] } + \frac{3}{2} - 1$$

$$A = \frac{1}{4}e^2 \text{ [illegible]}$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n \end{cases}$$

MAUDE

[illegible]ontrons par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq e$

. Vérifions la proposition au rang $n=0$

$1 \leq U_0 \leq e$ Vraie

* Supposons la proposition vraie au rang n 0,25pt

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$

* Montrons la proposition au rang $n+1$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_{n+1} \leq e$

En effet, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$

$f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$

$1 \leq f(U_n) \leq e$

$1 \leq U_{n+1} \leq e$

* On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$. 0,25pt

b- Montrons que la suite (U_n) est décroissante

On a: $1 \leq U_n \leq e$

D'après 7a) $U_n \geq f(U_n)$

$U_n \geq U_{n+1}$

$U_n - U_{n+1} \geq 0$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ 0,25pt

D'où la suite (U_n) est décroissante

[illegible]

par 1

La suite [illegible]

... par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$1 \leq U_n \leq e$

* Vérifions la proposition au rang $n=0$

$1 \leq U_0 \leq e$ Vraie

* Supposons la proposition vraie au rang n (0,25pt)

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$

* Montrons la proposition au rang $n+1$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_{n+1} \leq e$

En effet, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$

$f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$

$1 \leq f(U_n) \leq e$

$1 \leq U_{n+1} \leq e$

* On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq e$. (0,25pt)

b- Montrons que la suite (U_n) est décroissante

On a : $1 \leq U_n \leq e$

D'après 7a) $U_n \geq f(U_n)$

$U_n \geq U_{n+1}$

$U_n - U_{n+1} \geq 0$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ (0,25pt)

D'où la suite (U_n) est décroissante

[illegible]

par 1

La suite (U_n) est décroissante et minorée donc elle convergente.

$]0, +\infty[$

vérifie $f(\ell) = \ell$

$\ell = 1 + (\ell - 1)\ln \ell$

$\ell - 1 = (\ell - 1)\ln \ell$

$(\ell - 1)(1 - \ln \ell) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell = 1 \\ \text{ou} \\ \ell = e \end{array} \right.$

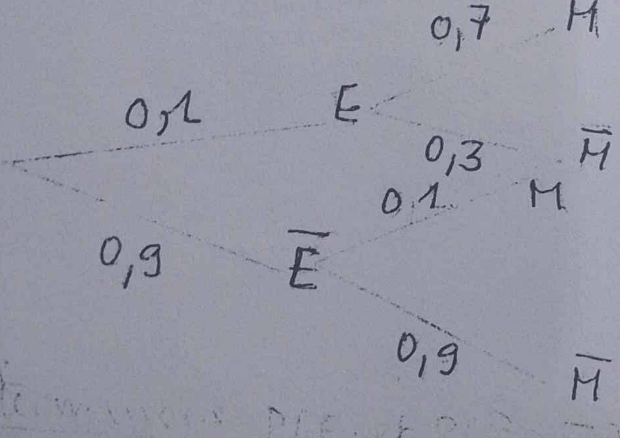
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 1$ (0,25pt)

$1 \leq u_n \leq e$

$(u_n) \searrow \longrightarrow \ell = 1$ (minorant)

exercice 4 (3pts)

1- Construisons l'arbre pondéré



2- a) déterminons $P(E)$ et $P(\bar{E} \cap \bar{M})$

$P(E) = 0,1$ (0,25pt)

$P(\bar{E} \cap \bar{M}) = \dfrac{81}{100} = 0,81$ (0,25pt)

b) Déduisons que $P(\bar{M}/\bar{E}) = 0,9$

$P(\bar{M} | \bar{E}) = \dfrac{P(\bar{E} \cap \bar{M})}{P(\bar{E})}$ or $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$P(\bar{M} | \bar{E}) = \dfrac{0,81}{0,9}$ $0,9$ $P(\bar{M} | \bar{E}) = 0,9$

$(M) = P(E) \times P(M | E) + P(\bar{E}) \times P(M / E) = 0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,1 = 0,16$

BACCALAUREAT BLANC TECHNIQUE

SERIE : F1 – F4	DUREE : 04h00	COEF :04	FEUILLE : 1/2	SESSION DU : 17 Avril 2018

EPREUVE DE: MATHEMATIQUES

EXERCICE N° 1 (4Points)

Soit θ un réel de l'intervalle$[\ 0\ ;\ \pi\ ]$.

1°/ - Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation suivante :

$$Z^2 - 2(4 + 5cos\theta)Z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$$

On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive Z_2 l'autre solution.

2°/ - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point M d'affixe Z_1.

a – Montrer que les coordonnées x et y du point M, vérifient les relations

$$\begin{cases} x = 4 + 5cos\theta \\ y = 3sin\theta \end{cases} \quad avec\ \theta \in [\ 0\ ;\ \pi\ [$$

b – Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan lorsque θ décrit l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ [$.

c – Tracer (E).

EXERCICE N° 2 (5Points)

Dans l'espace vectoriel C muni de sa base canonique $B = (1; i)$, on considère l'application f de C dans C définie par : $f = -3iZ - (3 + i)\bar{Z}$

1°/ - a) Qu'est - ce qu'un endomorphisme ?

b) Montrer que f est un endomorphisme

2°/ - a) Calculer $f(1)$ et $f(i)$ puis déduire la matrice de f dans la base B.

b) Calculer $fof(1)$ et $fof(i)$ puis déduire la nature de f.

c) Montrer que f est un automorphisme involutif

d) Caractériser f

3°/ - Soit $\vec{e}_1 = 1 + 2i$ et $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ deux vecteurs de C

a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de C.

b) Ecrire la matrice de f dans la base$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

EXERCICE N° 3 (8Points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité : 2cm.

Soit g la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \ln(1 - xe^x)\ ;\ si\ x < 0 \\ g(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\ ;\ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

BACCALAUREAT BLANC TECHNIQUE				
SERIE : **F1 – F4**	DUREE : **04h00**	COEF :**04**	FEUILLE : **2/2**	SESSION DU : **17 Avril 2018**
EPREUVE DE: **MATHEMATIQUES**				

On désigne par (C) la courbe représentative g.

1°/ - Déterminer l'ensemble de définition de g.

2°/ - Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x = 0$

3°/ - Etudier les variations de g, dressera un tableau de variations.

4°/ - Etudier les branches infinies à (C) puis tracer (C)

5°/ - Soit h la restriction de g à l'intervalle $]0; +\infty[$ et (H) sa courbe.

a) – Montrer que $h^{-1}(x)$ existe.

b) – Dresser la tableau de variations de h^{-1}

c) – Expliciter g^{-1} (x)

6°/ - Soit S la transformation plane qui, a tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

a) – Montrer que l'écriture complexe S est : $Z' = i\bar{Z} - 1 + i$

b) – Soit (H') image de (H) par S. Montrer qu'une équation cartésienne de (H') est :

$$y = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x-2}{x}\right)$$

EXERCICE N° 4 (3 Points)

Un enfant décide de jouer à un jeu qui se déroule de la façon suivante : Il tire un jeton dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 jetons bleus :

- S'il est bleu, il a gagné ;
- Sinon, il tire un nouveau jeton, sans remettre le précédent dans l'urne :
- S'il est bleu, il a gagné ;
- Sinon, il tire un troisième jeton, sans remettre les deux jetons précédents :
- S'il est bleu, il a gagné, sinon il a perdu.

1°/ - Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.

2°/ - Déterminer la probabilité des événements suivants

A : " L'enfant a gagné au premier tirage"

B : " L'enfant a gagné au deuxième tirage"

C : " L'enfant a gagné au troisième tirage"

3°/ - Montrer que la probabilité que l'enfant gagne la partie est égale à $\frac{7}{12}$

+ (BAC BLANC)

rcice N°1 : (4pts)

1) $Z^2 - 2(4+5\cos\theta)Z + (4\cos\theta+5)^2 = 0$

$\Delta = b'^2 - ac$ $\left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b' = -(4+5\cos\theta) \\ c = (4\cos\theta+5)^2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \Delta' = 9i^2\sin^2\theta = (3i\sin\theta)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 4+5\cos\theta + 3i\sin\theta \\ Z_2 = 4+5\cos\theta - 3i\sin\theta \end{cases}$

d'où $\boxed{S = \{Z_1, Z_2\}}$ 1,5pts

2) a) soit $M(Z_1)$.

On a : $Z_1 = x + iy$

Par identification, on a :

$\boxed{\begin{cases} x = 4+5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}}$ 0,5

b) $\begin{cases} x = 4+5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x-4}{5} \\ \sin\theta = \frac{y}{3} \end{cases}$

On sait que : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{x-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Nature : c'est une ellipse

Eléments caractéristiques :

- Centre : $\Omega\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$
- Sommets : $S\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $S'\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ (1)

- Foyers : $F\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

avec $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ 1,5

- Directrices :

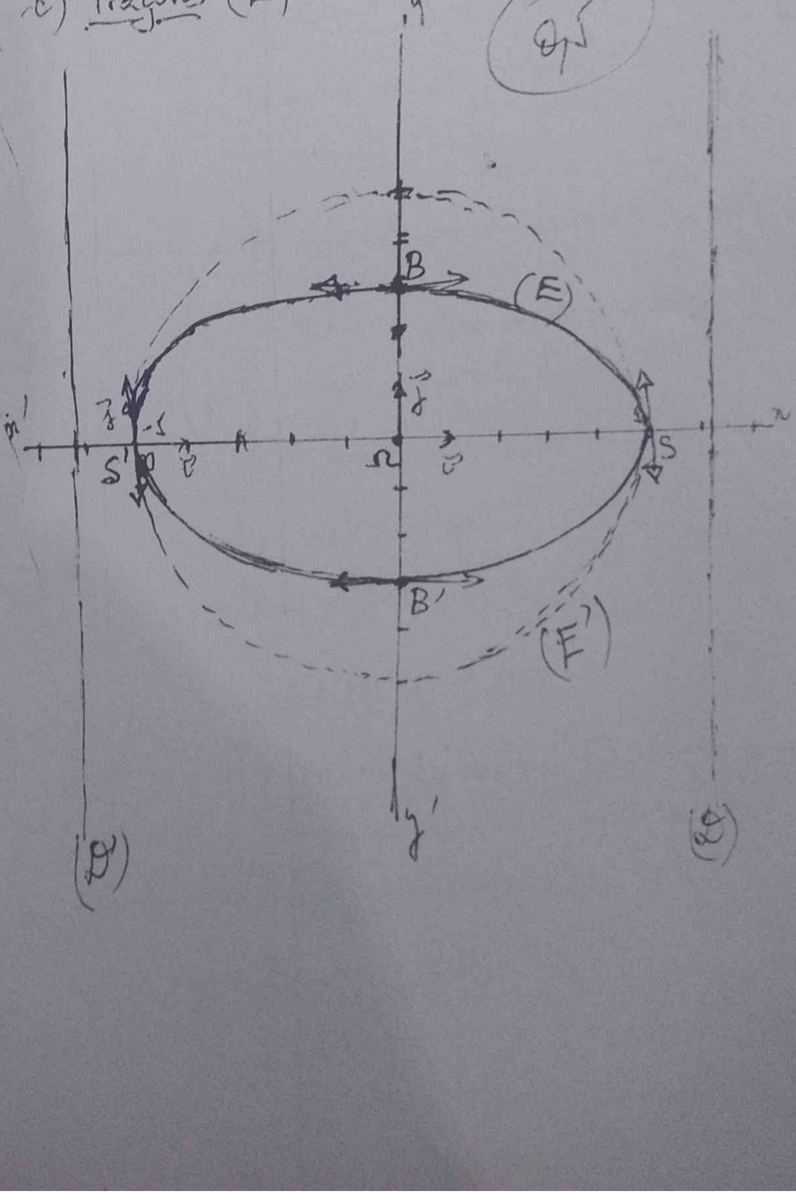
$(D) : x = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4} = 6,25$ et $(D') : x = -\frac{25}{4} = -6,25$

- Axes : $\begin{cases} * \text{ axe focal} : (SS') \\ * \text{ grand axe} : [SS'] \\ + \text{ petit axe} : [BB'] \end{cases}$

- Cercles : $\begin{cases} * \text{ Cercle principal (ellipse } E) / E(\Omega, 5) \\ * \text{ cercle secondaire } (E'(\Omega; 3)). \end{cases}$

c) Traçons (E) :

0,5



Exercice 2 : (5pts)

$f(Z) = -3iZ - (3+i)\overline{Z}$

1a) Cf cours (0,25)

b) Montrons que f est un endomorphisme :

$\forall (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$f(\alpha Z_1 + \beta Z_2) = \alpha f(Z_1) + \beta f(Z_2)$

$\Rightarrow f(\alpha Z_1 + \beta Z_2) = -3i(\alpha Z_1 + \beta Z_2) - (3+i)\overline{(\alpha Z_1 + \beta Z_2)}$

$= -3i(\alpha Z_1 + \beta Z_2) - (3+i)(\alpha \overline{Z_1} + \beta \overline{Z_2})$

$= -3i\alpha Z_1 - 3i\beta Z_2 - 3\alpha\overline{Z_1} - 3\beta\overline{Z_2} - i\alpha\overline{Z_1} - i\beta\overline{Z_2}$

$= (-3i\alpha Z_1 - 3\alpha\overline{Z_1} - i\alpha\overline{Z_1}) + (-3i\beta Z_2 - 3\beta\overline{Z_2} - i\beta\overline{Z_2})$

$= \alpha[-3iZ_1 - (3+i)\overline{Z_1}] + \beta[-3iZ_2 - (3+i)\overline{Z_2}]$

$\Rightarrow f(\alpha Z_1 + \beta Z_2) = \alpha f(Z_1) + \beta f(Z_2)$, alors f est une application linéaire, de même est définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. (0,75)

Donc f est un endomorphisme.

2) a) Calculons $f(1)$ et $f(i)$.

$f(1) = -3i(1) - (3+i)\overline{(1)}$

$= -3i - 3 - i \Rightarrow \boxed{f(1) = -3-4i}$ (0,25)

$f(i) = -3i(i) - (3+i)\overline{(-i)}$

$= -3i^2 + 3i + i^2$

$= 3 + 3i - 1 \Rightarrow \boxed{f(i) = 2+3i}$ (0,25)

Déduisons la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1; i)$.

$$\boxed{M_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) Calculons $fof(1)$ et $fof(i)$:

$fof(1) = f[f(1)] = f(-3-4i) = -3f(1) - 4f(i)$

$= -3(-3-4i) - 4(2+3i)$

$= 9 + 12i - 8 - 12i$

$\Rightarrow \boxed{fof(1) = 1}$

$fof(i) = f[f(i)] = f(2+3i) = 2f(1) + 3f(i)$

$= 2(-3-4i) + 3(2+3i)$

$= -6 - 8i + 6 + 9i$

$\Rightarrow \boxed{fof(i) = i}$

Déduisons la nature de f.

Comme on a : $\begin{cases} fof(1) = 1 \\ \text{et} \\ fof(i) = i \end{cases}$, donc f est une symétrie vectorielle.

c) Montrons que f est un automorphisme involutif :

f est un automorphisme involutif

$\Leftrightarrow$ dét $M_f \neq 0$.

En effet, dét $M_f = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 8$

$\Rightarrow$ dét $M_f = -1 \neq 0$.

De même $fof = I_d$, alors f est un automorphisme involutif. (0,5)

d) Caractérisons f :

* Base : (Inv_f) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -4x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 4x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x - y = 0$

La base de f est une droite vectorielle d'équation $2x-y=0$ engendrée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (0,25)

* Direction : $(Opp(f))$:

$\begin{cases}-x=-3x+2y\\-y=-4x+3y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\4x-4y=0\end{cases}$

$\Rightarrow x-y=0.$

La direction de f est une droite vectorielle d'équation $x-y=0$ engendrée par le vecteur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. (0,25)

3°) Soit $\vec{e_1}=1+2i$ et $\vec{e_2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ deux vecteurs de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}$:

$(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ dét$(\vec{e_1},\vec{e_2})\neq 0$.

En effet, dét$(\vec{e_1},\vec{e_2})=\begin{vmatrix}1 & -1/2\\2 & -1/2\end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\neq 0$

, donc $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}$.

b-) Écrivons la matrice de f dans la base $(\vec{e_1},\vec{e_2})$.

$\vec{e_1}=1+2i$

$f(\vec{e_1})=f(1+2i)=f(1)+2f(i)$

$=-3-4i+2(2+3i)$

$=-3-4i+4+6i$

$f(\vec{e_1})=1+2i=\vec{e_1}$ | $\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ comme $\vec{i}$

$\vec{e_2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow f(\vec{e_2})=-\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(i)$

$\Rightarrow f(\vec{e_2})=-\frac{1}{2}(-3-4i)-\frac{1}{2}(2+3i)$

$=\frac{3}{2}+2i-1-\frac{3}{2}i$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=-\vec{e_2}$ | $\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ comme $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \boxed{M=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}$ (0,5)

Exercice N°3 : (8pts)

$\begin{cases}g(x)=\ln(1-xe^{x})\ ;\ \text{si } x<0\\ g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ ;\ \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) Déterminons l'ens. de déf. de g :

Si $x<0$: $1-xe^{x}>0$ or, $-xe^{x}>0\ \forall x<0$
$\Rightarrow 1-xe^{x}>0\ \forall x<0$

$\Rightarrow E_1 g=]-\infty;0[$.

Si $x\geq 0$: $e^{2x}+1\neq 0$. Or $e^{2x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow e^{2x}+1\neq 0\ \forall x\geq 0$

$\Rightarrow E_2 g=[0;+\infty[$ $\Rightarrow \boxed{E_g=E_1 g\cup E_2 g=]-\infty;+\infty[}$ (0,5)

2) Étudions la continuité et la dérivabilité de g en $x=0$:

- Continuité :

On constate que :

$g(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$, donc

g est continue en $x_0=0$. (0,5)

- Dérivabilité :

*A gauche : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-xe^{x})}{x}$

Posons : $xe^{x}=t \Rightarrow x=\dfrac{t}{e^{x}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\x\to 0}} e^{x}\cdot\dfrac{\ln(1-t)}{t}=1\times(-1)=-1$.

$\Rightarrow g'_g(0)=-1$.

la base de f est une droite vectorielle d'équation $2x-y=0$ engendrée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (0,25)

* Direction : (opp(f)) :

$\begin{cases}-x=-3x+2y\\-y=-4x+3y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\4x-4y=0\end{cases}$

$\Rightarrow x-y=0.$

La direction de f est une droite vectorielle d'équation $x-y=0$ engendrée par le vecteur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. (0,25)

3°) Soit $\vec{e_1}=1+2i$ et $\vec{e_2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ deux vecteurs de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}$:

$(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{e_1},\vec{e_2})\neq 0$.

En effet, $\det(\vec{e_1},\vec{e_2})=\begin{vmatrix}1 & -1/2\\2 & -1/2\end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\neq 0$

, donc $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{C}$.

b) Écrivons la matrice de f dans la base $(\vec{e_1},\vec{e_2})$.

$\vec{e_1}=1+2i$

$f(\vec{e_1})=f(1+2i)=f(1)+2f(i)$

$=-3-4i+2(2+3i)$

$=-3-4i+4+6i$

$f(\vec{e_1})=1+2i=\vec{e_1}$ | $\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ comme $\vec{i}$

$\vec{e_2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow f(\vec{e_2})=-\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(i)$

$\Rightarrow f(\vec{e_2})=-\frac{1}{2}(-3-4i)-\frac{1}{2}(2+3i)$

$=\frac{3}{2}+2i-1-\frac{3}{2}i$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=-\vec{e_2}$ | $\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ comme $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{M=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}$ (0,5)

Exercice N°3 : (8pts)

$\begin{cases}g(x)=\ln(1-xe^{x})\ ;\ \text{si } x<0\\ g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ ;\ \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) Déterminons l'ens. de déf. de g :

Si $x<0$: $1-xe^{x}>0$ or, $-xe^{x}>0\ \forall x<0$
$\Rightarrow 1-xe^{x}>0\ \forall x<0$

$\Rightarrow E_{1g}=]-\infty;0[$.

Si $x\geq 0$: $e^{2x}+1\neq 0$. Or $e^{2x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow e^{2x}+1\neq 0\ \forall x\geq 0$

$\Rightarrow E_{2g}=[0;+\infty[$ $\Rightarrow \boxed{E_g=E_{1g}\cup E_{2g}=]-\infty;+\infty[}$ (0,5)

2) Étudions la continuité et la dérivabilité de g en $x=0$:

- Continuité :

On constate que :

$g(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$, donc g est continue en $x_0=0$. (0,5)

- Dérivabilité :

* A gauche : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-xe^{x})}{x}$

Posons : $xe^{x}=t \Rightarrow x=\dfrac{t}{e^{x}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{t\to 0\\x\to 0}} e^{x}\cdot\dfrac{\ln(1-t)}{t}=1\times(-1)=-1.$

$\Rightarrow g'_g(0)=-1.$

- A droite :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{x(e^{2x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{2x}+1} \times \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{x}}_{2} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

$\Rightarrow g'_d(0) = 1$, donc g n'est (0,5) pas dérivable en $x_0 = 0$, mais $(\mathcal{C})$ de g admet deux $\frac{1}{2}$ tgts au point $(0;0)$ de coef. directeurs respectifs $a_g = -1$ et $a_d = 1$, donc c'est un point anguleux.

3- Etudions les variations de g, dressons un tableau de variation de g :

- limits de g aux bornes de E_g :

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0}$ (0,25) ; $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$ (0,25)

- Dérivée de g et son signe :

* Si $x<0$; $g(x) = \ln(1 - xe^{x})$

$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{(-1-x)e^{x}}{(1-xe^{x})}}$ (0,25)

Posons : $g'(x) = 0 \Rightarrow -1-x = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		

(0,25)

* Si $x \geq 0$:

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\cancel{2e^{4x}} + 2e^{2x} - \cancel{2e^{4x}} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$g'(x) = \frac{4e}{(e^{2x}+1)^2} > 0 \ \forall x \in [0,+\infty[$ (1,5pt) 4

- Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	-1 ‖ 1	$+$	
$g(x)$	0	↗	$\ln(1+e^{-1})$	↘	0	↗	1

4) Etudions les branches infinies

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$; $y = 0$; Asymptote horizontale en $-\infty$ (0,5)

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, $y = 1$; Asymptote horizontale en $+\infty$.

5) a) Montrons que $h^{-1}(x)$ existe :

h est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle est bijective. Par conséquent, h admet une bijection réciproque h^{-1} de $[0;1[$ vers $[0;+\infty[$.

b) Dressons le tableau de Δ de h^{-1}

x	0		1
$(h^{-1})'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	↗	$+\infty$

(0,5)

c) Explicitons g^{-1} :

Posons : $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y$ (=) $e^{2x}-1 = ye^{2x}+y$; $e^{2x} - ye^{2x} = y+1$

$\Rightarrow e^{2x}(1-y) = y+1$

$\Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} = \frac{-(y+1)}{y-1}$

$\Rightarrow \ln e^{2x} = \ln\left(\frac{-y-1}{y-1}\right)$

$2x = \ln\left(\frac{-y-1}{y-1}\right)$

$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-y-1}{y-1}\right)$

$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$

5

17

$\boxed{h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$ 0,5

6) Soit $S(M) = M' \;/\; M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$

$$\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = x+1 \end{cases}$$

a) Montrons que : $S : Z' = i\bar{Z} - 1 + i$

$\Rightarrow x' + iy' = i(x - iy) - 1 + i$

$\Rightarrow x' + iy' = ix + y - 1 + i$

$\Rightarrow x' + iy' = y - 1 + (x+1)i$

$\Rightarrow x' + iy' = i\underbrace{(x - iy)}_{\bar{Z}} - 1 + i$

$\Rightarrow x' + iy' = i\bar{Z} - 1 + i$ 0,5

b) Montrons qu'une équation cartésienne cartésienne de (H') image de (H) par S est : $y = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x-2}{x}\right)$.

$S(H) = H'$

$\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y'-1 \\ y = x'+1 \end{cases}$. Or, $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

or, $x = y' - 1 \Rightarrow y = \frac{e^{2y'-2} - 1}{e^{2y'-2} + 1}$

or, $y = x' + 1$

$\Rightarrow x' + 1 = \frac{e^{2y'-2} - 1}{e^{2y'-2} + 1}$

$\Leftrightarrow x'(e^{2y'-2} + 1) + e^{2y'-2} + 1 = e^{2y'-2} - 1$

$\Rightarrow x'(e^{2y'-2} + 1) = -2$

$\Rightarrow e^{2y'-2} + 1 = \frac{-2}{x'}$

$\Rightarrow e^{2y'-2} = -\frac{2}{x'} - 1$

$\Rightarrow e^{2y'-2} = \frac{-x'-2}{x'}$

$\Rightarrow \ln e^{2y'-2} = \ln\left(\frac{-x'-2}{x'}\right)$

$\Rightarrow 2y' - 2 = \ln\left(\frac{-x'-2}{x'}\right)$

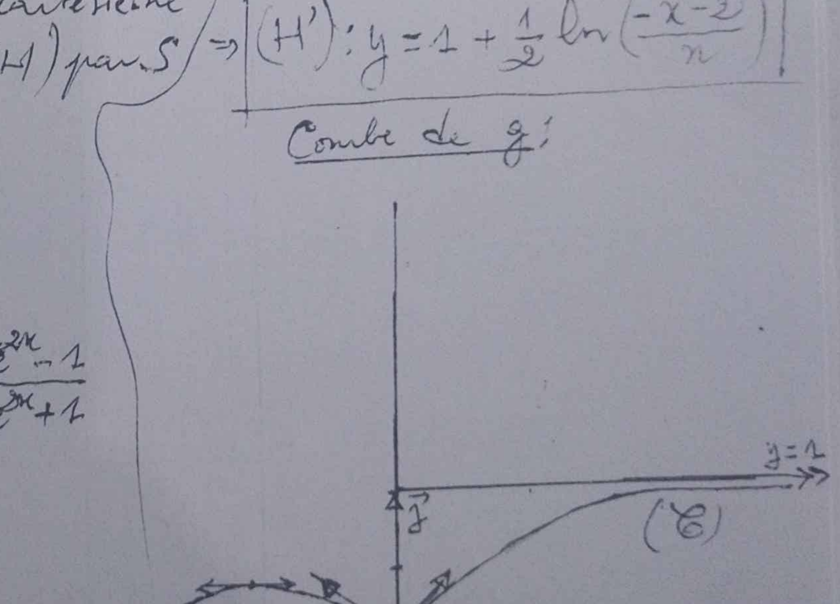
$\Rightarrow 2(y'-1) = \ln\left(\frac{-x'-2}{x'}\right)$

$\Rightarrow y' - 1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x'-2}{x'}\right)$

$\Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x'-2}{x'}\right)$

$\Rightarrow \boxed{(H') : y = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-x-2}{x}\right)}$

Courbe de g :



Exercice N° 4 :

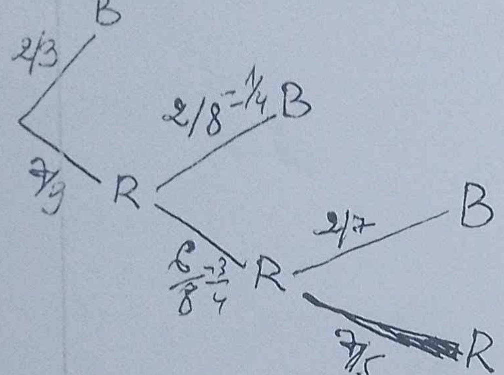
(6)

1) Construisons un arbre pondéré correspondant à cette situation

$\Omega = \{7R, 2B\}$

Probabilité d'avoir tiré la 1ère fois un jeton bleu : $P(1B) = \frac{2}{9}$

Probabilité d'avoir tiré la 1ère fois un jeton rouge : $P(1R) = \frac{7}{9}$.



(1)

2) Déterminons la probabilité des événements suivants

A : "L'enfant a gagné au 1er tirage"

$\boxed{P(A) = \frac{2}{9}}$ ou bien $P(A) = \frac{C_2^1}{C_9^1} = \frac{2}{9} \simeq 0,22$

B : "l'enfant a gagné au 2e tirage"

$P(B) = P_R(B) = \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{36}$ ou bien $P(B) = \frac{C_7^1 C_2^1}{C_9^1 C_8^1} = \frac{7 \times 2}{9 \times 8} = \frac{7}{9 \times 4} = \boxed{\frac{7}{36}}$

C : "l'enfant a gagné au 3e tirage"

$P(C) = \frac{\cancel{7}}{\cancel{9}_3} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} \times \frac{2}{\cancel{7}} = \frac{1}{6}$ ou bien : $P(C) = \frac{C_7^1 C_6^1 C_2^1}{C_9^1 C_8^1 C_7^1} = \frac{\cancel{6}^2 \times 2}{\cancel{9}_3 \times \cancel{8}_{4/2}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

3) Montrons que la probabilité que l'enfant la partie est égale à $\frac{7}{12}$:

Soit $P(G)$ = probabilité de gagner : (c'est-à-dire il peut gagner uniquement au 1er ou 2e ou 3e tirage)

$\Rightarrow P(G) = P(A) + P(B) + P(C)$

$= \frac{2}{9} + \frac{7}{36} + \frac{1}{6} = \frac{(4 \times 2) + 7 + (1 \times 6)}{36} = \frac{8 + 7 + 6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{21 : 3}{36 : 3} = \boxed{\frac{7}{12}}$ Vrai

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Séries : F1-F2-F3-F4	Durée : 04 Heures	Coefficient : 4	Feuille : 1/2	Session du : 18 Avril 2017
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

Exercice 1 $(5\ pts)$

On considère le polynôme $P(Z) = Z^4 - 4(1+i)Z^3 + 12iZ^2 + 8(1-i)Z - 20$

1-Déterminer les nombres complexes b et c pour qu'on ait $P(Z) = (Z^2 + 2i)(Z^2 + bZ + c)$ $(0.5pt)$

2-Développer l'expression $(1-i)^2$. Puis résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C , l'équation $P(Z) = 0$ $(1\ pt)$

3-Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct$(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

On considère les points A , B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = 1 + 3i$ et $Z_D = 3 + i$

a-Faire la figure $(0.5\ pt)$

b-Démontrer que $ABCD$ est un carré $(0.5\ pt)$

4-Soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme C en B

a-Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S $(1\ pt)$

b-Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S $(Centre\ ;Rapport\ et\ Angle)$ $(0.75\ pt)$

c-Déterminer l'image du point B par la similitude plane directe S $(0.25\ pt)$

d-Construire l'image du carré $ABCD$ par la similitude plane directe S $(0.5\ pt)$

Exercice 2 $(5\ pts)$

L'espace vectoriel R^2 est rapporté à sa base canonique $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de R^2défini dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ par : $x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{\imath} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{\jmath}$

1-Déterminer l'expression analytique de f $(0.5\ pt)$

2-On considère l'expression analytique de l'endomorphisme $f:\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x \end{cases}$

a- Donner la matrice de l'endomorphisme f. $(0.5\ pt)$

b- Montrer que f n'est pas bijectif. Que peut-on en déduire ? $(1\ pt)$

3-On suppose que f est un projecteur

a-Déterminer la base E_1 de f puis en donner une base $\vec{e}_1$ $(1\ pt)$

b-Déterminer la direction $\vec{E}_2$ de f puis en donner une base $\vec{e}_2$ $(1\ pt)$

4-Soit les vecteurs $\vec{u} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

a-Montrer que $(\vec{u};\vec{v})$ forme une base de R^2 $(0.5\ pt)$

b-Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u};\vec{v})$ $(0.5\ pt)$

BACCALAUREAT TECHNIQUE BLANC				
Séries : F1-F2-F3-F4	Durée : 04 Heures	Coefficient : 4	Feuille : 2/2	Session du : 18 Avril 2017
Epreuve de : MATHEMATIQUES				

Exercice 3 ($7\ pts$)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

1-Intégrer l'équation différentielle (E) $(1\ pt)$

2-Déterminer la solution particulière f vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ $(1\ pt)$

3-On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^{-x}\sin x$

Montrer que la fonction F définie sur R par : $F(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x}(\cos x + \sin x)$ est une primitive de la fonction f $(1\ pt)$

4-On considère l'intégrale $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx$.

a-Calculer I_0 $(0.5\ pt)$

b-Montrer que, $\forall$ n $\in N$, $I_n = \left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)(-e^{-\pi})^n$ sachant que $\cos n\pi = (-1)^n$ et $\sin n\pi = 0$ $(1\ pt)$

c-Montrer que, (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme I_0 $(1\ pt)$

5-Soit la somme $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + - - - - - - - - - - + I_n$

a-Exprimer la somme S_n en fonction de n $(1\ pt)$

b-Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n$ $(0.5\ pt)$

Exercice 4 ($3\ pts$)

Dans un poulailler contenant 4 Coqs et 5 Poules. On laisse la porte principale ouverte et les Poulets sortent tous les uns après les autres.

On suppose que tous les ordres sont possibles et équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle définie comme « le nombre de Coqs sortis avant la première Poule »

1-Déterminer les valeurs prises par X $(0.5\ pt)$

2-Déterminer la loi de probabilité de X $(1\ pt)$

3-Calculer l'espérance mathématique de X $(0.5\ pt)$

4-Calculer la variance de X $(0.5\ pt)$

5-Calculer l'écart- type de X $(0.5\ pt)$

0	1	2	3	4

sujet + corrigé

...DEPARTEMENTALE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET PROFESSIONNEL DE...

...BLANC ... SESSION DU 19 AVRIL 2016

Exercice N° 4 :

1) Les valeurs prises par X sont :

$\boxed{X = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$ 0,5

2) Loi de probabilité de X :

C'est une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{4}{9} \Rightarrow q = \frac{5}{9}$

$P(x=0) = C_4^0 \left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{625}{6561}$

$P(x=1) = C_4^1 \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{2000}{6561}$

$P(x=2) = C_4^2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{2400}{6561}$

$P(x=3) = C_4^3 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{1280}{6561}$

$P(x=4) = C_4^4 \left(\frac{4}{9}\right)^4 \left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{256}{6561}$

$\Rightarrow$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{625}{6561}$	$\frac{2000}{6561}$	$\frac{2400}{6561}$	$\frac{1280}{6561}$	$\frac{256}{6561}$

3) Espérance mathématique de X :

$E(X) = n \cdot p \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{16}{9}}$

4) Variance de X :

$V(X) = n \cdot p \cdot q \Rightarrow V(X) = 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$

$\Rightarrow V(X) = \frac{80}{81} \Rightarrow \boxed{V(X) \simeq 0,9877}$

5) Ecart-type de X :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{0,9877} \Rightarrow \boxed{\sigma(X) \simeq 0,98}$

8000 | 81
729 | 0,3877
710
648
0620
567
053

0,9877 | 0,98
098 | 09x9
81 | 188x8
1777
1504

199 8
9
1791 8

6

7

Sujet + Corrigé

DIRECTION DEPARTEMENTALE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET PROFESSIONNEL DE POINTE-NOIRE

BACCALAUREAT **BLANC**			
SERIE : **F1-F2-F3-F4**	DUREE : **4heures**	FEUILLE : **1/1**	SESSION DU **19 AVRIL 2016**
EPREUVE DE : **MATHEMATIQUES**			

EXERCICE N°1 (5pts)

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$

1-a-Montrez que : $I = \int_0^{\pi} \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$

b-A l'aide d'une intégration par parties, montrez que :

$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$

2-Montrez que : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$

3-Montrez que $I + J = \frac{3\pi}{4}$ et $I - J = 0$ en déduire les valeurs de I et J

EXERCICE N°2 (5pts)

On considère dans C l'équation (E) ; $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$

1-a-Montrez que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera

b-Résolvez dans C l'équation (E)

2-Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives -1, $-2+i$ et i

a-Calculez le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

b-Quelle est la nature du triangle ABC ?

c-Soit s la similitude de centre A qui transforme B en C. Donnez l'écriture complexe de s puis en déduire le rapport et l'angle de s

EXERCICE N°3 (7 points)

A-Soit g la fonction définie par $g(x) = x - 1 + \ln x$

1-Etudiez les variations de g (1 pt)

2-Calculez g(1) puis en déduire le signe de g(x) (1pt)

B-Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = \frac{x}{x-1+\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1-Déterminez l'ensemble de définition de f (0.5pt)

2-Etudiez la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ (0.5pt)

3-Etudiez les variations de f (1.5pt)

4-Résolvez dans R^+ l'équation $f(x) = 1$ (0.25pt)

5-Tracez la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm (1.25pt)

EXERCICE N°4 (3 points)

1-Intégrez l'équation différentielle (E) ; $y'' + 2y' + 5y = 0$ (1.5pt)

2-Déterminez la solution f de (E) sachant que sa courbe admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -x + 1$ (1.5pt)

BACCALAUREAT TECHNIQUE "BLANC"

Série: F1, F2, F3,F4	Durée:4 Heures	Coefficient:	Feuille: 1/1	Session: du 15 Avril 2014

Epreuve de: MATHEMATIQUES

...ercice n°1 : *(4pts)*

...pondre par vrai (V) ou faux (F). Aucune justification n'est demandée.

1- Si $Z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ alors $Z^{10} = 1$ V
2- La fonction f définie par $f(x) = ln|1 - lnx|$ a pour ensemble de définition $E = [0, e[\cup]e, +\infty[$.
3- La fonction $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{F}(x) = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{x}{2}$ est la primitive de la fonction f définie par $f(x) = xlnx$ sur $]0; +\infty[$
4- Si f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x)\ 1 + \frac{1}{x^2} + 5 + x$ alors la droite d'équation $y = x + 5$ est asymptote à la courbe représentative de f. (V)
5- La somme : $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{10}$ est égale à $2^{10} - 1$. (V)

...ercice n°2 : *(4pts)*

...donne les nombres complexes : $Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ et $Z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- Donner sous forme trigonométrique, les nombres complexes : Z_1; Z_2; $\frac{Z1}{Z2}$
2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o\ ;\ u\ ;\ v)$, on considère la similitude directe S de centre $\Omega(o\ ;\ 1)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2. Déterminer les affixes de $\mathcal{A}' = S(\mathcal{A})$ et $\mathcal{B}' = S(\mathcal{B})$.

...ercice n°3 : *(5pts)*

1- Intégrer l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 0\ (E)$ → $f(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
2- Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative admet au point $I(0\ ;1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 2$. (ok) → $f(x) = e^{-x}\cos 2x$
3- Soit $\mathcal{F}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{F}(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$
   a- Montrer que $\mathcal{F}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (ok)
   b- Expliciter $\mathcal{F}(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$
   c- En déduire l'intégrale $I = \int_0^{\pi} f(t)dt$. ⇒ $\boxed{I = \frac{1 - e^{-\pi}}{5}}$

...ercice n°4 : *(7pts)*

...t f_a la fonction définie par : $f_a(x) = \frac{e^x}{1+ae^x}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et on note (Ca) la courbe représentative de f_a dans un ...ère orthonormé $(o\ ;\ i\ ;\ j)$.

1- Etudier les variations de f_a suivants les valeurs de a (on distinguera les cas $a < 0$ et $a > 0$).
2- Tracer les courbes $(C1)$ et $(C\text{-}1)$ dans le même repère.
3- Déterminer les réels α et β tels que $f_a(x) = \alpha + \frac{\beta}{1+ae^x}$
4- En déduire l'aire de la partie du plan limitée par $(C1)$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Lycée Technique POATY Bernard

Direction des Etudes

Année Scolaire 2011 - 2012

BACCALAUREAT BLANC

Epreuve de Mathématiques

Série : F

Durée : 4 Heures

Exercice N° 1 :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et θ un argument de z.

On pose : $T(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1- Déterminer le module et un argument de z.

2- Soit $z_0 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a- Déterminer la forme algébrique de $T(z_0)$ et donner un argument de $T(z_0)$.

b- En déduire un argument de z_0, puis calculer son module.

c- Calculer les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{8}$ et $sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice N° 2

1- Linéariser Sin^4x

2- Calculer $f(t) = \int_0^t \left(4Sin^4x - \frac{3}{2}\right)dx$

3- Résoudre l'équation $f(t) = 0$

PROBLEME :

Soit f_m la fonction définie par : $f_m(x) = m + \frac{1-m^2}{e^x+m}$ où $m \in R - \{-1; 0; 1\}$. On désigne par (C_m) la courbe f_m dans un repère orthogonal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm).

1- Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par le point $I(0; 1)$.

2- Montrer que le point $I_m\left(\ln|m|; \frac{m^2+1}{2m}\right)$ est un centre de symétrie de (C_m).

3- Montrer que (C_m) et $\left(C_{\frac{1}{m}}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(o; \vec{\jmath})$.

4- Etudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.

5- Dresser le tableau de variation de f_2 puis tracer (C_2) dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6- a- Montrer que f_2 est une bijection de R sur un intervalle I que l'on précisera.

b- On note h la bijection réciproque de f_2. Dresser le tableau de h puis expliquer h(x).

c- Tracer la courbe (C_h) de h dans le même repère que (C_2).