GROUPE CAUCHY - SCHWARZ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
EFFORT-TRAVAIL-SUCCÈS
EXAMINATEUR : NZOUEKEU MBIKEU PATRICE
(PLEG-ING)
Email : pnzoueukeu@gmail.com

ANNÉE SCOLAIRE : 2024 – 2025
CLASSE : TERMINALE C
DURÉE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 7

L'épreuve comporte quatre exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : *[15 points]*

Exercice 1. ***(3 points)***

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8+n$ boules noires et 20 boules blanches. Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables.

— *S'il tire une boule rouge, il perd.*
— *S'il tire une boule noire, il gagne.*
— *S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité.*
— *S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.*

1. (a) *Démontrer que la probabilité pour ce joueur de gagner est $f(n)$ où f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.* *[0,5 point]*

   (b) *Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité.* *[0,5 point]*

   (c) *Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.* *[0,5 point]*

2. *Dans cette question, on suppose que $n = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 8 unités monétaires. Les nombres p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd il ne reçoit rien. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.*

   (a) *Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique $E(X)$.* *[0,5 point]*

   (b) *On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable c'est à dire l'espérance mathématique du gain algébrique est nulle.*

      i. *Montrer alors que $3p + q = 60$.* *[0,25 point]*

      ii. *Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.* *[0,5 point]*

   (c) *Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.* *[0,25 point]*

Exercice 2. ***(3,25 points)***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'ensemble (C_α) des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + 2\alpha xy + 4x - \alpha^2 = 0$. On considère le repère $R_\theta = (O; \vec{u}; \vec{v})$ obtenu par la rotation d'angle θ et de centre O. On note $(X; Y)$ les coordonnées de M dans le repère R_θ.

1. *Montrer que* $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$. *[0,5 point]*

2. (a) *Donner l'équation de (C_α) dans ce nouveau repère.* *[0,5 point]*

   (b) *Comment choisir $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour que le terme en XY de l'équation (C_α) dans ce repère soit nul ?* *[0,5 point]*

3. *On suppose pour la suite que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.*

   (a) *Vérifier que dans le nouveau repère (C_α) a pour équation $(1+\alpha)X^2 + (1-\alpha)Y^2 + 2X\sqrt{2} - 2Y\sqrt{2} - \alpha^2 = 0$.* *[0,5 pt]*

   (b) *Déterminer suivant les valeurs de α le type de (C_α).* *[0,5 point]*

   (c) *Dans le cas où (C_α) est une parabole, déterminer le paramètre, le foyer et la directrice.* *[0,25 point]*

   (d) *Déterminer pour quelles valeurs de α la conique (C_α) est un cercle, dont on donnera le centre et le rayon.* *[0,5point]*

Exercice 3. ***(3,75 points)***

1. *L'espace ε est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$, $D(0, 1, -1)$.*

   (a) *Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Peut-on dire des points A, B, C et D qu'ils sont coplanaires ?* *[0,5 point]*

   (b) *Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ contenant les points A, B et C.* *[0,25 point]*

   (c) *Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.* *[0,5 point]*

   (d) *Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan $(\mathscr{P})$.* *[0,25 point]*

2. *Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 2014 la nomenclature suivante, après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA. On considère la série statistique suivante où α et β sont deux nombres entiers naturels.*

Dépenses (x_i)	40	50	α	80	90	120	β	150	180
Chiffres d'affaires (y_i)	165	172	182	180	190	194	183	188	193

(a) i. *Sachant que la moyenne des x_i, $(\overline{X})$ est 100 et leur écart type $\sigma_x = \frac{20\sqrt{46}}{3}$, calculer α et β.* *[0,5 point]*

ii. *Construire le nuage de points (unité : 1 cm pour 100 dépenses en abscisse et 1 cm pour 100 chiffres d'affaires en ordonnée).* *[0,5 point]*

(b) *On suppose que $\alpha = 60$ et $\beta = 130$.*

i. *Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite (d) de régression de y en x.* *[0,5 point]*

ii. *Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique. Que peut-on en déduire ?* *[0,5 point]*

iii. *Quelle est en deux mois le chiffre d'affaires si la dépense bimensuelle est de 300 millions de francs CFA ?* *[0,25 point]*

Exercice 4. ***(5 points)***

$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(2x)}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.* *[0,75 point]*
2. (a) *Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.* *[0,25 point]*

   (b) *Vérifier que $2 < \alpha < 3$; puis que $\ln(2\alpha) = \alpha - 1$.* *[0,25 point]*
3. *Construis la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f.* *[0,5 point]*
4. *On pose $I(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)dx$. Montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - 1}{2}$.* *[0,5 point]*
5. *Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$ où g est la fonction définie sur $I = [2;3]$ par $g(x) = 1+\ln(2x)$.*

   (a) *Vérifie que $g(\alpha) = \alpha$; puis montre que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$ et $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.* *[0,75 point]*

   (b) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.* *[0,5 point]*

   (c) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.* *[0,5 point]*

   (d) *Déduire-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq (0,5)^n$ et que la suite (U_n) converge.* *[0,75 point]*

   (e) *Trouver le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.* *[0,25 point]*

Partie B : Évaluation des compétences : ***[4,5 points]***

Situation :

Monsieur Aliou est un entrepreneur établi dans la ville de Ngaoundéré. Il possède un atelier de fabrication des pavés dans sa concession au quartier MABANGA. Il veut aménager un espace d'exposition-vente de ces pavés en bordure de la grande route située à quelques kilomètres de sa concession. Un test est instauré à la sortie de la chaîne de production des pavés. Si le test est positif, le pavé est expédié pour la vente, sinon, il retourne dans l'atelier pour réparation, puis testé pour une seconde fois. Si le second test est positif, il est expédié pour la vente ; Sinon, il est détruit. 80% des matériaux sortis de la chaîne sont positifs, mais parmi ceux réparés, seulement 60% passent le second test avec succès. A la fin du mois de janvier 2025, Monsieur Aliou dispose d'un stock de 2100 pavés qui doivent subir des tests à la sortie de la chaîne de production dans son atelier. Chaque pavé testé bon sera vendu à 600 F. Pour aménager l'espace d'exposition-vente des pavés, Monsieur Aliou a négocié et obtenu un espace rectangulaire ayant 100 m de périmètre, situé en bordure de la route. Il veut choisir les dimensions de cet espace de sorte que :

- *sa superficie soit maximale ;*
- *si on augmente la longueur de 6 m et la largeur de 10 m, alors la superficie de l'espace initial double.*

Monsieur Aliou dispose entre 1280 et 1290 pavés à la fin du mois de février 2025 dans sa fabrique. Pour les transporter de l'atelier de fabrication pour le lieu d'exposition, il a le choix entre deux types de tricycles à moteur A et B. Le tricycle A transporte exactement 90 pavés par voyage et le tricycle B exactement 65 pavés par voyage. Lorsque A effectue un nombre entier de voyages, il reste 25 pavés, tandis que, lorsque B effectue un nombre entier de voyages, il reste 50 pavés au sol. Par soucis d'économie, les pavés restant sont conservés à la fabrique et emportés ultérieurement. Monsieur Aliou confie le transport des pavés au tricycle A et paye 1500 F par voyage effectué.

Tâches :

1. *Déterminer les dimensions de l'espace d'exposition-vente des pavés de Monsieur Aliou ?* *[1,5 points]*
2. *Déterminer le montant à prévoir par Monsieur Aliou pour le transport des pavés.* *[1,5 points]*
3. *Déterminer la recette réalisée par Monsieur Aliou après avoir écoulé tous ces pavés fabriqués au mois de janvier 2025.* *[1,5 points]*

Présentation : Lisibilité, absence de fautes, résultats bien encadrés ***[0,5 point]***

NZOUEKEU MBITKEU PATRICE PLEG MATH