BACCALAUREAT BLANC

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Série : D
Durée : 4 Heures
Coefficient : 4

Cette épreuve contient 3 pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 (2 points)

Dans le tableau ci – dessous, quatre (4) affirmations numérotées de 1 à 4 sont données.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie et de **Faux** si l'affirmation est fausse. Aucune justification n'est demandée. **Exemple : 5 - Vrai**

N°	Affirmations
1.	x et y sont deux nombres réels non nuls. $(0{,}7)^x < (0{,}7)^y$ équivaut à : $x < y$.
2.	Si f une fonction continue et strictement décroissante sur $]a;b[$ alors f réalise une bijection de $]a\,;b[$ vers $]\,f(a)\,;\,f(b)[$.
3.	Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de K, $\lvert f'(x)\rvert \leq$ M, alors pour tous a et b élément de K, on a : $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leq M\lvert a - b\rvert$.
4.	La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^4 - 3x + 5$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse zéro.
5	A et B sont deux évènements incompatibles d'une épreuve tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{12}$ alors $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$

EXERCICE 2 (2 points)

Dans le tableau ci – dessous, quatre affirmations incomplètes numérotées de 1 à 4 sont données. On propose trois réponses A, B, et C.
Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse permet de compléter une affirmation incomplète pour obtenir une affirmation juste.
Ecris sur ta feuille de copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à la réponse pour avoir l'affirmation juste. **Exemple : 5 – B**

<table>
<tr><th rowspan="2">N°</th><th rowspan="2">Affirmations incomplètes</th><th colspan="3">Réponses</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,6</td><td>$0{,}2 + m$</td><td>m</td></tr></table>$m \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
Le tableau ci-dessus, représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X si m est égal à...</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(1 - x) < 2$ est...</td><td>$]-\infty\,;\,1[$.</td><td>$]1 - e^2; 1[$.</td><td>$]-\infty\,;\,1 - e^2[$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto -x\cos x$ est la fonction ....</td><td>$-\cos x - x\sin x$.</td><td>$\cos x - x\sin x$.</td><td>$x\sin x$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$ est...</td><td>$\left\{1; \frac{\ln 3}{2}\right\}$.</td><td>$\left\{0; \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$.</td><td>$\left\{1; \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Si X suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{4}$ alors la variance V(X) est égale à...</td><td>0,25</td><td>0,9375</td><td>1,25</td></tr>
</table>

EXERCICE 3 (3 points)

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié du nombre de tablettes mises en vente. Les tablettes gagnantes portent des étiquettes indiquant le nombre de place de cinéma. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

G : « le client achète une tablette gagnante. »
U : « le client gagne exactement une place de cinéma. »
D : « le client gagne exactement deux places de cinéma. »

1. Etablis un arbre pondéré traduisant la situation de l'énoncé.
2. Montre la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client. Détermine la loi de probabilité de X.
4. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

a) Il ne gagne pas de place de cinéma à l'issue des deux jours. Justifie que la probabilité dans ce cas est 0,25.
b) Détermine la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma à l'issue des deux jours.
c) Montre que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

EXERCICE 4 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 2 cm

1) Résous l'équation (E'): $z \in \mathbb{C},\ z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$
2) On pose $z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$.
   a) Justifie que $P(-2i) = 0$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.
   c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation (E): $z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$.
3) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i\ ;\ -2+2i\ et\ 1+i$
   Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en C

EXERCICE 5 (5 points)

On considère les fonctions $f: x \to x + 1 + e^{-x}$ et $g: x \to ln\,(x + 1 + e^{-x})$.

On (Cg) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Justifie que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur$]-\infty\,;0[$.
b) Dresse son tableau de variation de f et déduis – en le signe de $f\,(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Justifie que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

2. a) Justifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
b) Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$. Interprète graphiquement ces résultats.

3) a) Justifie que $g(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$.
b) Démontre que la droite (D) : $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (Cg) en $-\infty$.
c) Etudie la position relative de (Cg) par rapport à la droite (D).

4) On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$
a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g\,'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$
b) Déduis-en le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

5. a) Calcule $g\,(-1)$.
b) Démontre que g réalise une bijection de $]-\infty; 0[$vers un intervalle K que l'on précisera.
c) On note g^{-1} la bijection réciproque de g. Démontre que g^{-1} est dérivable en 1 puis calcule $(g^{-1})\,'(1)$ sans expliciter g^{-1}
d) Trace la courbe (Cg).

6. On admet que : $\forall x \in [1\,;\,2]$, $\frac{e-1}{3e+1} \leq g'(x) \leq \frac{e^2-1}{2e+1}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g, démontre que : $\frac{e-1}{3e+1} \leq ln\left(\frac{3e^2+1}{e(2e+1)}\right) \leq \frac{e^2-1}{2e+1}$

<u>EXERCICE 6</u> (5 points)

Une pâtisserie produit et commercialise des glaces d'un même type très prisées par les consommateurs. Elle peut en produire entre 100 et 500 par jour. Cette production est vendue dans sa totalité. Lorsque x représente le nombre de centaines de glaces produites, on note $B(x)$, le bénéfice réalisé par cette pâtisserie pour la vente des x centaines de glaces. Le pâtissier veut réaliser un bénéfice maximal. Pour cela, il s'adresse à la Direction commerciale de sa pâtisserie qui lui fournit les informations suivantes pour répondre à ses préoccupations :

- Pour tout x de l'intervalle $[1; 5]$, on a : $B'(x) = -10x + 25 + \frac{25}{2x-1}$, où $B(x)$ est exprimé en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B.
- Pour 100 glaces vendues, son bénéfice est 20 000 francs.

À la recherche de personnes ressources pour l'aider à déterminer le nombre de glaces qu'il devra fabriquer par jour pour que son bénéfice soit maximal et la valeur de ce bénéfice, il s'adresse à toi.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du pâtissier.