

MATHÉMATIQUES

Série C

Toute calculatrice scientifique est autorisée

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3

Exercice 1 : (2 points)

Écris le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

- 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$. Si f est dérivable sur $]a; b[$ alors f est dérivable sur $[a; b]$.
- 2) Soit x et y de deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel non nul. On a : $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$
- 3) La fonction : $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On a : $\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$.

Exercice 2 : (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous quatre réponses sont proposées dont une seule permet d'obtenir une affirmation juste. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | Énoncés | Réponses | |
|----|--|----------|--|
| 1. | Si f est une fonction strictement décroissante et non minorée sur $]a; b[$, alors ... | A | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ < |
| | | B | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ > |
| | | C | $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ < |
| | | D | $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ > |
| 2. | Si z est le nombre complexe dont la forme trigonométrique est $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$, alors la forme algébrique de z^8 est égale à ... | A | $16i$ |
| | | B | $-16i$ |
| | | C | $16 - 16i$ |
| | | D | $16 + 16i$ |
| 3. | Le reste de la division euclidienne de 1999^3 par 7 est égale à ... | A | 0 |
| | | B | 1 |
| | | C | 2 |
| | | D | 3 |
| 4. | $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = \dots$ | A | $-\infty$ |
| | | B | 0 |
| | | C | $+\infty$ |
| | | D | 1 |

Exercice 3 : (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(D) et (D') sont deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 + m \\ y = 3 - 2m \\ z = 5 - 3m \end{cases}, (m \in \mathbb{R}).$$

- 1) Démontre que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A dont on précisera les coordonnées.
- 2) a) Démontre que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal aux droites (D) et (D').
b) Justifie qu'une équation cartésienne du plan (P) défini par (D) et (D') est $5x + 4y - z - 22 = 0$.
- 3) Soit le point $E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) Justifie que E n'appartient pas à (P).
b) Détermine la distance du point E au plan (P).

Exercice 4 : (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) unité graphique 1cm.

- 1) Résous dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$.
- 2) Soit $A(-2i\sqrt{3} + 2)$; $B(2 + 2i\sqrt{3})$ et $C(-2 + 2i\sqrt{3})$ trois points du plan.
a) Vérifie que le point B appartient au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 4.
b) Place les points A, B et C. (Tu admettras que les points A et C appartiennent à (\mathcal{C})).
- 3) On note G le barycentre des points pondérés (A; 2), (B; -1) et (C; 1)
a) Calcule l'affixe z_G du point G puis construis G.
b) On note (Γ) l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 32$.
Justifie que O appartient à (Γ).
c) Déduis des questions précédentes l'ensemble (Γ) et construis (Γ).

Exercice 5 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$. Unité graphique : 2 cm.

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (x - 1)e^x + x^2$. On admet que g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

- 1) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(O ; I ; J)$.

- 2) a) Démontre que pour tout nombre réel positif x : $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$
b) Déduis – en que l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- 3) Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ puis donne une interprétation graphique du résultat.
- 4) a) On admet que f est dérivable sur $[0; +\infty[$. Justifie que $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2}$.
b) Déduis – en les sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.
- 5) On note $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Démontre que : $\forall x \in I, f(x) \in f(I)$.

6) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n > 1 \end{cases}$$

a) Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I$.

b) On admet que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, justifie que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

c) Déduis en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donne la limite de (u_n) .

Exercice 6 (5 points)

Dans le but de redynamiser les clubs mathématiques de la région du GOH, un concours de mathématiques est organisé par les unités pédagogiques de mathématiques (UP-MATHS). Ce concours est doté du prix du président du conseil régional du GOH d'une valeur de un million de francs CFA.

Le concours consiste à réaliser dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, la configuration du plan dont une équation cartésienne est : $x^2 + 4y|y| - 16y - 20 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le vainqueur du prix sera celui qui réalisera avec exactitude cette figure, qui servira de logo pour les unités pédagogiques de mathématiques de la région.

Etant le représentant de ton établissement à ce concours, propose une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques.