

# MATHÉMATIQUES

## Série D

*Toute calculatrice scientifique est autorisée*

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3*

### Exercice 1 (2points)

Ecris le numéro de chacune des affirmations suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

1) Soit  $h$  une bijection de l'intervalle  $] -2; 5[$  sur l'intervalle  $] -3; 6[$  et  $h^{-1}$  sa bijection réciproque.

Si  $h'(h^{-1}(2)) = 5$  alors  $(h^{-1})'(2) = \frac{-1}{5}$

2) Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  ;  $(C)$  sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$  et  $x_0$  un élément de  $I$ . Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe alors le point d'abscisse  $x_0$  de  $(C)$  est un point d'inflexion de  $(C)$ .

3) Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  tel que  $g(a) \times g(b) < 0$  alors l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]a; b[$ .

4) L'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est  $np(1 - p)$

### Exercice 2 (2points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous quatre réponses sont proposées dont une seule permet d'obtenir une affirmation juste. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses			
		A	B	C	D
1.	La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$ est...	$3 e^{i \frac{\pi}{5}}$	$-3 e^{i \frac{\pi}{5}}$	$3 e^{-i \frac{\pi}{5}}$	$3 e^{-i \frac{4\pi}{5}}$
2.	L'ensemble de solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $\ln(x + 5) = 3 + \ln x$ est ..	$\left\{ \frac{5}{e^3 - 1} \right\}$	$\left\{ \frac{1}{e^3 - 1} \right\}$	$\left\{ \frac{1}{e^3} \right\}$	$\left\{ \frac{5}{e^3} \right\}$
3.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,3)^x = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	0	0,3
4.	Si $f$ est une fonction continue, strictement décroissante et non minorée sur un intervalle ouvert $]a; b[$ alors	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty$

**Exercice 3****(2,5 points)**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x + e^{-x} - 2}{(e^x - 1)^2}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) On admet que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
  - a- Justifie que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + e^{-x}$
  - b- Dédus-en les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3) On admet que la fonction  $x \mapsto \ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1} - e^{-x} + 2$  est une primitive sur  $]0; +\infty[$  de  $f$ .  
Détermine la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui prend la valeur 0 en  $\ln 2$ .

**Exercice 4****(3,5 points)**

On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = z^3 + (6 + 2i)z^2 + (16 + 4i)z - 16i + 32$ .

- 1) a- Démontre que  $P(z) = (z - 2i)[z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i]$ .
  - b- Justifie que  $2 - 4i$  est une racine carrée de  $-12 - 16i$
  - c) Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation : (E)  $z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i = 0$
  - d) En utilisant les questions 1)a et 1)c résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
A, B et C sont les points du plan complexe d'affixes respectives :  $z_A = -4$  ;  $z_B = 2i$  et  $z_C = -2 - 4i$ .
  - a- On désigne par  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|i\sqrt{5}z + 4i\sqrt{5}| = 10$ .  
Justifie que :  $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z + 4| = 2\sqrt{5}$
  - b) Détermine l'ensemble  $(\Gamma)$ .
  - c) Justifie que l'ensemble  $(\Sigma)$  des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie  $|z + 4| = |z - 2i|$  est la droite d'équation  $y = -2x - 3$
- 3) On considère la fonction  $k$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $k(x) = -2x - 3 + \ln x$  et de représentation graphique (T). Etudie la position relative de  $(\Sigma)$  et de (T).

**Exercice 5****(5points)**

Soit la fonction  $h$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $h(x) = -2 + 2x^2 + 2\ln x$ .

On donne  $h(1) = 0$ .

- 1) Justifie que :  $\begin{cases} \forall x \in ]0; 1[, h(x) < 0 \\ \forall x \in ]1; +\infty[ h(x) > 0 \end{cases}$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ .

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  et (C) est la courbe représentative de  $f$

- 2) a- Justifie que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
  - b- Détermine la limite de  $f$  en  $+\infty$
- 3) On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .  
Justifie que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{h(x)}{2x^2}$
- 4) a- Justifie que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 1]$  et strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ .
  - b- Dresse le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - c- Dédus-en que la fonction  $f$  est négative sur  $]0; +\infty[$ .

5) Justifie que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 1 - x$  est une asymptote oblique à (C) en  $+\infty$ .

6) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ .

Justifie que  $g$  réalise une bijection de  $]1 ; +\infty[$  vers un intervalle  $K$  que tu préciseras.

7) Construis (C) et ( $\Delta$ ) dans le même repère.

### **Exercice 6** ( 5 points )

A l'occasion de la journée nationale « consommons Bio », une équipe de contrôle-qualité du ministère de l'industrie procède à un contrôle dans une entreprise de fabrication Bio d'huile végétale.

L'huile végétale fabriquée par cette entreprise et mise dans des bouteilles d'un litre, provient de deux unités industrielles : unité A et unité B.

\* 40% des bouteilles d'huile végétale de l'entreprise proviennent de l'unité A.

\* 96,5 % des bouteilles d'huile végétale produite par l'unité A ne contiennent pas de trace de pesticides.

\* 1% des bouteilles d'huile végétale produite par l'unité B contient des traces de pesticides.

Le contrôleur du ministère contrôle au hasard un certain nombre de bouteilles. Le stock de bouteilles est suffisamment important qu'on peut modéliser cette situation par un tirage successif avec remise.

A l'issue du contrôle, si la probabilité qu'au moins une bouteille d'huile présente des traces de pesticides est supérieure à 0,999, l'entreprise sera sanctionnée.

Un élève de première, fils du chargé de la production de l'entreprise, ayant ces informations désire connaître le nombre minimal de bouteilles à contrôler pour que l'entreprise soit sanctionnée.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, aide l'élève à déterminer le nombre minimal de bouteilles à contrôler pour que l'entreprise soit sanctionnée.