MATHÉMATIQUES

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Toute calculatrice scientifique est autorisée
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré

EXERCICE 1

Écris le numéro de chacune des propositions ci-dessous, suivi de V si la proposition est vraie ou de F si elle est fausse.

1. Dans l'espace muni d'un repère (O, I, J, K), les plans (P_m) et (Q_m), $m \in \mathbb{R}^*$, d'équations respectives $z = my$ et $z = \frac{-1}{m}y$ sont perpendiculaires.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2a}$, $a \in \mathbb{R}^*$, est une parabole de directrice d'équation : $y = \frac{-a}{2}$.
3. Dans l'espace, muni du repère (O, I, J, K), le point K est un barycentre des points O, I et J.
4. Si une fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est continue et strictement croissante telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, alors l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = k + 1$, admet une unique solution.

EXERCICE 2

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous, suivi de l'une des lettres A, B, C et D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

1. Dans l'espace muni du repère (O, I, J, K), les plans d'équations respectives $-x + y - z - 2 = 0$ et $5x - 5y + 5z + 8 = 0\ldots$

   A) se coupent suivant la droite (OI). B) sont parallèles.

   C) se coupent suivant la droite (JK). D) sont perpendiculaires.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, si $PQRS$ est un parallélogramme tel que le triangle PQR est équilatéral alors l'ensemble des points M du plan tels que : $MP^2 - MQ^2 + MR^2 = 0$ est…

   A) le cercle de centre S et passant par Q. B) le cercle de centre S et passant par P.

   C) le cercle de centre Q et passant par P. D) le cercle de centre Q et passant par S.

3. $\lim_{x \to -\infty} |x|^x$ vaut…

A) 0 B) 1 C) e D) $+\infty$

4. Si a un nombre réel tel que : $a > 0$ *et* $g_n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la bijection de $[-a\,;\,+\infty[$ dans $[-a\,;\,+\infty[$ définie par : $g_n(x) = (x + a)^n - a$ alors la bijection réciproque g_n^{-1} de g_n est définie sur $[-a\,;\,+\infty[$ par : …

A) $-\sqrt[n]{x+a} - a$ B) $\sqrt[n]{x+a} + a$ C) $\sqrt[n]{x+a} - a$ D) $-\sqrt[n]{x+a} + a$

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité $1cm$.
On note $(E_m), m \in \mathbb{R}^*$, l'ellipse de centre $K_m(0\,;\,5m)$, dont un sommet est le point O et un foyer le point $F_m(0, m)$.

1. a) Détermine les coordonnées des autres sommets de (E_m).

   b) Construis (E_1).

2. a) Calcule l'excentricité de (E_m).

   b) Détermine une équation de la directrice (D_m), de (E_m), associée au foyer (F_m).

3. Détermine l'équation réduite de (E_m).

EXERCICE 4

On considère la fonction f de $[0\,;\,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+e^x(\ln x)^2}, si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,1]$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,1]$ telle que : $g(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, g est dérivable sur $]0\,;\,1]$.

   a) Vérifie que : $\forall x \in]0\,;\,1], g'(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

   b) Étudie le sens de variation de g.

   c) Justifie que : $\forall x \in]0\,;\,1], g(x) > 0$.

2. **a)** Étudie la continuité de f en 0.

   b) Étudie la dérivabilité de f en 0.

3. a) Vérifie que : $\forall x \in]0\ ;\ 1], f'(x) = \frac{-g(x)e^x \ln x}{(1+e^x(\ln x)^2)^2}$.

   b) Vérifie que la fonction f est strictement croissante.

   c) Démontre que : $f(]0\ ;\ 1[) =]0\ ;\ 1[$.

4. On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = a, (0 < a < 1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

   On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, Un \in]0\ ;\ 1[$ et $\forall x \in]0\ ;\ 1[, f(x) > x$.

   a) Démontre par récurrence que la suite U est strictement croissante.

   b) Justifie que la suite U est convergente.

   c) Détermine la limite de la suite U.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm.

1. On considère les points A_n, $n \in \mathbb{N}$, d'affixe z_n tels que : $\begin{cases} z_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n \end{cases}$.

   a) Pour tout entier naturel n, calcule le module de z_{n+1} en fonction de n.

   b) Pour tout entier naturel n, détermine un argument de z_n en fonction de n.

2. a) Détermine la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{OA_{n+1}}})$.

   b) Vérifie que : $A_{n+1}A_n{}^2 + OA_{n+1}{}^2 = OA_n{}^2$.

3. On note $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées de A_n.

   a) Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ en fonction de x_n et y_n.

   b) Calcule le produit scalaire : $\overrightarrow{OA_{n+1}} \cdot \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

4. On note S_n, l'aire du triangle OA_nA_{n+1}.

   a) Vérifie que : $A_{n+1}A_{n+2} = kA_nA_{n+1}$, $\left(k = \left|\frac{1-i}{2}\right|\right)$.

   b) Vérifie que : $S_{n+1} = k^2 S_n$.

5. a) Place successivement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

   b) Calcule l'aire, S, de polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$.

EXERCICE 6

Le président d'une coopérative agricole a acheté un logiciel de gestion et de digitalisation de la coopérative. Les paysans ont installé l'application mobile du logiciel et attendent d'être payés par mobile money afin de subvenir aux frais de scolarité de leurs enfants. Mais, le président a égaré l'enveloppe contenant le code d'installation du logiciel.

Néanmoins, il dispose d'une deuxième enveloppe qui donne le code d'installation crypté : $WTGMV$ et des indications suivantes sur la méthode utilisée pour le codage :

- Chaque lettre, de l'alphabet français, est assimilée à un entier égal à son rang diminué de 1 ;
- À la lettre de l'entier n, on associe la lettre assimilée au reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26 (a *et* b *sont des entiers naturels compris entre 11 et 26*) ;
- Les lettres D et X sont respectivement codées par K et C.

Le président veut décoder le message afin de payer les planteurs et te sollicite.

À l'aide d'une production argumentée, décode le message.