

BAC BLANC 2026 ABOISSO SERIE D

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 1 cm).

Soit P le polynôme défini sur \mathbb{C} par : $P(z) = z^3 - (2 + 5i)z^2 + (4i - 9)z - 6 + 9i$.

- Justifie que $P(z) = (z + 1)(z^2 - (3 + 5i)z - 6 + 9i)$.
- Montre que les racines carrées de $8 - 6i$ sont : $3 - i$ et $-3 + i$.
 - Justifie le discriminant de l'équation $z^2 - (3 + 5i)z - 6 + 9i = 0$ est $8 - 6i$.
 - Déduis la résolution dans \mathbb{C} de l'équation : $P(z) = 0$.
- Soit les points A , B et C d'affixes respectives -1 ; $3+2i$ et $3i$.
Place ces points dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})
 - Justifie que $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$.
 - Déduis-en la nature du triangle ABC .
- Soit D le point du plan tel que $\overline{CB} = \overline{AD}$.
 - Calcule l'affixe de D .
 - Justifie que le quadrilatère $ACBD$ est un carré.

1. Factorisation de $P(z)$

On veut vérifier que

$$P(z) = z^3 - (2 + 5i)z^2 + (4i - 9)z - 6 + 9i$$

admet $z = -1$ comme racine.

Calcul :

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - (2 + 5i)(1) + (4i - 9)(-1) - 6 + 9i \\ &= -1 - (2 + 5i) - 4i + 9 - 6 + 9i = 0 \end{aligned}$$

Donc $z + 1$ est facteur.

On obtient :

$$P(z) = (z + 1)(z^2 - (3 + 5i)z - 6 + 9i)$$

2. Résolution de $P(z) = 0$

a) Racines carrées de $8 - 6i$

On cherche $z = a + bi$ tel que :

$$z^2 = 8 - 6i$$

On trouve :

$$z = 3 - i \quad \text{et} \quad z = -3 + i$$

b) Discriminant

Pour :

$$z^2 - (3 + 5i)z - 6 + 9i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ici :

$$\Delta = (3 + 5i)^2 - 4(-6 + 9i)$$

Calcul :

$$(3 + 5i)^2 = 9 + 30i + 25i^2 = 9 + 30i - 25 = -16 + 30i$$

$$\Delta = -16 + 30i + 24 - 36i = 8 - 6i$$

c) Solutions

$$z = \frac{(3 + 5i) \pm \sqrt{8 - 6i}}{2}$$

Avec $\sqrt{8 - 6i} = 3 - i$:

- $z_1 = \frac{(3+5i)+(3-i)}{2} = \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i$
- $z_2 = \frac{(3+5i)-(3-i)}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

Donc :

$$z = -1, z = 3 + 2i, z = 3i$$

3. Géométrie complexe

Affixes :

- $A(-1)$
- $B(3 + 2i)$
- $C(3i)$

b) Calcul du quotient

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(3 + 2i) - 3i}{-1 - 3i} = \frac{3 - i}{-1 - 3i}$$

On simplifie \rightarrow résultat :

$$i$$

c) Nature du triangle

Le quotient vaut $i \Rightarrow$ rotation de 90°

Donc :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en C

4. Point D

a) Calcul de z_D

Condition :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$$

Donc :

$$z_D = z_A + (z_B - z_C)$$

$$z_D = -1 + (3 + 2i - 3i) = -1 + 3 - i = 2 - i$$

$$\boxed{z_D = 2 - i}$$

b) Nature du quadrilatère

On a :

- $AC \perp CB$
- longueurs égales
- parallélisme respecté

Donc :

$\boxed{\text{ACBD est un carré}}$

- On considère dans \mathbb{C} le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (6 + 2i)z^2 + (16 + 4i)z - 16i + 32$.
- 1) a- Démontre que $P(z) = (z - 2i)[z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i]$.
 b- Justifie que $2 - 4i$ est une racine carrée de $-12 - 16i$
 c) Résous dans \mathbb{C} l'équation : (E) $z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i = 0$
 d) En utilisant les questions 1)a et 1)c résous dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
 - 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 A, B et C sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = -4$; $z_B = 2i$ et $z_C = -2 - 4i$.
 a- On désigne par (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|i\sqrt{5}z + 4i\sqrt{5}| = 10$.
 Justifie que : $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z + 4| = 2\sqrt{5}$
 b) Détermine l'ensemble (Γ) .
 c) Justifie que l'ensemble (Σ) des points M dont l'affixe z vérifie $|z + 4| = |z - 2i|$ est la droite d'équation $y = -2x - 3$
 - 3) On considère la fonction k définie sur $]0; +\infty[$ par : $k(x) = -2x - 3 + \ln x$ et de représentation graphique (T) . Etudie la position relative de (Σ) et de (T) .

1. Étude du polynôme

$$P(z) = z^3 + (6 + 2i)z^2 + (16 + 4i)z - 16i + 32$$

1.a) Factorisation

On vérifie que $z = 2i$ est racine :

$$P(2i) = (2i)^3 + (6 + 2i)(2i)^2 + (16 + 4i)(2i) - 16i + 32$$

Après calcul $\Rightarrow P(2i) = 0$

Donc :

$$P(z) = (z - 2i)[z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i]$$

1.b) Racine carrée

On vérifie :

$$(2 - 4i)^2 = 4 - 16i + 16i^2 = 4 - 16i - 16 = -12 - 16i$$

Donc :

$$\boxed{2 - 4i \text{ est une racine carrée de } -12 - 16i}$$

1.c) Résolution de (E)

$$z^2 + (6 + 4i)z + 8 + 16i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (6 + 4i)^2 - 4(8 + 16i)$$

$$(6 + 4i)^2 = 36 + 48i + 16i^2 = 20 + 48i$$

$$\Delta = 20 + 48i - 32 - 64i = -12 - 16i$$

Donc :

$$\sqrt{\Delta} = 2 - 4i$$

Solutions :

$$z = \frac{-(6 + 4i) \pm (2 - 4i)}{2}$$

- $z_1 = \frac{-6-4i+2-4i}{2} = \frac{-4-8i}{2} = -2 - 4i$
- $z_2 = \frac{-6-4i-2+4i}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$$z = -2 - 4i \quad \text{ou} \quad z = -4$$

1.d) Solutions de $P(z) = 0$

$$z = 2i, -2 - 4i, -4$$

2. Géométrie complexe

Affixes :

- $A(-4)$
- $B(2i)$
- $C(-2 - 4i)$

2.a) Ensemble (Γ)

On a :

$$|i\sqrt{5}z + 4i\sqrt{5}| = 10$$

Factorisation :

$$|i\sqrt{5}(z + 4)| = 10$$

$$\sqrt{5}|z + 4| = 10$$

$$\boxed{|z + 4| = 2\sqrt{5}}$$

2.b) Nature de (Γ)

$$|z + 4| = 2\sqrt{5}$$

\Rightarrow cercle de centre $A(-4)$ et de rayon $2\sqrt{5}$

$$\boxed{(\Gamma) \text{ est un cercle}}$$

2.c) Ensemble (Σ)

$$|z + 4| = |z - 2i|$$

\Rightarrow points équidistants de A et B

\Rightarrow médiatrice de $[AB]$

Après calcul :

$$\boxed{y = -2x - 3}$$

3. Étude de la fonction

$$k(x) = -2x - 3 + \ln x \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

Dérivée

$$k'(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

$$k'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Variations

- croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$
- décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

Position relative

Comparer avec la droite $(\Sigma) : y = -2x - 3$

$$k(x) - (-2x - 3) = \ln x$$

- si $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow k(x)$ au-dessus
- si $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow k(x)$ en dessous
- si $x = 1 \Rightarrow$ intersection

Point d'intersection :

$$(1, -5)$$

Conclusion finale

- Racines : $2i, -2 - 4i, -4$
- (Γ) : cercle de centre $A(-4)$, rayon $2\sqrt{5}$
- (Σ) : droite $y = -2x - 3$
- (T) coupe (Σ) en $(1, -5)$
- Position :
 - au-dessus si $x > 1$
 - en dessous si $0 < x < 1$