

**MATHEMATIQUES**

**SERIE D**

*Cette épreuve comporte trois (03) page numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3  
Toute calculatrice scientifique est autorisée*

**Exercice1**

Pour chacune des proposition suivantes, dis si elle est vraie (V) ou fausse (F) .

**Exemple : 5 – V.**

1. S'il existe un nombre réel  $l$ , une fonction  $g$  et un intervalle  $]a; +\infty[$  tels que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, |f(x) + l| \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

2. L'équation  $x^3 + x - 7 = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une seule solution.

3. Si  $f$  est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle  $[a; +\infty[$ , alors, on a :  $f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ .

4. La fonction  $h$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $h(x) = \frac{8-2x}{\sqrt{x-2}}$  admet un prolongement par continuité en 4.

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 9x - 2} = +\infty$ .

**Exercice2**

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse. **Exemple : 5 – c.**

	Enoncé	a	b	c
1.	Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ . On a :	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$f'(x) = \frac{-x}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}$	$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$
2.	Soit $g$ une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $g^{-1}$ sa bijection réciproque. Si $g(-2) = 3$ et $g'(-2) = \frac{1}{4}$ , alors $(g^{-1})'(3)$ est égale à	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	4
3.	$F$ et $f$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $K$ . Si $f$ est une primitive de $F$ sur $K$ , alors on a :	$F'(x) = f(x)$	$f'(x) = F(x)$	$F'(x) = f'(x)$ .

4.	Une primitive $F$ sur $]1; +\infty[$ de la fonction $f$ telle que : $f(x) = \ln x$ est définie par :	$F(x) = x \ln x - x$	$F(x) = x \ln x + x$	$F(x) = \ln x - 1$
5.	$u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $K$ . Une primitive sur $K$ de $u'u^r$ (avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ ) est :	$u^{r+1}$	$ru^{r-1}$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$

### Exercice 3

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = x|x^2 - 1|$ .

1. Ecris  $h$  sans symbole de valeur absolue.
2. Etudie la dérivabilité de  $h$  en  $-1$ .
3. On considère  $g$  la restriction de  $h$  à  $[0; 1]$ .
  - a. Justifie que :  $\forall t \in [0; 1], -2 \leq g'(t) \leq 1$ .
  - b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que :  $\forall x \in [0; 1], -2x \leq g(x) \leq x$ .

### Exercice 4

Sur un dé cubique non pipé l'une des faces est numérotée 1,  $n$  faces ( $0 \leq n \leq 5$ ) sont numérotées 2 et les faces restantes sont numérotées 3.

Les faces d'un second dé cubique non pipé sont numérotées 1; 2 ; 2; 3; 4 et 4.

Les deux dés sont lancés simultanément .

Soit  $X$  la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des points marqués sur les faces supérieures.

1. Démontre que :  $p(X = 6) = \frac{n+5}{36}$ .
2. On suppose que  $n = 2$ .
  - b. Détermine la loi de probabilité de  $X$ .
  - c. Justifie que l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  est égale à 5.
  - d. Calcule l'écart-type de  $X$ .

### Exercice 5

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x-1-x \ln x}{x}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  d'unité graphique  $2cm$ .

1. Calcule la limite de  $f$  en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Calcule les limites en  $+\infty$  de  $f(x)$  et de  $\frac{f(x)}{x}$ .  
b. Interprète graphiquement les résultats.
3. a. Démontre que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$ .  
b. Détermine le sens de variation de  $f$  et dresse son tableau de variation.
4. a. Démontre que la courbe  $(C)$  coupe l'axe des abscisses en deux points  $A$  et  $B$  d'abscisses respectives  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $\alpha < \beta$ .

- b. Justifie que :  $6,3 < \beta < 6,4$ .
5. On prendra :  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = 6,35$ .  
Trace  $(C)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
6. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]0; 1]$ .
- a. Démontre que  $g$  est une bijection de  $]0; 1]$  sur intervalle  $K$  que tu détermineras.
- b. Soit  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ . Dresse le tableau de variation de  $g^{-1}$ .

### **Exercice 6**

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99. Il te sollicite pour trouver ce nombre.

Utilise tes connaissances de terminale D pour répondre à la préoccupation du commandant.