BACCALAURÉAT BLANC — **Coefficient : 5**

SESSION : FÉVRIER 2023 — **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

Série C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Le candidat utilisera deux (02) feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 *(2 points)*

Ecris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou **FAUX** si celle-ci est fausse.

N°	Affirmations
1	Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1;0;1)$ et $B(0;1;1)$ est donnée par : $x=1-t$; $y=t$ et $z=1$
2	Si a un nombre réel tel que $0<a<1$, alors la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3	La fonction $x\mapsto \ln(\frac{e^x+1}{2})$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ qui s'annule en 0.
4	L'ensemble solution de l'équation $x\in\mathbb{R}$, $e^x=1-\sqrt{2}$ est l'ensemble vide.

Exercice 2 *(2 points)*

Pour chaque énoncé du tableau, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste.
Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncés		Réponses
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur [a ;b] et en plus $f(a)\times f(b)<0$ alors…	A	f ne s'annule pas entre a et b
		B	f s'annule une seule fois entre a et b
		C	f s'annule au moins une fois entre a et b
2	Un argument du nombre complexe $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ est	A	$-\frac{\pi}{5}$
		B	$\frac{\pi}{5}$
		C	$\frac{6\pi}{5}$
3	f est une fonction telle que : $\forall x\in]0;+\infty[, \frac{5}{x}\leq -3+f(x)\leq \frac{5x+3}{x}-5$. La limite de f en $+\infty$ est égale à	A	0
		B	-3
		C	3
4	Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère le plan (P) d'équation cartésienne : $2x+y-z+7=0$ Un plan perpendiculaire à (P) a pour vecteur normal	A	$\vec{v}(\frac{-1}{2};2;1)$
		B	$\vec{u}(2;1;-1)$
		C	$\vec{w}(\frac{1}{2};2;-1)$

Exercice 3 *(3 points)*

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ $BC = 4$ et $AC = 5$ .On désigne par I le milieu du segment [BC]

1. On admet que pour tout point M du plan $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

   Justifie que $AI = \sqrt{33}$.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan vérifiant $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$.
   a) Vérifie que I appartient à (Δ).
   b) Détermine et construis (Δ).
3. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A,-1), (B,1)$ et $(C,1)$.
   a) Démontre que le quadrilatère $ABGC$ est un parallélogramme.
   b) Détermine et construis (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$.

Exercice 4 *(3 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité 2cm, on considère l'application f du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 - (3-i)z + 4 - 3i$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x ; y ; x'; et y' sont des nombres réels.

1. Détermine les points M d'affixe z tels que $M' = O$.
2. Exprime x' et y' en fonction de x et y .
3. a) Démontre que lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (C) d'équation : $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.

   b) Justifie que : $M(x; y) \in (C)$ si et seulement si $\frac{-(x-\frac{3}{2})^2}{2} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{2} = 1$.

   c) Détermine la nature de (C) et précise son centre I .

   d) Détermine l'excentricité, un sommet, un foyer et une asymptote de (C) dans le repère $(I;\vec{u};\vec{v})$.
4. Trace la courbe (C).

Exercice 5 *(5 points)*

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;I;J)$ d'unité 2cm.

1. a) Démontre que f est continue en 0 .

   b) Etudie la dérivabilité de f en 0 .
2. a) Démontre que pour tout t élément de $]0; 1[$, $f(\frac{1}{t} - 1) = \frac{(1-t)^2}{t} \times \frac{\ln(1-t)}{t}$.

   b) On admet que : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$. A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{1+x}$, démontre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$. (1)

   a) Démontre que pour tout nombre réel strictement positif $x : f(x) + x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \ln(1-t) + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}$ avec $t = \frac{1}{1+x}$.

   b) En utilisant la relation (1), démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

4. On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$.
   a) Etudie le sens de variation de g.
   b) On admet que : $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.
      Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) < 0$.
5. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = xg(x)$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f.
   c) Dresse le tableau des variations de f.
6. Construis la courbe (C).

Exercice 6 *(5 points)*

Pour faire fructifier ses affaires, Konaté, un jeune de ta commune décide d'ouvrir le coffre-fort contenant des objets précieux que lui a légués son défunt père anciennement professeur de Mathématiques.
Après avoir ouvert le coffret contenant le coffre-fort, il découvre une enveloppe contenant une feuille sur laquelle sont données des indications sur le code de déverrouillage du coffre-fort.
Sur la feuille, on pouvait lire ceci :

- Le code de déverrouillage est un nombre entier naturel de quatre chiffres, multiple de 99.
- Le chiffre des milliers est le chiffre des unités du nombre 3^{2023}
- Le chiffre des centaines est la plus petite solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(E): 4x + 5 \equiv 0\,[7]$

Ne sachant comment exploiter ces informations, il sollicite son neveu Daouda en classe de Terminale C dans un Lycée de ta commune qui à son tour te soumet le problème.
A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances de Terminale C, donne une réponse à Konaté.