

SÉRIE C

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3 et 3 sur 3.
Chaque candidat utilisera une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de chaque **affirmation** consignée dans le tableau ci-dessous, suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1.	Soit $(A, 2)$, $(B, -4)$ et $(C, 2)$ trois points pondérés du plan et k un nombre réel. La ligne de niveau k de l'application : $M \mapsto 2MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ est un cercle.
2.	Le plan muni du repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. La directrice de la parabole d'équation réduite : $x^2 = 2ay$ est la droite d'équation : $y = -\frac{a}{2}$.
3.	Soit v une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La fonction dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction v^π est : $\pi v' v^{\pi-1}$.
4.	Une isométrie du plan qui laisse invariants deux points E et F distincts et qui n'est pas l'application identique, est la symétrie orthogonale d'axe (EF) .

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des **énoncés incomplets** du tableau ci-dessous, trois **réponses A, B et C** sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre de la réponse qui donne l'énoncé juste.

N°	Énoncés incomplets	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On donne les représentations paramétriques des droites $(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $(\Delta_2) : \begin{cases} x = -k \\ y = k \\ z = k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont ...	perpendiculaires	sécantes	parallèles
2.	Soit n un nombre entier naturel non nul. Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction : $x \mapsto \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^{2n}}}$ est la fonction : ...	$x \mapsto \frac{1}{n} \sqrt{1+x^{2n}}$	$x \mapsto \sqrt{1+x^{2n}}$	$x \mapsto \frac{1}{2n} \sqrt{1+x^{2n}}$

3.	On admet que : $\forall x \in [0 ; 1] , \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. La fonction H définie sur $[0 ; 1]$ par : $H(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est telle que...	Réponse A	$x - 1 \leq H(x) \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
		Réponse B	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leq H(x) \leq x - 1$
		Réponse C	$\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \leq H(x) \leq 1 - x$
4.	Soit (Δ) une droite et \vec{u} un vecteur non nul. Si \vec{u} n'est pas normal à (Δ) , alors la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur \vec{u} est une...	Réponse A	symétrie orthogonale
		Réponse B	symétrie glissée
		Réponse C	rotation

EXERCICE 3 (3 points)

- On rappelle que l'une des racines carrées du nombre complexe $-7 + 24i$ est : $3 + 4i$.
Résous dans \mathbb{C} , l'équation $(E) : iz^2 + z - 6 - 2i = 0$.
- On donne les nombres complexes $a = 2 - i ; b = -2 + 2i$ et $c = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - Justifie que : $b = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$.
 - Déduis une valeur de l'entier n pour que b^n soit un nombre imaginaire pur.
- Détermine la forme exponentielle de c .
 - Justifie que ac est une racine cubique du nombre complexe $2 - 11i$.
 - Détermine les trois racines cubiques de $2 - 11i$.

EXERCICE 4 (2,5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J) et l'unité graphique est 2 cm.

- On considère la courbe (Γ) d'équation : $3x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$.
 - Démontre que l'équation réduite de (Γ) est : $-\frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$.
 - Déduis la nature de (Γ) puis précise les coordonnées de son centre qu'on notera A .
 - Donne les coordonnées des sommets S et S' , des foyers F et F' et des asymptotes (Δ) et (Δ') de (Γ) dans le repère (O, I, J) .
- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous la forme algébrique et différent de 1.
On donne M et P les points du plan d'affixes respectives z et z^4 .
 - Démontre que les points I, M et P sont alignés si et seulement si : $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel.
 - Déduis que l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points I, M et P sont alignés est la réunion de la courbe (Γ) et d'une droite que l'on précisera.

EXERCICE 5 (5,5 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x}$. On admet que g est dérivable en tout nombre réel x non nul

1. a) Démontre que pour tout nombre réel x non nul, la dérivée g' de g est telle que : $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$.
- b) Déduis les variations de la fonction g .
- c) Dresse le tableau de variation de g .
(On ne calculera que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.)
2. a) Démontre que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) Justifie que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

On considère f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on désigne par (C) la

courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

L'unité graphique est 4 cm.

1. Justifie que f est continue en 0.
2. a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
- b) Donne une interprétation graphique de ce résultat.
- c) Calcule la limite de f en $+\infty$.
- d) Donne une interprétation graphique de ce résultat.
3. a) Étudie la dérivabilité de f en 0.
- b) Interprète graphiquement ce résultat.
4. a) Pour tout nombre réel x différent de 0, démontre que : $f'(x) = \frac{e^x \ln|x|}{[e^x + (\ln|x|)^2]^2} \times g(x)$,

où f' est la dérivée de f et g la fonction étudiée dans la **Partie A**.

- b) Sachant que : $g(\alpha) = 0$, justifie que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$.
- c) Déduis que : $0 < f(\alpha) < 1$.
- d) Détermine le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- e) Déduis le tableau de variation de f .
- f) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.
5. Trace la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) dans le repère $(O; I; J)$.

EXERCICE 6

(5 points)

Dans ta commune, l'association MOAYE est composée d'hommes et de femmes, les hommes étant plus nombreux que les femmes.

Chaque mois :

- un homme verse une cotisation de 900 F CFA ;
- une femme verse une cotisation de 700 F CFA.

Le montant total des cotisations mensuelles de l'association est de 20 000 F CFA.

À l'occasion de la fête annuelle, le parrain de l'association décide d'offrir :

- un tee-shirt d'une valeur unitaire de 5 000 F CFA à chaque homme ;
- un pagne d'un coût unitaire de 7 000 F CFA à chaque femme.

Il dispose pour cela d'un budget maximal de 150 000 F CFA.

Ne connaissant pas l'effectif exact des hommes et des femmes, il sollicite ton aide afin de :

- déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes que compte l'association ;
- vérifier si le budget prévu permet d'offrir un cadeau à chaque membre.

En utilisant les outils mathématiques appropriés, réponds aux préoccupations du parrain.