

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3 et 3 sur 3
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des **propositions** consignées dans le tableau ci-dessous, suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si elle est fausse.

N°	Propositions
1.	Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction définie sur \mathbb{R} par : $x \mapsto a^x$.
2.	Soit n un nombre entier naturel non nul et t une fonction dérivable sur un intervalle I . Si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction t sur l'intervalle I , est la dérivée de la dérivée $(n - 1)^{\text{ième}}$ de t .
3.	On donne $z = 2 + i\sqrt{3}$ un nombre complexe. Le nombre complexe conjugué de z a pour module : $\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$.
4.	Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers \mathcal{U} d'une expérience aléatoire et P une probabilité sur \mathcal{U} . La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0 ; 1]$ $x \mapsto P(X \geq x)$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des **énoncés incomplets** du tableau ci-dessous, trois **réponses A, B et C** permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est juste.

Écris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de lettre de la réponse qui permet d'obtenir l'affirmation juste.

N°	Énoncés incomplets	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	Soit a et b des nombres réels strictement positifs. On a : $6 \ln \left(a^{-\frac{3}{2}} \times b^{\frac{7}{2}} \right) + 20 \ln \left(\frac{\sqrt{a}}{b} \right) = \dots$	$\ln a - \ln b$	$\ln(ab)$	$\ln b - \ln a$
		$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$-4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
		4	8	0
2.	La forme exponentielle du nombre complexe $4 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ est ...	$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$-4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
		4	8	0
		4	8	0
3.	On admet que la fonction k de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $k(x) = \frac{8 - 2x}{2 - \sqrt{x}}$ admet un prolongement par continuité en 4 qu'on note l . On a : $l(4) = \dots$	4	8	0
		4	8	0
		4	8	0

4.	La valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto \sin(x)$ sur $[0; \pi]$ est égale à ...	Réponse A	$\frac{2}{\pi}$
		Réponse B	$\frac{\pi}{2}$
		Réponse C	$-\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 3 (2,5 points)

On considère dans \mathbb{C} , l'équation : (E) : $z^2 + (2\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

1. a) Calcule $(2\sqrt{3} + i)^2$.
 b) Résous dans \mathbb{C} , l'équation (E).
2. On donne le nombre complexe $V = -2\sqrt{3} - 2i$.
 a) Détermine la forme trigonométrique de V .
 b) On pose : $u = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Démontre que $u^2 = V$.
 c) Dédus la forme algébrique des racines carrées de V .

EXERCICE 4 (2,5 points)

On considère la fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $] -1; 1 [$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

1. Étudie le sens de variation de h sur $] -1; 1 [$.
2. Soit v la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ par : $v(x) = h(\sin x)$.
 a) Justifie que : $v(0) = 0$.
 b) On note v' la fonction dérivée de v .
 Démontre que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[, v'(x) = 1$.
 c) Dédus des questions **2.a)** et **2.b)** que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[, v(x) = x$.
 d) Sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, détermine la valeur exacte de $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

EXERCICE 5 (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} , & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) , & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2 cm.

1. Justifie que f est continue en 0.
2. a) Démontre que f est dérivable en 0.
 b) Donne une interprétation graphique de ce résultat.

3. Justifie que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4. On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Démontre que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

b) Donne une interprétation graphique de ce résultat.

5. a) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et f' sa dérivée.

Démontre que :
$$\begin{cases} f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(1+x), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Déduis que f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0 [$ et sur $] 0 ; +\infty [$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] 0 ; +\infty [$.

a) Justifie que g est une bijection de $] 0 ; +\infty [$ dans $] 0 ; +\infty [$.

b) On note g^{-1} la bijection réciproque de g . Sachant que $g(1) = \ln 2$, Justifie que g^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calcule $(g^{-1})'(\ln 2)$.

7. On admet que pour tout nombre réel x de l'intervalle $] 1 ; 2]$,

$$\int_0^x t \ln(1+t) dt = \frac{(x^2 - 1)\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \text{ et que (C) est au-dessus de l'axe des abscisses (OI).}$$

Calcule l'aire \mathcal{A} en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

EXERCICE 6 (5 points)

Dans une ville de la région de la NAWA, une station-service organise une promotion afin de contribuer au financement des activités de la vie scolaire des établissements secondaires de la localité.

À l'issue de la période promotionnelle, le propriétaire souhaite évaluer l'efficacité de l'opération.

Selon lui, la promotion sera considérée comme réussie si en moyenne deux clients au moins se présentent à la station-service toutes les cinq minutes pour l'achat de carburant.

On sait que le nombre maximal de clients observé en cinq minutes est trois.

Le gérant de la station-service a relevé les données concernant le nombre de clients présents au bout de cinq minutes dans le tableau ci-dessous :

Nombre de clients présents au bout de cinq minutes	0	1	2	3
Fréquence observée en pourcentage (%)	4 %	25 %	40 %	31 %

Ne maîtrisant pas les outils mathématiques nécessaires à l'analyse, le gérant te sollicite.

À l'aide des outils mathématiques du programme, vérifie si la promotion répond au critère de réussite fixés par le propriétaire.