

MATHEMATIQUES BAC SÉRIE D : CORRIGE ET BAREME

Exercice 1 (2 points)

Items	Réponses attendues	Répartition des points
2 pts	1 – FAUX	0,50
	2 – FAUX	0,50
	3 – VRAI	0,50
	4 – FAUX	0,50

Exercice 2 (2 points)

Items	Réponses attendues	Répartition des points
2 Pts	1- B	0,50
	2- B	0,50
	3- A	0,50
	4- C	0,50

Exercice 3 (3 points)

Items	Réponses attendues	Répartition des points								
1) 0,5pt	<p>L'arbre pondéré</p>	0,50								
2.) 0,5pt	<p>La formule des probabilités totales permet d'écrire : $P(U) = P(G \cap U) + P(\bar{G} \cap U)$. Or $\bar{G} \cap U = \emptyset \Rightarrow P(\bar{G} \cap U) = 0$. Donc : $P(U) = P(G \cap U) = P_G(U) \times P(G)$. C'est-à-dire : $P(U) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$.</p>	0,50								
3.) 0,5pt	<p>Le client peut gagner 0, 1 ou 2 places au cinéma. Si Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire, on a : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. Calcul des probabilités. $P(X = 0) = P(G) = 0,5$. $P(X = 1) = P(U) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$. $P(X = 2) = P(D) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. On peut résumer ces résultats dans un tableau.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>0,5</td> <td>0,3</td> <td>0,2</td> </tr> </table>	x_i	0	1	2	$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2	0,50
x_i	0	1	2							
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2							
4.a) 0,5 pt	<p>La probabilité qu'un client ne gagne pas de place le premier jour est : 0,5 et la qu'il ne gagne de place de cinéma le jour suivant est également 0,5. A l'issue des deux jours, la probabilité est donc : $0,5 \times 0,5 = 0,25$.</p>	0,50								
4.b) 0,5 pt	<p>l'événement A : « Gagner au moins une place de cinéma à l'issue des jours de suite, est l'événement contraire de l'événement « le client ne pas de place de cinéma ». La probabilité recherchée est $P(A) = 1 - 0,25 = 0,75$.</p>	0,50								
4.c)	Gagner exactement deux places, c'est :	0,50								

0,5pt	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Gagner une place le premier jour et une place le deuxième jour de probabilité : $P_1 = 0,3 \times 0,3 = 0,09$ Ou bien ✓ Gagner deux places uniquement l'un des deux jours de probabilité : $P_2 = P(D) = 0,2$. <p>Ainsi : la probabilité recherchée est : $0,2 + 0,09 = 0,29$.</p>	
--------------	--	--

Exercice 4 (3 points)

Items	Réponses attendues	Répartition des points
1.) 1 pt	<p>Le discriminant Δ de l'équation (E') est : $\Delta = (1 - 3i)^2 - 4x(-4) = 8 - 6i$.</p> <p>Racines carrées de Δ. Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta = x + iy$ tels que : $\delta^2 = \Delta$.</p> $: \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = -3 \end{cases}$ <p>On obtient : $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases}$. D'où : $x = -3$ ou $x = 3$; $y = -1$ ou $y = 1$.</p> <p>Les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = -3 + i$ et $\delta_2 = 3 - i$. On en déduit :</p> $\begin{cases} z_1 = \frac{-1+3i+3-i}{2} = 1 + i \\ z_2 = \frac{-1+3i-3+i}{2} = -2 + 2i \end{cases}$ <p>L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{-2 + 2i; 1 + i\}$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
2.a) 0,25 pt	<p>On a : $P(-2i) = (-2i)^3 + (1 - i)(-2i)^2 + (2 + 2i)(-2i) - 8i$ $= 8i - 4 + 4i - 4i + 4 - 8i = 0$</p>	0,25
2.b) 0,5 pt	<p>On a : $(z + 2i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a + 2i)z^2 + (b + 2ia)z + 2ib$.</p> <p>Par identification des termes, $\begin{cases} a + 2i = 1 - i \\ 2ib = -8i \\ b + 2ia = 2 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 3i \\ b = -4 \end{cases}$.</p> <p>Ainsi $P(z) = (z + 2i)(z^2 + (1 - 3i)z - 4)$.</p>	0,50
2.c) 0,25 pt	<p>Résolution de l'équation (E) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2i)(z^2 + (1 - 3i)z - 4) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 + (1 - 3i)z - 4 = 0$.</p> <p>D'après les questions 1) et 2-a), les solutions de l'équation (E) sont : $\{-2 + 2i ; 1 + i ; -2i\}$.</p>	0,25
3) 1pt	$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{-2+2i-1-i}{-2i-1-i} = \frac{-3+i}{-1-3i} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(3-i)(1-3i)}{1^2 - (3i)^2} = -i$ <p>Donc $\begin{cases} \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = -\frac{\pi}{2} \\ AC = BC \end{cases}$</p> <p>D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en C.</p>	<p>0,50</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

Exercice 5 (5 points)

Items	Réponses attendues	points												
1. a)	<ul style="list-style-type: none"> f est dérivable sur \mathbb{R} et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{-x}}$ $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ 	0,25												
1. b)	<ul style="list-style-type: none"> Dressons le tableau de variation de f <table border="1" data-bbox="507 678 1190 981" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f'(x)$</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> Du tableau de variation de f, on en déduit que 2 est le minimum de f sur \mathbb{R}. De plus, $2 > 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0}$. 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$											
1. c)	$D_g = \{x \in \mathbb{R}, x + 1 + e^{-x} > 0\}$ Comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $f(x) = x + 1 + e^{-x}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 + e^{-x} > 0$. Donc $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$	0,25												
2. a)	$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(f(x))$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$	0,25												
2. b)	<ul style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x + 1 + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right)\right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) \right] = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) = 0 \end{cases}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$. 	0,25												

<p>3. a)</p>	$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln\left(x+1 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{xe^x + e^x + 1}{e^x}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(xe^x + e^x + 1) - \ln(e^x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$	<p>0,25</p>												
<p>3. b)</p>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + e^x + 1) = 0$ <p>car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + e^x + 1) = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0 \end{cases}$</p>	<p>0,25</p>												
<p>3. c)</p>	$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - (-x) > 0 \Leftrightarrow \ln(xe^x + e^x + 1) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + x > 0 \Leftrightarrow xe^x + e^x + 1 > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + x > 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x > 0$ <p>Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$</p> $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + x < 0 \Leftrightarrow x < -1$ <p>pour $x = -1, g(x) = -x$</p> <ul style="list-style-type: none"> la courbe (C_g) est au-dessus de la droite (D) sur $]-1; +\infty[$; la courbe (C_g) est en dessous de la droite (D) sur $]-\infty; -1[$; la courbe (C_g) coupe la droite (D) au point $A(-1;1)$. 	<p>0,25</p>												
<p>4. a)</p>	$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(f(x))$ <p>g est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$</p> <p>or $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x+1+e^{-x}$ et $f'(x) = 1-e^{-x}$</p> <p>d'où $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$</p>	<p>0,25</p>												
<p>4. b)</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$. <p>Par conséquent, $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$</p> <p>Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$</p> <table border="1" data-bbox="507 1626 1193 1872"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>$-$</td> <td>$+$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$\ln 2$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> Courbe (C_g) (voir feuille annexe). Droite $(D): y = -x$ 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g'(x)$		$-$	$+$	$g(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
$g'(x)$		$-$	$+$											
$g(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$											

5. a)	$g(-1) = \ln(-1+1+e)$; $g(-1) = 1$	0,25
5. b)	<p>g est dérivable sur \mathbb{R} donc continue sur \mathbb{R}, à priori sur $]-\infty; 0[$. De plus, g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$; donc g réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ vers $g(]-\infty; 0[)$</p> $g(]-\infty; 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[=]\ln 2; +\infty[. \quad (K =]\ln 2; +\infty[)$	0,25
5. c)	<ul style="list-style-type: none"> $g(-1) = 1$ d'où $g^{-1}(1) = -1$. g étant dérivable sur \mathbb{R}, g est dérivable en -1. $g'(-1) = \frac{1-e}{e}$, comme $g'(-1) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable en 1. Calculons $(g^{-1})'(1)$ sans expliciter g^{-1} $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{\frac{1-e}{e}} \Rightarrow (g^{-1})'(1) = \frac{e}{1-e}$	0,25
6.	<p>En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g sûr $[1; 2]$, on a :</p> $\frac{e-1}{3e+1}(2-1) \leq g(2) - g(1) \leq \frac{e^2-1}{2e+1}(2-1)$ $\frac{e-1}{3e+1} \leq \ln(3+e^{-2}) - \ln(2+e^{-1}) \leq \frac{e^2-1}{2e+1}$ $\frac{e-1}{3e+1} \leq \ln \frac{3+e^{-2}}{2+e^{-1}} \leq \frac{e^2-1}{2e+1}$ $\frac{e-1}{3e+1} \leq \ln \frac{3e^2+1}{e(2e+1)} \leq \frac{e^2-1}{2e+1}$	0,25

Exercice6 (5 points)

Items	Réponses attendues
Introduction	<p>Pour répondre à la préoccupation du pâtissier, je vais utiliser les primitives. Pour cela, je vais :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Déterminer la fonction bénéfice B ; - Étudier les variations de B et dresser son tableau de variation ; - Déterminer le maximum de B et la valeur en laquelle il est atteint ; - Conclure.
1)	<p>Déterminons la fonction bénéfice B.</p> <p>$\forall x \in [1; 5], B'(x) = -10x + 25 + \frac{25}{2x-1}$.</p> <p>$\forall x \in [1; 5]$, la fonction B' est continue et admet donc des primitives sur $[1; 5]$.</p> <p>La fonction bénéfice B est la primitive de B' qui prend la valeur 20 en 1.</p> <p>Alors, $\forall x \in [1; 5], B(x) = -5x^2 + 25x + \frac{25}{2} \ln 2x-1 + c, c \in \mathbb{R}$ et $B(1) = 20$.</p> <p>$\forall x \in [1; 5]$, on a $2x-1 > 0$, donc $2x-1 = 2x-1$.</p> <p>Par conséquent, $\forall x \in [1; 5]$,</p> $B(x) = -5x^2 + 25x + \frac{25}{2} \ln(2x-1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$ <p>$B(1) = 20$</p> <p>donc $-5 \times 1^2 + 25 \times 1 + \frac{25}{2} \ln(2 \times 1 - 1) + c = 20$</p>

	<p><i>donc</i> $c = 20 - 20 = 0$.</p> <p>D'où, $\forall x \in [1; 5]$, $B(x) = -5x^2 + 25x + \frac{25}{2} \ln(2x - 1)$</p>																																
2.)	<p style="text-align: center;">Etudions les variations de la fonction B</p> <p style="text-align: center;">✓ Dérivée de B</p> <p>$\forall x \in [1; 5]$, $B'(x) = -10x + 25 + \frac{25}{2x - 1}$</p> <p style="text-align: center;">✓ Signe de B'(x)</p> <p>$\forall x \in [1; 5]$, $B'(x) = \frac{-20x(x - 3)}{2x - 1}$</p> <p>$-20x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ et $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.</p> <p style="text-align: center;">✓ Tableau de signe de B'(x)</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> <td style="padding: 2px 10px;">3</td> <td style="padding: 2px 10px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$-20x$</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> <td style="padding: 2px 10px;"> </td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$x - 3$</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$2x - 1$</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$B'(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;"> </td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">✓ Sens de variation de B</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\forall x \in]3; 5]$, $B'(x) < 0$, donc B est strictement décroissante sur $]3; 5]$. - $\forall x \in]3; 5]$, $B'(x) < 0$, donc B est strictement décroissante sur $]3; 5]$. - Pour $x = 3$, $B'(3) = 0$ et $B(1) = 20$. <p>$B(3) = -5 \times 3^2 + 25 \times 3 + \frac{25}{2} \ln(2 \times 3 - 1) = 30 + \frac{25}{2} \ln(5) \approx 50,118$</p> <p>$B(5) = -5 \times 5^2 + 25 \times 5 + \frac{25}{2} \ln(2 \times 5 - 1) \approx 27,465$</p> <p style="text-align: center;">✓ Tableau de variation de B</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> <td style="padding: 2px 10px;">3</td> <td style="padding: 2px 10px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$B'(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$B(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">20</td> <td style="padding: 2px 10px;">50,118</td> <td style="padding: 2px 10px;">27,465</td> </tr> </table>	x	1	3	5	$-20x$	-		-	$x - 3$	-	0	+	$2x - 1$	+	0	+	$B'(x)$	+		-	x	1	3	5	$B'(x)$	+	0	-	$B(x)$	20	50,118	27,465
x	1	3	5																														
$-20x$	-		-																														
$x - 3$	-	0	+																														
$2x - 1$	+	0	+																														
$B'(x)$	+		-																														
x	1	3	5																														
$B'(x)$	+	0	-																														
$B(x)$	20	50,118	27,465																														
3.)	<p>Déterminons le maximum de B et la valeur en laquelle il est atteint.</p> <p>D'après le tableau de variation, la fonction bénéfice B a pour maximum 50,118 et il est atteint pour $x = 3$.</p> <p>Conclusion : Le bénéfice maximal est 50 118 F et il est réalisé pour une production journalière de 300 glaces.</p>																																

NB: il convient de bien lire les productions des élèves car toute autre solution correcte mérite la totalité des points attribués.

BAREME CRITERIE

Critères	Indicateurs	Notation
CM1 : Pertinence	<p>Pour répondre à la préoccupation du pâtissier, je vais utiliser les primitives.</p> <p>Pour cela, je vais :</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Déterminer la fonction bénéfice B ; ✓ Étudier les variations de B et dresser son tableau de variation; ✓ Déterminer s'il existe, le maximum de B et la valeur en laquelle il est atteint ; ✓ Conclure. 	<p>0,75 pt</p> <p>1 ind sur 4 → 0,25 pt 2 ind sur 4 → 0,5 pt 3 ind sur 4 → 0,75 pt</p>
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Détermination de la fonction B ✓ Etude des variations de B ✓ Détermination du maximum et de la valeur en laquelle il est atteint ✓ Exactitude des formules ✓ Exactitude des règles de calculs ✓ Avis (conclusion) 	<p>2,5 pts</p> <p>1 ind sur 6 → 0,5 pt 2 ind sur 6 → 1 pt 3 ind sur 6 → 1,5 pt 4 ind sur 6 → 2 pts 5 ind sur 6 → 2,5 pts</p>
CM3 : Cohérence de la réponse	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Le résultat produit est vraisemblable ✓ Le résultat produit est en adéquation avec la démarche ✓ Les enchainements sont de bonne qualité 	<p>1,25 pt</p> <p>1 ind sur 3 → 0,75 pt 2 ind sur 3 → 1,25 pt</p>
CP : Critère de perfectionnement	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Propreté de la production (présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge). ✓ -Démarche correcte non classique au-delà de la production attendue. ✓ -Production juste en peu de mots (esprit de synthèse). 	<p>0,5 pt</p> <p>1 ind sur 3 → 0,25 pt 2 ind sur 3 → 0,5 pt</p>