

CORRIGÉ ET BARÈME
MATHÉMATIQUES
Série : C

CORRIGÉ	BARÈME	
EXERCICE 1 (2 POINTS)		
1-B	0,5	
2-A	0,5	
3-C	0,5	
4-C	0,5	
EXERCICE 2 (2 POINTS)		
1- Vrai	0,5	
2- Faux	0,5	
3- Faux	0,5	
4- Vrai	0,5	
EXERCICE 3 (2,5 POINTS)		
On donne $m = \overline{abc} = 10^2 a + 10 b + c$		
1) Pour $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$; on a : $m = 121$.		
En base 2 ; on a : $m = \overline{1111001}^2$		0,50
2) On donne : $m \equiv 0[27]$		
a) On a : $m \equiv 0[27] \Leftrightarrow 10^2 a + 10 b + c \equiv 0[27]$		
En multipliant m par 10, on a : $10 m = 10^3 a + 10^2 b + 10 c$		
On a : $10 m = 10^3 a + 10 \overline{bc}$; car $10^2 b + 10 c = 10 \overline{bc}$		
Comme $m \equiv 0[27]$; alors $10 m \equiv 0[27]$.		0,50
Par conséquent : $10^3 a + 10 \overline{bc} \equiv 0[27]$		
b) On a : $10^3 a + 10 \overline{bc} \equiv 0[27]$		
$10^3 = 1000 \equiv 1[27]$		
Donc $10^3 a \equiv a[27]$		
Par suite : $10^3 a + 10 \overline{bc} \equiv a + 10 \overline{bc} [27]$		0,50
Comme $10^3 a + 10 \overline{bc} \equiv 0[27]$; on a donc : $10 \overline{bc} + a \equiv 0[27]$		
c) On a : $\overline{bca} = 10^2 b + 10 c + a$		
De $10 \overline{bc} + a \equiv 0[27]$; on a : $10(10 b + c) + a \equiv 0[27]$		0,50
D'où : $\overline{bca} \equiv 0[27]$		
d) On a : $m = 10^2 a + 10 b + c \equiv 0[27]$.		
En multipliant m par 10^2 ; on a : $10^2 m \equiv 10^4 a + 10^3 b + 10^2 c$		
Or $10^3 \equiv 1[27] \Rightarrow 10^4 \equiv 10 [27] \Rightarrow 10^4 a \equiv 10 a [27]$		
Et : $10^3 b \equiv b [27]$		
Ainsi : $10^2 m \equiv 10 a + b + 100 c [27]$ et $10^2 m \equiv 0[27]$		
Par suite, $10 a + b + 100 c = 100 c + 10 a + b = \overline{cab} \equiv 0[27]$		0,50
$\overline{cab} = 0[27]$		

EXERCICE 4 (3,5 POINTS)

1) Soit l'équation $(E_u) : z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2i u \bar{u} = 0$

a) Montrons que $\Delta = (2u + i\bar{u})^2$

$$\Delta = (2u - i\bar{u})^2 - 4 \times -2i u \bar{u}$$

$$\Delta = (2u)^2 - 4iu\bar{u} - u^2 + 8i u \bar{u}$$

$$\Delta = (2u)^2 + 4iu\bar{u} + (iu)^2$$

$$\Delta = (2u + i\bar{u})^2$$

0,25

b) Résolvons dans \mathbb{C} l'équation (E_u) .

Une racine carrée de Δ est : $2u + i\bar{u}$

$$\text{Les solutions de } (E_u) \text{ sont : } z_1 = \frac{2u - i\bar{u} - 2u - i\bar{u}}{2} ; \quad z_2 = \frac{2u - i\bar{u} + 2u + i\bar{u}}{2}$$

$$z_1 = -i\bar{u} ; \quad z_2 = 2u$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-i\bar{u} ; 2u\}$$

0,25 × 3

2) a) La forme algébrique de $\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}}$

$$\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}} = \frac{-i(x - yi) - 2i}{2(x + yi) - 2i} = \frac{[-y - (x + 2)i][2x - (2y - 2)]}{4x^2 + (2y - 2)^2}$$

$$\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}} = \frac{2x - 4xy - 4y + 4}{4x^2 + (2y - 2)^2} + \frac{-2x^2 - 4x + 2y^2 - 2y}{4x^2 + (2y - 2)^2} i$$

$$b) \frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \text{Im}\left(\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}}\right) = 0$$

$$\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -2x^2 - 4x + 2y^2 - 2y = 0$$

$$\frac{z_P - z_{\Omega}}{z_N - z_{\Omega}} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x^2 + 2x - y^2 + y = 0$$

0,50

0,25

$$c) \text{ On a : } x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 \quad \text{et} \quad y^2 + y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - (y^2 - y) = 0$$

$$x^2 + 2x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + 2x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 2x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

0,50

d) Soit $I(-1; \frac{1}{2})$ dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

$$\text{Posons } X = x + 1 \quad \text{et} \quad Y = y - \frac{1}{2}$$

$$\text{Dans le repère } (I; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \text{ l'équation de (H) est : } \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

0,25

(H) est donc une hyperbole.

$$e) \text{ On a : } c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

$$F\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

0,25 × 4

EXERCICE 5 (5 POINTS)**Partie A****1) Continuité en 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{-1}{nx}} = 0 ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u \text{ (En posant } u = \frac{-1}{nx} \text{)}$$

0,50

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n(0) = 0$. Donc f_n est continue en 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{nx}} = 0$$

Ainsi $f'_n(0) = 0$.

Donc (C_n) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

0,50

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty ; \text{ Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 ; \text{ (En posant } u = \frac{-1}{nx} \text{).} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

0,25

4) a) f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[; \forall n \in \mathbb{N}^*; f'_n(x) = e^{\frac{-1}{nx}} + x \left(\frac{1}{nx^2} \right) e^{\frac{-1}{nx}} = \left(1 + \frac{1}{nx} \right) e^{\frac{-1}{nx}}$$

0,50

$$b) \forall x \in]0; +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \left(1 + \frac{1}{nx} \right) > 0 \text{ et } e^{\frac{-1}{nx}} > 0$$

Donc $f'_n(x) > 0$. Par conséquent f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

0,25

c) Tableau de variation de f_n

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		
f_n	0	$+\infty$

0,50

$$5) \forall t \in [0; +\infty[, 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$$

$$\text{Pour } t = \frac{1}{nx}; \text{ on a : } 0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{nx} - x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{nx} \right)^2$$

0,50

$$\text{En multipliant par } x \text{ (} x \text{ étant positif), on a : } 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

6) (D_n) est la droite d'équation $y = x - \frac{1}{n}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2 x}. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n} \right) = 0$$

Ainsi la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à (C_n) .

0,25

$$b) \forall x \in]0; +\infty[; \forall n \in \mathbb{N}^*; f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n} \right) \geq 0.$$

0,25

(C_n) est donc au-dessus de (D_n)

0,50

7) Construction de (C_1)

(Voir annexe)

Partie B

1) f_n est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $f_n([1; +\infty[) = [e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$.

Or $1 \in [e^{-\frac{1}{nx}}; +\infty[$. Donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique u_n sur $]1; +\infty[$

0,25

$$2) f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{\frac{-1}{nu_n}} = 1 \Leftrightarrow u_n = e^{\frac{1}{nu_n}} \Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{1}{nu_n} \Leftrightarrow u_n \ln(u_n) = \frac{1}{n}$$

0,25

Donc u_n est une solution de l'équation : $x \ln x = \frac{1}{n}$

$$3) u_n \text{ est une solution de l'équation : } h(x) = \frac{1}{n}$$

$$\text{D'où : } h(u_n) = \frac{1}{n} \text{ et } h(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(u_{n+1}) < h(u_n)$. h étant une fonction croissante,

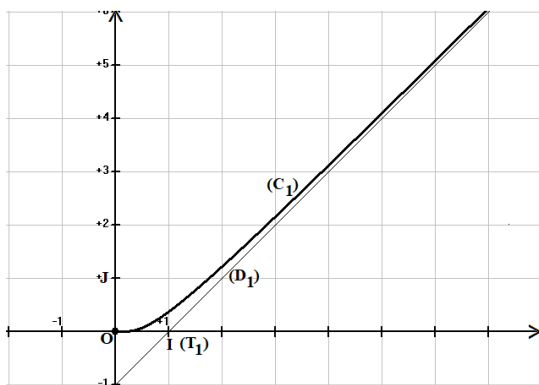
0,25

$u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4) On a $u_n \in]1; +\infty[$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée ; donc elle est convergente.

0,25



Construction de (C_1) .

EXERCICE 6

Critères	Indicateurs de performance	Barème de notation
<p>Critère minimal 1 :</p> <p>Pertinence (Interprétation correcte de la situation)</p> <p>Pertinence des choix opérés par les élèves sur les données de la situation</p>	<p>Pour répondre aux préoccupations de Monsieur Kodjo, je vais utiliser mes connaissances mathématiques relatives à la leçon : SUITES NUMÉRIQUES.</p> <p>Pour ce faire je vais :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ désigner par V_n le volume d'eau contenu dans le réservoir à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée ($n \in \mathbb{N}$) et par H_n, la valeur obtenue par le plombier après avoir retranché le nombre 150 à la quantité d'eau contenue dans le réservoir à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée. ▪ exprimer V_{n+1} en fonction de V_n ▪ exprimer H_{n+1}, en fonction de V_n ; ▪ prouver que (H_n) est une suite géométrique tout en précisant la raison et le premier terme ▪ exprimer V_n en fonction de n ; ▪ calculer la limite en $+\infty$ de V_n puis la comparer à 160. 	<p>0,75 point</p> <p>2 ind / 6 → 0,25</p> <p>3 ind / 6 → 0,50</p> <p>4 ind / 6 → 0,75</p>

<p>Critère minimal 2 :</p> <p>Utilisation correcte des outils mathématiques en situation</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Soit V_n le volume d'eau contenu dans le réservoir à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée ($n \in \mathbb{N}$) • H_n la valeur obtenue par le plombier après avoir retranché le nombre 150 à la quantité d'eau contenue dans le réservoir à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée. • Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n $V_{n+1} = \left(V_n - \frac{20}{100} V_n \right) + 30 = \frac{4}{5} V_n + 30$ • J'exprime H_n en fonction de V_n $H_n = V_n - 150$ • Montrons que (H_n) est une suite géométrique tout en précisant la raison et le premier terme $\begin{aligned} H_{n+1} &= V_{n+1} - 150 \\ &= \left(\frac{4}{5} V_n + 30 \right) - 150 \\ &= \frac{4}{5} (V_n - 150) \\ &= \frac{4}{5} H_n \end{aligned}$ <p>Ainsi, (H_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $H_0 = V_0 - 150$ $H_0 = 50 - 150 = -100$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Exprimons V_n en fonction de n (H_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $H_0 = -100$. On a : $H_n = -100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ $H_n = V_n - 150$. Donc : $V_n = H_n + 150$ $V_n = -100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 150$ • Calculons la limite en $+\infty$ de V_n $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 150 \right) = 150$ <p style="text-align: center;">Car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$</p> • Comparons $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ à 160 On a : $150 < 160$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n < 160$ 	<p>2,5 points :</p> <p>1 ind / 8 → 0,5 2 ind / 8 → 0,75 3 ind / 8 → 1,25 4 ind / 8 → 1,75 5 ind / 8 → 2,00 6 ind / 8 → 2,5</p>
<p>Critère minimal 3 :</p> <p>Cohérence de la réponse</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le résultat est conforme aux résultats attendus • Le résultat produit est en adéquation avec la démarche • Qualité des enchaînements • Retour au problème <p style="text-align: center;">Conclusion</p> <p>Le volume d'eau va se stabiliser autour de 150 litres. Comme la capacité maximale du réservoir est de 160 litres, le réservoir ne débordera jamais car ($150 < 160$). Il est raisonnable de laisser fonctionner le réservoir pendant la période d'absence de monsieur Kodjo.</p>	<p>1,25 point :</p> <p>1 ind / 4 → 0,50 2 ind / 4 → 0,75 3 ind / 4 → 1,25</p>
<p>Critère de perfectionnement</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Concision • Originalité • Propreté de la copie 	<p>0,5 point :</p> <p>1 ind / 3 → 0,25 2 ind / 3 → 0,5</p>