

# MATHEMATIQUES

## SERIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3.

Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

### EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1.	Pour tous nombres réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ .
2.	La variance $V(X)$ d'une variable aléatoire $X$ est définie par : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
3.	Si $f$ est une fonction continue et strictement décroissante sur un intervalle $]a; b[$ , alors $f$ réalise une bijection de $]a; b[$ , sur $]f(a); f(b)[$ .
4.	Si A et B sont deux événements incompatibles tels que $p(A) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{12}$ alors $p(A \cup B) = \frac{5}{12}$

### EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations incomplètes ci-dessous ; quatre réponses A, B, C et D sont données dont une seule est juste.

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

Exemple : 1-A ou 1-B ou 1-C ou 1-D

N°	AFFIRMATIONS INCOMPLETES	REPONSES	
1.	La dérivée sur IR de la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est...	A	$x \mapsto (\ln 2)e^{x \ln 2}$
		B	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$
		C	$x \mapsto -(\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^x$
		D	$-\ln(2)e^{x \ln 2}$
2.	Une primitive sur IR de la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x + \sqrt{3}$ est ...	A	$F(x) = \frac{3x^2}{2} + \sqrt{3}$
		B	$F(x) = x\sqrt{3}$
		C	$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x\sqrt{3}$
		D	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3\sqrt{x}$

3.	Le conjugué du nombre complexe $z + 1$ est :	A	$1 + \bar{z}$
		B	$-1 + \bar{z}$
		C	$1 - \bar{z}$
		D	$z - 1$
4.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ est égale ....	A	0
		B	$\frac{1}{3}$
		C	$+\infty$
		D	$-\infty$

**EXERCICE 3**
**(2,5 points)**

On considère la fonction polynôme  $P$  définie par :  $P(z) = z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i$

1-a) Calcule  $(1 + 2i)^2$

b) Justifie que  $P(z) = (z - 2)(z^2 + z + 1 - i)$

c) Déduis-en les solutions de l'équation (E) :  $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A,

B et C d'affixes respectives  $-1 - i$  ;  $2$  et  $i$ ,

a) Place les points A, B et C

b) Calcule  $|z_A - z_C|$  ;  $|z_B - z_C|$  et déduis-en la nature du triangle ABC

**EXERCICE 4**
**(3 points)**

Sur une route, un carrefour est équipé d'un feu tricolore.

On admet que la probabilité pour que le feu soit vert lors d'un passage est égale à  $\frac{3}{4}$ .

Un automobiliste passe 5 fois à ce carrefour dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.

1- Justifie que  $X$  suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

2- a) Détermine la loi de probabilité de  $X$ . (On donnera chaque probabilité sous la forme d'une fraction irréductible)

b) Calcule l'espérance mathématique (arrondie d'ordre zéro) et la variance de  $X$ .

c) Interprète l'espérance mathématique obtenue.

3- L'automobiliste passe maintenant  $n$  fois ( $n \geq 2$ ) à ce carrefour, dans des conditions identiques et indépendantes

On note :

- $p_n$  la probabilité pour que le feu soit vert au moins une fois

- $q_n$  la probabilité pour que le feu ne soit jamais vert sur les  $n$  passages.

a) Justifie que  $q_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) Déduis-en  $p_n$

**EXERCICE 5****(5,5 points)**Partie A

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = x + 2e^{-x}$  et  $g(x) = \ln(x + 2e^{-x})$

1. justifie que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
2. a) Justifie que  $f$  est strictement décroissante sur  $] - \infty; \ln 2[$  et strictement croissante sur  $]\ln 2; +\infty[$ .  
b) Dresse le tableau de variation de  $f$  et déduis-en le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

Partie B

1. a) Justifie que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  à l'aide de la question 2b) partie A.  
b) Justifie que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .  
c) Justifie que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ . Interprète graphiquement ces résultats.
2. a) Justifie que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x + \ln(xe^x + 2)$ .  
b) Justifie que la droite  $(D) : y = -x + \ln 2$  est une asymptote oblique à  $(C_g)$  en  $-\infty$ .  
c) Etudie la position relative de  $(C_g)$  par rapport à la droite  $(D)$ .
3. on admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
a) Démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1-2e^{-x}}{x+2e^{-x}}$ .  
b) Déduis-en le sens de variation de  $g$  et dresse son tableau de variation.
4. a) Calcule  $g(-1)$ .  
b) Démontre que  $g$  réalise une bijection de  $] - \infty; \ln 2[$  vers un intervalle  $K$  que l'on précisera.  
c) On note  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .  
Démontre que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\ln(-1 + 2e)$  et déduis que :  $(g^{-1})'(\ln(-1 + 2e)) = -1$ .
5. Construis la droites  $(D)$  et la courbe  $(C_g)$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

**EXERCICE 6****(5 points)**

En suivant une partie d'un documentaire à la télévision, un élève de la classe de 1<sup>ère</sup> apprend que la trajectoire d'un astroïde a l'allure de la courbe d'une fonction  $K$  dont la dérivée  $K'$  est donnée par l'expression

$K'(t) = t\sqrt{t+3}$  où  $t$  désigne le temps en minute ; et que ce corps rocheux a parcouru 1 km en une minute. Il veut déterminer la distance parcourue par l'astroïde au bout d'une heure.

Ayant du mal à déterminer l'expression  $K(t)$  de  $K$ , il soumet sa préoccupation à son grand frère, ton ami de quartier. Celui-ci qui a suivi entièrement le documentaire, lui donne l'information complémentaire que l'expression  $K(t)$  est de la forme  $(at^2 + bt + c)\sqrt{t+3} + d$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels. Malheureusement, lui non plus n'arrive à déterminer  $K(t)$ . ( $K(t)$  désigne la distance parcourue en km)

Connaissant tes talents en Mathématiques, il te sollicite. Aide-le à déterminer la distance parcourue par l'astroïde au bout d'une heure.