EXAMEN DU BACCALAUREAT

ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2024

SERIE C

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

1^er^ tour

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 6
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E): $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$)
Déterminer les valeurs de α et β pour que (E) admette pour solutions $1 + i$ et $1 - i$. (1 pt)
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (F): $y'' - 2y' + 2y = 0$ (1 pt)
3) On lance deux fois un dé parfait équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Les résultats sont des couples $(a; b)$ où a et b sont respectivement les numéros obtenus sur la face supérieure du dé au premier lancer et au second lancer.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement
   A : « obtenir un couple de nombres premiers ». (1 pt)
   b) Déterminer la probabilité de l'évènement :
   B : « les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - ay' + by = 0$ sont données par $y(x) = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ où λ et μ sont des réels ».
   où $(a; b)$ est le couple obtenu lors des deux lancers du dé. (1 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \, . \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(t + \pi)$. (0 ,25 pt)
   b) Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(-t)$. (0 ,25 pt)
   c) En déduire qu'il suffit de connaitre (Γ) sur un intervalle que l'on précisera, pour connaitre entièrement (Γ). (0,5 pt)
2) a) Etudier les sens de variations des fonctions de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (1 pt)
   b) Dresser le tableau de variations conjoints de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (0,5 pt)
   c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère. (0,5 pt)
3) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est $2x^2 + y^2 - 2x = 0$. (0,5 pt)
   b) En déduire la nature de la courbe (Γ). (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{2x} + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
   b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote dont on précisera une équation. (0,25 pt)
2) Soit f' la fonction dérivée de f.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. (0,75 pt)
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f. (1 pt)
   c) Dresser son tableau de variation de f. (1 pt)
3) Tracer $(\mathcal{C})$, son asymptote et ses tangentes remarquables dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (1 pt)

Partie B

Soit (D) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse O.

1) Déterminer une équation de (D). (0,75 pt)
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $f(x) - x - 1 \geq 0$. (0,75 pt)
   b) En déduire les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D). (0,5 pt)
   c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire du domaine compris entre $(\mathcal{C})$, (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. (1 pt)

Partie C

On considère l'application T du plan dans lui-même qui au point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy$ telle que $z' = i\bar{z} - 1 + i$.

1) Exprimer x' en fonction de x et y, et y' en fonction de x et y. (1 pt)
2) Montrer que l'ensemble des points invariants par T est (D). (0,75 pt)
3) Soit M un point quelconque du plan et $M' = T(M)$.
   a) Montrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D). (0,75 pt)
   b) Montrer que si $M \notin (D)$, alors la droite (MM') est perpendiculaire à (D). (0,75 pt)
   c) En déduire la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques. (0,75 pt)
4) Construire dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'image $(\mathcal{C}')$ par T de la courbe $(\mathcal{C})$. (0,75 pt)

Sujet : 2.

PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE N°1 : (série C uniquement)

1°) Déterminons α et β :

Les nombres complexes $1+i$ et $1-i$ sont solutions de (E) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha = (1+i) + (1-i) \\ \beta = (1+i) \times (1-i) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \alpha = 2 & (0,5\,pt) \\ \beta = 2 & (0,5\,pt) \end{cases}$$

2°) Résolvons l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$:

L'équation caractéristique de (F) est :

$r^2 - 2r + 2 = 0.$ (0,25 pt)

On a :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = (2i)^2$$

Donc :

$$r_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$$r_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

(0,25 pt)

Par conséquent, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les (0,5 pt) fonctions $x \mapsto e^{x}(A\cos x + B\sin x)$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

3°) a) Calculons la probabilité de A :

Soit Ω l'univers des possibles associé à cette expérience aléatoire.

Un élément de Ω est un couple d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$.
Donc :

$$\text{Card}(\Omega) = 6^2 = 36. \quad (0,25\text{ pt})$$

Vu que le dé est parfait, alors Ω est muni de l'équiprobabilité.
Un élément de A est un couple d'éléments de $\{2;3;5\}$.
Donc :

$$\text{Card}(A) = 3^2 = 9 \quad (0,25\text{ pt})$$

D'où :

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Par suite, $P(A) = \frac{1}{4}$. (0,5 pt)

b°) Calculons la probabilité de B :
L'équation caractéristique de $y'' - ay' + by = 0$ est $r^2 - ar + b = 0$. (0,25 pt)
Si les solutions de l'équation différentielle $y'' - ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ avec λ et μ des réels, les solutions de l'équation caractéristique sont nécessairement $1+i$ et $1-i$. (0,25 pt)
D'après 1°) on obtient que $a = 2$ et $b = 2$. (0,25 pt)
Donc $(2;2)$ est l'unique résultat qui permet à B d'être réalisé.
Ainsi : $\text{Card}(B) = 1$.
Par suite, $P(B) = \frac{1}{36}$. (0,25 pt)

EXERCICE N°2 : (Commun aux série C et E)

1°) a°) Comparons les positions des points $M(t)$ et $M(t+\pi)$:

on a pour tout réel t :

$x(t+\pi) = \cos^2(t+\pi) = [-\cos t]^2 = \cos^2 t = x(t)$

$y(t+\pi) = \sqrt{2}\sin(t+\pi).\cos(t+\pi) = \sqrt{2}\sin t.\cos t = y(t)$

Donc les points $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont confondus. (0,25pt)

b°) Comparons les positions des points $M(t)$ et $M(-t)$:

on a pour tout réel t :

$x(-t) = \cos^2(-t) = \cos^2 t = x(t)$

$y(-t) = \sqrt{2}\sin(-t).\cos(-t) = -\sqrt{2}\sin t.\cos t = -y(t)$

Donc les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O;\vec{\imath})$. (0,25pt)

c°) Déduisons qu'il suffit de connaître (Γ) sur un intervalle que l'on précisera :

En effet, comme pour tout réel t, les points $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont confondus, alors (Γ) est complète sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. (0,25pt)

Comme de plus pour tout réel t, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O;\vec{\imath})$, alors on peut restreindre l'étude de (Γ) à l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$. (0,25pt)

2°) a) Etudions les sens de variations de x et y :

* Sens de variation de x sur $[0;\frac{\pi}{2}]$:

on a : $x(t) = \cos^2 t$, $\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

Donc : $x'(t) = -2\sin t.\cos t$, $\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$. (0,25pt)

Comme $\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$ on a $\sin t \geq 0$ et $\cos t \geq 0$, alors $x'(t) \leq 0$ $\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

Par conséquent x est décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$. (0,25pt)

* **Sens de variation de y sur $[0;\frac{\pi}{2}]$**

On a : $y(t) = \sqrt{2}\sin t.\cos t \;,\; \forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$

Donc : $y'(t) = \sqrt{2}(\cos t.\cos t - \sin t.\sin t) \;,\; \forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$

$= \sqrt{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) \;,\; \forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$

$= \sqrt{2}\cos 2t \;,\; \forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$ (0,25 pt)

Comme :

$\forall t \in [0;\frac{\pi}{4}]$, on a $2t \in [0;\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos 2t \geq 0$;

$\forall t \in [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$, on a $2t \in [\frac{\pi}{2};\pi]$, donc $\cos 2t \leq 0$. (0,25 pt)

Ainsi :

$\forall t \in [0;\frac{\pi}{4}]$, $y'(t) \geq 0$. Donc y est croissante sur $[0;\frac{\pi}{4}]$

$\forall t \in [\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$, $y'(t) \leq 0$. Donc y est décroissante sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$.

b°) **Dressons le tableau de variations conjoints de x et y sur $[0;\frac{\pi}{2}]$:**

Les résultats précédents sont résumés dans le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	-1	$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	$\sqrt{2}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

(0,5 pt)

c) Traçons (Γ) dans le repère.

(Voir annexe 1) $(0,5pt)$

3°) a°) Montrons qu'une équation cartésienne de (Γ) est $2x^2+y^2-2x=0$:

On a :

$$\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\sqrt{2}\sin t.\cos t \end{cases}$$

On obtient :

$$y^2 = 2\sin^2 t.\cos^2 t$$
$$= 2(1-\cos^2 t)\cos^2 t$$
$$= 2(1-x)x$$
$$= 2x-2x^2$$

Donc :

$$2x^2+y^2-2x=0$$

D'où :

(Γ) : $2x^2+y^2-2x=0$ $(0,5pt)$

b°) Déduisons la nature de la courbe (Γ) :

On a : (Γ) : $2x^2+y^2-2x=0$

Or : $2x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+y^2=0$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

Donc : (Γ) : $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=1.$ $(0,25pt)$

EXERCICE N°3 : (Série E uniquement)

1°) Déterminons la nature de $(\mathcal{C}_1)$ puis représentons $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère :

On a :

$$(\mathcal{C}_1) : y^2 - 4x = 0$$

Donc :

$$(\mathcal{C}_1) : y^2 = 4x . \ (0,25 pt)$$

Par conséquent $(\mathcal{C}_1)$ est une parabole. (0,25 pt)

Pour la représentation de $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère, (voir annexe 2) (0,5 pt)

2°) Déterminons la nature de $(\mathcal{C}_2)$ puis représentons $(\mathcal{C}_2)$ dans le repère :

On a :

$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Or :

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \iff x^2 - 4x + y^2 = 0$$
$$\iff (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$$
$$\iff (x-2)^2 + y^2 = 4$$

Donc :

$$(\mathcal{C}_2) : (x-2)^2 + y^2 = 4 . \ (0,25 pt)$$

Par conséquent $(\mathcal{C}_2)$ est un cercle. (0,25 pt)

Pour la représentation graphique voir annexe 2 (0,5 pt)

3°) Déterminons la nature de $(\mathcal{C}_3)$ puis représentons $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère :

On a :

$$(\mathcal{C}_3) : 2x^2 + y^2 - 4x = 0$$

or:

$$2x^2+y^2-4x=0 \Leftrightarrow 2(x^2-2x)+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left[(x-1)^2-1\right]+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\frac{y^2}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

Donc:

$$(\mathcal{C}_3): (x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1 \quad (0{,}25pt)$$

Par conséquent $(\mathcal{C}_3)$ est une ellipse. (0,25pt)

Pour la représentation graphique voir annexe 2 (0,5pt)

4°) <u>Discutons suivant les valeurs de m la nature de la courbe $(\mathcal{C}_m)$:</u>

on a:

$$(\mathcal{C}_m): (m-1)x^2+y^2-4x=0$$

on distingue 2 cas.

- Pour $m=1$, la courbe $(\mathcal{C}_1)$ est une parabole d'après la question 1)a). (0,25pt)
- Pour $m\neq 1$, on a que:

$$(m-1)x^2+y^2-4x=0 \Leftrightarrow (m-1)\left(x^2-\frac{4}{m-1}x\right)+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (m-1)\left[\left(x-\frac{2}{m-1}\right)^2-\frac{4}{(m-1)^2}\right]+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (m-1)\left(x-\frac{2}{m-1}\right)^2+y^2=\frac{4}{m-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{2}{m-1}\right)^2}{\frac{4}{(m-1)^2}}+\frac{y^2}{\frac{4}{m-1}}=1.$$

D'où:

$$(\mathcal{C}_m): \frac{\left(x-\frac{2}{m-1}\right)^2}{\frac{4}{(m-1)^2}}+\frac{y^2}{\frac{4}{m-1}}=1. \quad (0{,}25pt)$$

on distingue 2 sous-cas :

- si $m < 1$, alors $(\mathcal{C}_m)$ est une hyperbole ; (0,25pt)
- si $m > 1$, alors $(\mathcal{C}_m)$ est une ellipse. (0,25pt)

Sujet : 2.   Problème :
(Séries C et E)

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Partie A :

1°) a°) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

On a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^{2x}+1) = 1$$

Car $\lim_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} 1 = 1$.

Donc : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.   (0,25 pt)

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (xe^{2x}+1) = +\infty$$

Car $\lim_{x \to +\infty} xe^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$.

Donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,25 pt)

b°) Déduisons que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote dont on précisera une équation :

De $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, on déduit que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote d'équation $y = 1$.   (0,25 pt)

2°) a Calculons $f'(x)$ pour tout réel x :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$
$$= (1+2x)e^{2x}.$$ (0,75 pt)

b) Étudions le signe de $f'(x)$ puis déduisons le sens de variation de f :

On a pour tout réel x, $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$.

Vu que $e^{2x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1+2x$.

D'où :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \{-\frac{1}{2}\} , f'(x) = 0 \end{cases}$$ (0,5pt)

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$. (0,5pt)

c) Dressons le tableau de variations de f :

Les résultats précédents sont consignés dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(1 pt)

3°) Traçons $(\mathcal{C})$, son asymptote et ses tangentes remarquables

Voir annexe 3 (1 pt)

Partie B :

1°) Déterminons une équation de (D) :

On a que :

$(D) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ (0,25 pt)

Comme $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$, on obtient :

$(D) : y = x + 1.$ (0,5 pt)

2°) a°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) :

On a que :

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow f(x) - x - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow xe^{2x} + 1 - x - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(e^{2x} - 1) \geq 0\end{aligned}$$ (0,25 pt)

Dressons le tableau de signe de $x(e^{2x}-1)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{2x}-1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{2x}-1)$		$+$	0	$+$	

(0,25 pt)

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x(e^{2x}-1) \geq 0$.

Par suite :

$$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$ (0,25 pt)

b°) Déduisons les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) :

On a $f(x) - x - 1 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. On en déduit alors que $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt) c°) Calculons l'aire en cm² du domaine défini :

Soit S cette aire.

on a que :

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - x - 1)\,dx \quad (ua) \qquad (0,25pt)$$

$$= \int_{-1}^{1} (x e^{2x} - x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x e^{2x}\,dx - \int_{-1}^{1} x\,dx$$

* Calculons $\int_{-1}^{1} x e^{2x}\,dx$

Posons :

$$u'(x) = e^{2x} \Leftarrow u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

on obtient :

$$\int_{-1}^{1} x e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x e^{2x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{4} e^{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} e^{2} + \frac{3}{4} e^{-2} \qquad (0,25pt)$$

* Calculons $\int_{-1}^{1} x\,dx$

on a :

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad (0,25pt)$$

Par suite :

$$S = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^{-2} \quad ua$$

Comme $1\,u.a = 2cm \times 2cm = 4\,cm^2$, alors il vient que :

$$S = e^2 + 3e^{-2}\ cm^2. \quad (0{,}25\,pt)$$

Partie C :

1°) Exprimons x' en fonction de x et y et y' en fonction de x et y

on a que :

$$z' = i\bar{z} - 1 + i \Leftrightarrow x' + iy' = i(x - iy) - 1 + i$$
$$\Leftrightarrow x' + iy' = ix + y - 1 + i$$
$$\Leftrightarrow x' + iy' = y - 1 + i(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x' = y - 1 & (0{,}5\,pt) \\ y' = x + 1 & (0{,}5\,pt) \end{cases}$$

2°) Montrons que l'ensemble des points invariants par T est (D) :

En effet, soit M un point du plan.

on a :

$$T(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1. \quad (0{,}5\,pt)$$
$$\Leftrightarrow M \in (D).$$

Donc l'ensemble des points invariants par T est (D). (0,25pt)

3°) a°) Montrons que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).

On a :

$$x_I = \frac{x+x'}{2} = \frac{x+y-1}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} = \frac{y+x+1}{2} \quad (0{,}25pt)$$

On aura :

$$y_I = \frac{y+x+1}{2} = \frac{x+y-1+2}{2} = \frac{x+y-1}{2}+1 = x_I+1$$

Donc $y_I = x_I + 1$. (0,25pt)

Par conséquent $I \in (D)$. (0,25pt)

b°) Montrons que si $M \notin (D)$, alors $(MM') \perp (D)$:

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (D). (0,25pt)

On a : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}y-1-x\\x+1-y\end{pmatrix}$

On aura que :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\overrightarrow{MM'} &= 1\times(y-1-x)+1\times(x+1-y)\\ &= y-1-x+x+1-y\\ &= 0. \quad (0{,}25pt)\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \perp (MM')$.

Comme $\vec{u} \perp (MM')$, alors $(MM') \perp (D)$. (0,25pt)

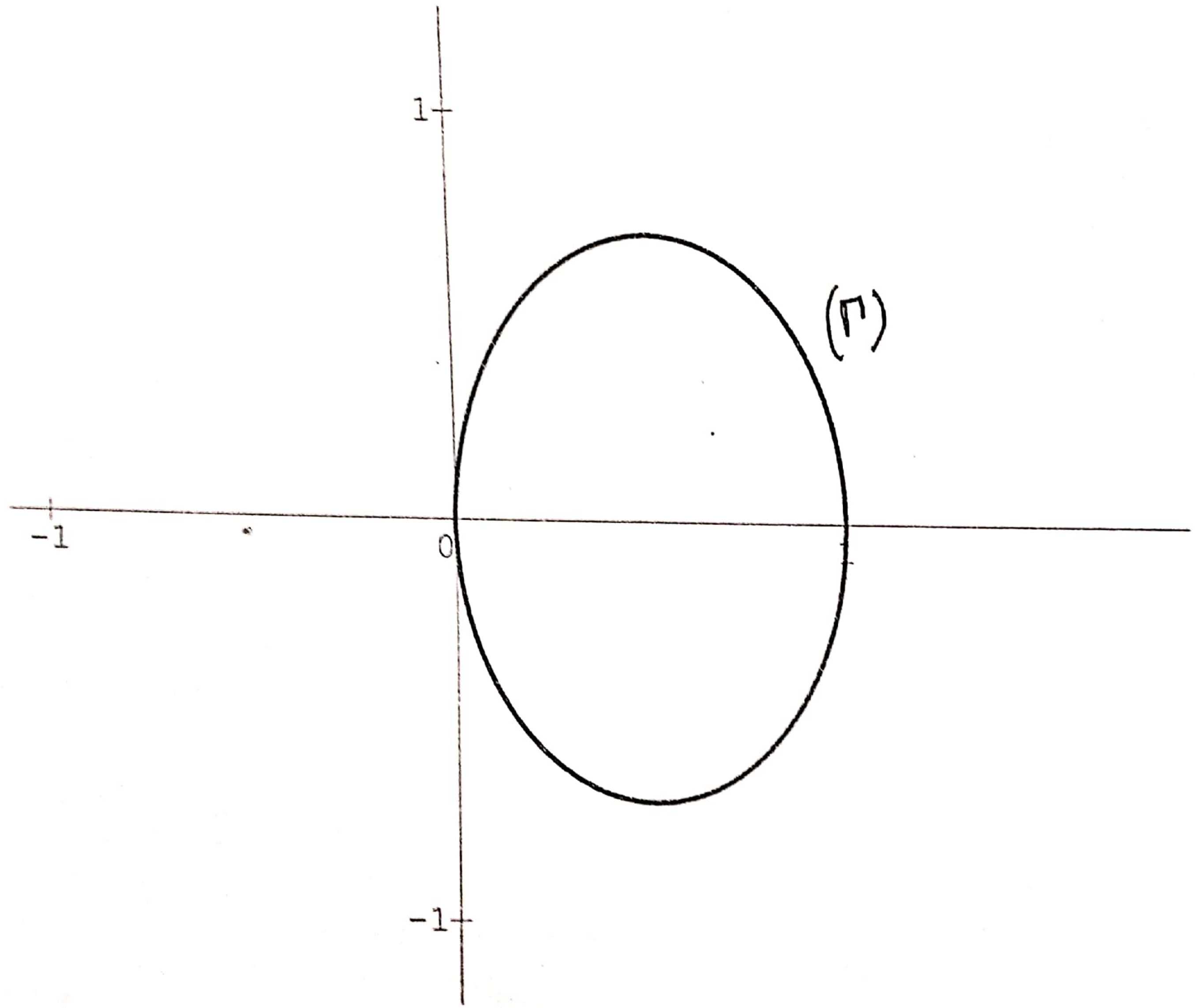
c) Nature et éléments caractéristiques de T :

Des questions précédentes, on déduit que T est la reflexion d'axe (D), avec $(D) : y = x+1$. (0,75pt)

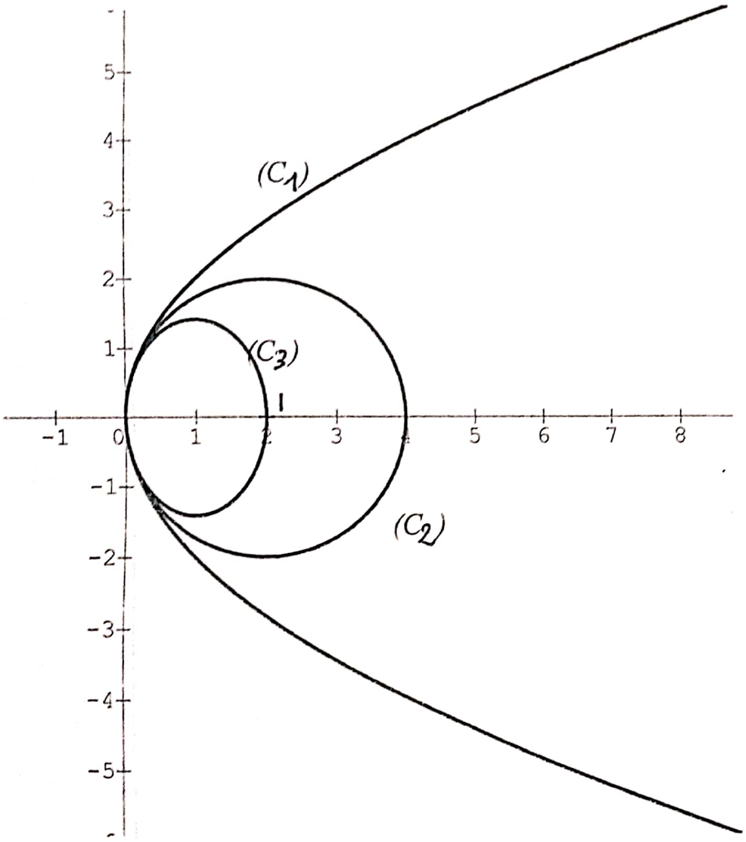
4°) Construction de l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par T :

(voir annexe.) (0,75pt)

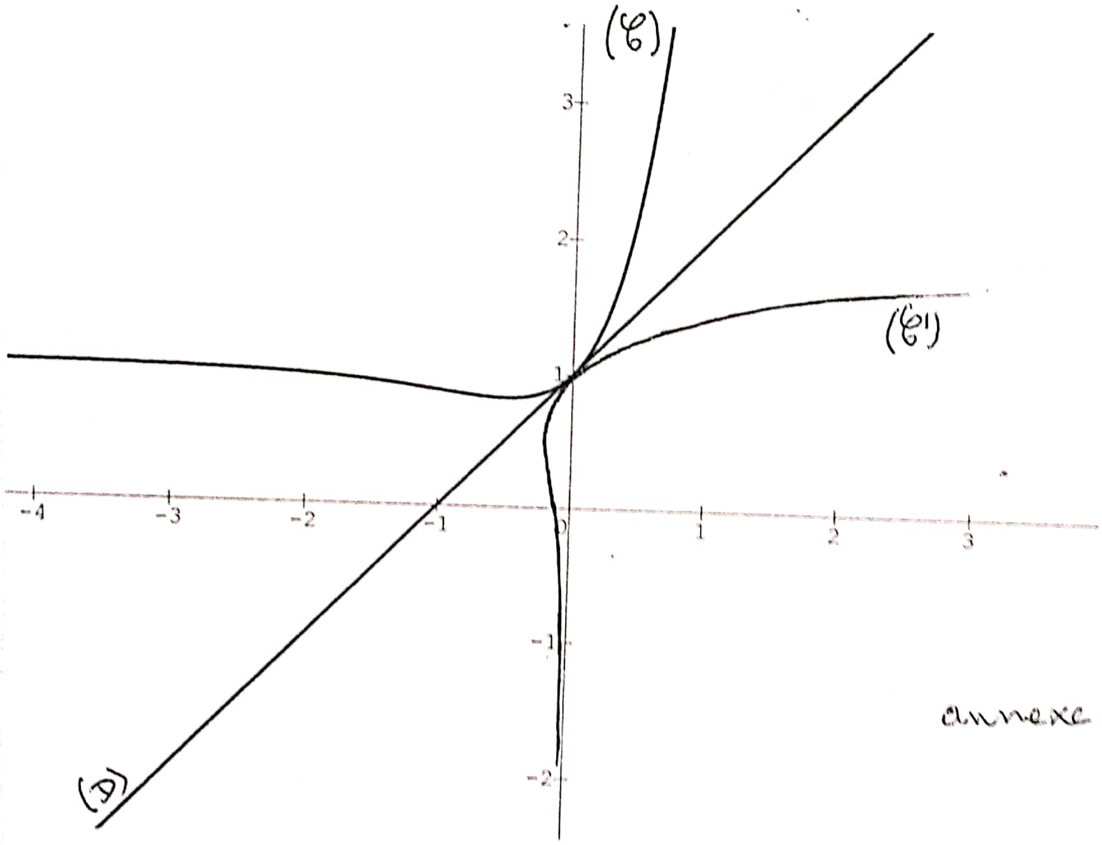
FIN



annexe 1



annexe 2



annexe 3