

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5  
Durée : 4 heures

**Fomesoutra.com**  
*ça soutra !*

**EXERCICE N°1** (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

- 1) Ecrire  $a = (3 - i)^2$  sous la forme algébrique. (0,25 pt)
- 2) On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$ 
  - a) Démontrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une unique solution imaginaire pure  $\alpha i$ ; ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ). (0,25 pt)
  - b) Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que :  
 $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$ . (0,5 pt)
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . (0,5 pt)
- 3) On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1 - i; 2 - 2i; 2i$ .
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère. (0,5 pt)
  - b) Quelle est la nature du triangle  $ABC$ ? Justifier. (0,5 pt)
  - c) Déterminer l'affixe du point  $D$ , image du point  $A$  par la translation du vecteur  $\vec{BC}$ . (0,25 pt)
- 4) On considère le point  $E$  d'affixe  $2 + 2i$ .
  - a) Placer le point  $E$  dans le repère. (0,25 pt)
  - b) Démontrer que les points  $A, B, C$  et  $E$  sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (1 pt)

**EXERCICE N°2** (4 points)

Le tableau suivant, extrait du rapport d'activités 2020 de l'Autorité de Régulation du secteur de l'Energie, donne la consommation d'électricité des Burkinabès en gigawattheure (GWh) entre 2015 et 2020.

Années	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6
Consommation en (GWh) $y_i$	1200	1317	1452	1568	1686	1858

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra 1 cm pour l'unité des rangs des années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 GWh sur l'axe des ordonnées, avec 1000 GWh à l'origine.

- 1) a) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique. (0,5 pt)  
 b) Un ajustement affine de ce nuage paraît-il possible ? Justifier. (0,5 pt)
- 2) Soient  $A$  le point moyen du sous nuage constitué par les trois premiers points et  $B$  le point moyen du sous nuage constitué par les trois derniers points.  
 a) Calculer les coordonnées de  $A$  et  $B$ . (1 pt)  
 b) Placer les points  $A$  et  $B$  dans le repère puis tracer la droite  $(AB)$ . (0,5 pt)  
 c) Déterminer une équation réduite de la droite de régression  $(AB)$ . (0,5 pt)
- 3) a) En admettant que cette évolution se poursuit, quelle sera en GWh la consommation d'électricité en 2023 ? (0,5 pt)  
 b) Déterminer l'année à laquelle cette consommation sera de 5641 GWh ? (0,5 pt)

### PROBLEME (12 points)

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} & \text{si } x \in ]-\infty; 2[ \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{si } x \in [2; +\infty[ \end{cases}$$

On appelle  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1cm.

- 1) Montrer que l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  est  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ . (0,25 pt)
- 2) a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . Interpréter géométriquement le résultat de la limite de  $f$  en  $-1$ .  
 b) Montrer que la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ . (0,5 pt)
- 3) a) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour  $x \in ]-\infty; 2[$  l'on ait  
 $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ . (0,5 pt)  
 b) En déduire que  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ . (0,5 pt)
- 4) Etudier la continuité de  $f$  en 2. (0,5 pt)
- 5) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  puis déduire la dérivabilité de  $f$  en 2. (1,5 pt)  
 b) Interpréter géométriquement les résultats précédents. (0,5 pt)

## Partie B

- 1) a) Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (1,75 pt)
- 2) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0. (0,5 pt)
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses. (0,5 pt)
- 4) Tracer  $(T)$ , les asymptotes, les demi-tangentes au point d'abscisse en 2 et  $(C)$ . (1 pt)

## Partie C

- 1) Donner une primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-\infty; -1[$ .  
*[On pourra utiliser 3) a) de la partie A]* (0,5 pt)
- 2) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = -5$  et  $x = -2$ .
  - a) Hachurer sur le graphique l'aire  $\mathcal{A}$ .
  - b) Calculer  $\mathcal{A}$  en  $\text{cm}^2$ .
- 3) On considère  $\Sigma$ , la portion du plan comprise entre les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 3$ , l'axe des abscisses et la courbe  $(C)$ . On note  $V$  le volume engendré par la rotation complète de  $\Sigma$  autour de l'axe des abscisses.  
Calculer  $V$  en  $\text{cm}^3$ . (0,5 pt)

## Partie D

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = |f(x)|$  et  $(\Gamma)$  sa représentation graphique.

- 1) Sans étudier la fonction  $g$ , tracer  $(\Gamma)$  à l'aide de  $(C)$ .  
Expliquer la construction. (0,5 pt)
- 2) Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur  $D_g$  de l'équation  $g(x) = m$  où  $m$  est un réel donné. (0,5 pt)

PROPOSITION DE COUVIGÉ  
Sujet n° 3

EXERCICE 1.

1. Écrivons  $a = (3-i)^2$  sous la forme algébrique.

$$a = 9 - 6i - 1 \Rightarrow a = 8 - 6i. \quad (0,25)$$

$$2) P(z) = z^3 + (-1+i)z^2 + (2+2i)z + 8i.$$

a. Démontrons que l'équation  $P(z) = 0$  admet une unique solution imaginaire pure  $\alpha i$ .

$$P(\alpha i) = 0 \Leftrightarrow (\alpha i)^3 + (-1+i)(\alpha i)^2 + (2+2i)\alpha i + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^3 + \alpha^2 - i\alpha^2 + 2\alpha i - 2\alpha + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha = 0 & (1) \\ -\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 8 = 0 & (2) \end{cases} \quad (0,25)$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2.$$

$\alpha = 0$  n'est pas solution de l'équation (2). Donc l'unique solution imaginaire pure de  $P(z) = 0$  est  $2i$ .

b. Déterminons les nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c).$$

(1/1,6)

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2ai^2z^2 - 2i^0bz - 2i^1c$$

$$= az^3 + (b - 2i^0a)z^2 + (c - 2i^1b)z - 2i^1c$$

Par identification on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b - 2i^0a = -1 + i^1 \\ c - 2i^1b = 2 + 2i^0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 + 2i^0 \\ c = -4 \end{array} \right. \quad (0,5)$$

e Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i^0)(z^2 + (-1 + i^1)z - 4) = 0$$

$$\Delta = (-1 + i^1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) \text{ de } z^2 - (1 + i^1)z - 4$$

$$\Delta = 8 - 6i^0 \Leftrightarrow \Delta = (3 - i^1)^2 = \delta^2$$

$$\delta = 3 - i^1 \text{ ou } \delta = -3 + i^1$$

$$z_1 = \frac{1 - 3i^1 - 3 + i^1}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - 3i^1 + 3 - i^1}{2}$$

$$\boxed{z_1 = -1 - i^1}$$

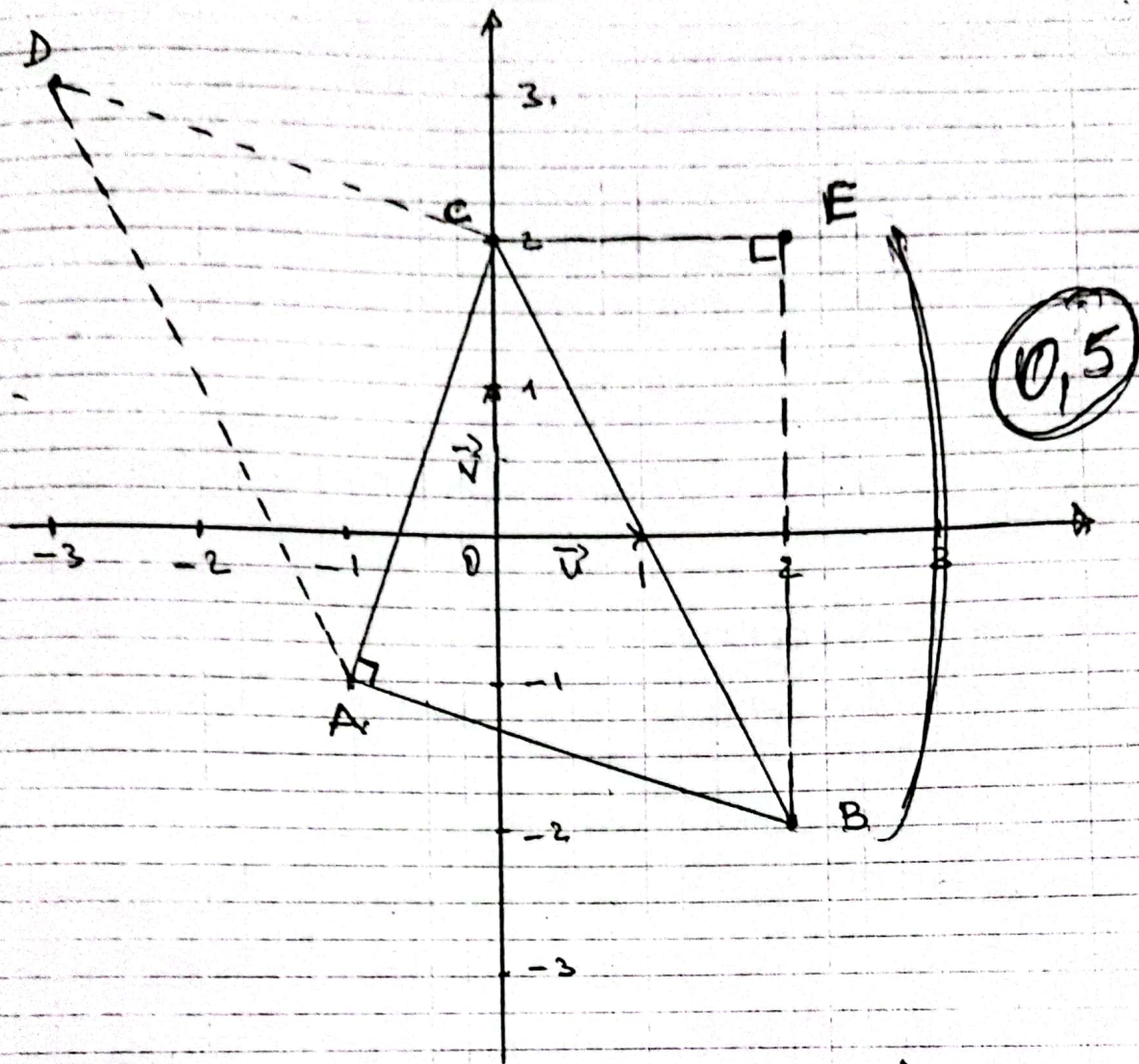
$$\boxed{z_2 = 2 - 2i^1}$$

$$\underline{S = \{2i^0, 2 - 2i^1, -1 - i^1\}} \quad (0,5)$$

3. On donne les points A; B et C  
d'affixes respectives  $-1 - i^1$ ;  $2 - 2i^1$  et  
 $2i^1$ .

a. Plaçons A; B et C dans le repère

(2/1.6)



b. Déterminons la nature du triangle ABC.

$$\bullet \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - 2i + 1 + i}{2i + 1 + i} = \frac{3 - i}{3i + 1} = -i$$

$\bullet \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$ . Donc ABC est un triangle rectangle en A.

$$\bullet \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC$$

On conclut alors que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

3/1,6

c. Déterminons l'affixe du point D, image de A par la translation du vecteur  $\vec{BC}$   $\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$ .

$$\Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$$

$$\Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$$

$$\Leftrightarrow z_D = 2i - 2 + 2i - 1 - i \Leftrightarrow z_D = -3 + 3i$$

0,25

4. a. Plaçons le point E d'affixe  $2 + 2i$  dans le repère (voir figure).

0,25

b. Démontrons que les points A, B, C et E sont situés sur un même cercle. Le triangle ABC étant rectangle en A, il est donc inscrit dans le cercle de diamètre [BC].

$$* \frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = \frac{2i - 2 - 2i}{2 - 2i - 2 - 2i} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

0,15

$$\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = -\frac{1}{2}i \in \mathbb{R}^*$$

alors le triangle BCE est rectangle en E. Donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [BC]. Ainsi les points A, B, C et E sont situés sur le cercle de diamètre [BC]. Son centre est le milieu de [BC].

4/10

\* Soit  $I$  ce milieu.  $z_I = \frac{z_B + z_C}{2}$

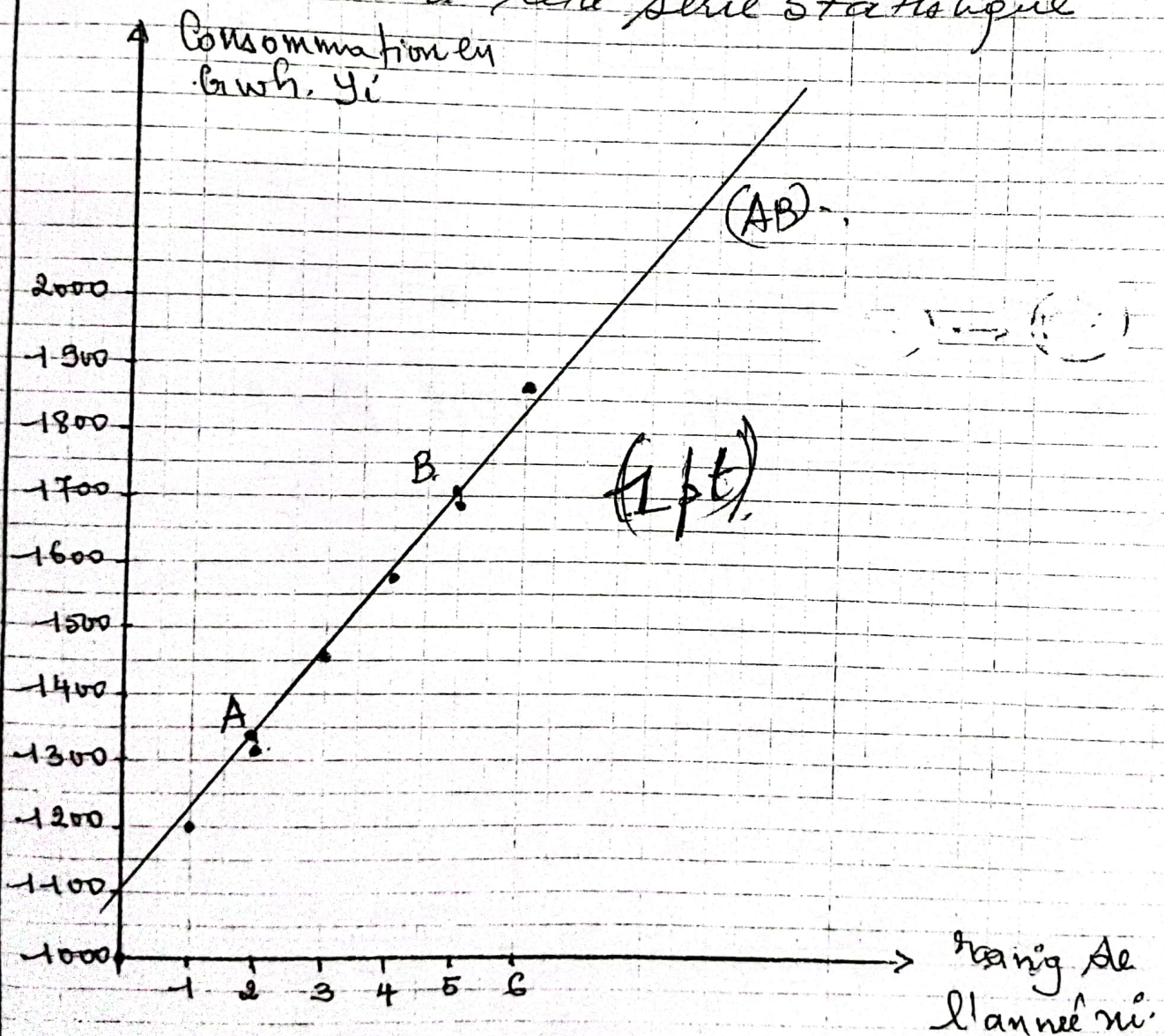
$$z_I = \frac{2 - 2i + 2i}{2} \Rightarrow z_I = 1. \quad (0,25)$$

Le rayon est  $r = Ic = |-1 + 2i|$ .

$$r = \sqrt{5} \quad (0,25)$$

### EXERCICE 2.

1 a. Représentons le nuage de points associé à cette série statistique



(5/16)

b. Un ajustement affine par moindres carrés semble possible, car le nuage de points semble avoir la direction d'une droite (0,15)

2. a. Calculons les coordonnées de A et B

$$x_A = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$y_A = \frac{1200+1317+1452}{3} \Rightarrow y_A = 1323$$

$$A(2; 1323) \quad (0,25 \text{ pt} \times 2)$$

$$x_B = \frac{4+5+6}{3} \Rightarrow x_B = 5$$

$$y_B = \frac{1568+1686+1858}{3} \Rightarrow y_B = 1704$$

$$B(5; 1704) \quad (0,25 \text{ pt} \times 2)$$

b. Plaçons les points A et B dans le repère (voir figure)

c. Déterminons l'équation réduite de la droite (AB).

$$(AB): y = mx + p \quad (m \in \mathbb{R}^*; p \in \mathbb{R})$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{1704 - 1323}{5 - 2}$$

$$m = 127$$

(6/10)

$$P = y_B + m x_B \dots$$

$$\Rightarrow P = -1704 - 127x + 5 \Rightarrow \underline{P = -1089}$$

Ainsi (AB):  $y = -127x + 1089$  (0,5 pt)

3. a. Déterminons la consommation d'électricité en 2023.

on a  $x = (2023 - 2015) + 1 = 9$   
 $x = 9$

$$\Rightarrow y = -127 \times 9 + 1089$$

$$y = 2212 \text{ GWh}$$

En 2023 la consommation sera estimée à 2212 GWh. (0,5 pt)

b Déterminons l'année à laquelle cette consommation sera de 5641 GWh.

Avec  $y = 5641$  on a:

$$5641 = 127x + 1089. \text{ Donc}$$

$$x = \frac{5641 - 1089}{127} \Rightarrow x = 36. \text{ (0,5 pt)}$$

$$(\text{Année} - 2015) + 1 = 36.$$

$$\Rightarrow \text{Année} = 2015 + 36 - 1 \Rightarrow \text{Année} = 2050.$$

En 2050. La consommation sera de 5641 GWh.

(7/16)

## PROBLEME.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 1} & \text{si } x \in ]-\infty; -2[ \\ \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{si } x \in ]2; +\infty[ \end{cases}$$

(C) désigne la Courbe représentative de  $f$ .

### PARTIE A.

1. Montrons que l'ensemble de définition  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

On a  $\forall x \in ]2; +\infty[$ ,  $x^2 - x - 2 \geq 0$  et  $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$  est définie sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$

D'où  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ . (0,25)

2. a. Calculons les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = +\infty.$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 4 = -3, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} x + 1 = 0^- \end{cases} \quad (0,25 \times 4)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 4 = -3, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+. \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} = +\infty.$$

(8/16)

• Interprétation de la  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

0,25

Alors la droite d'équation  $x = -1$  est une asymptote verticale à (Cf).

b. Montrons que la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote à (Cf) en  $+\infty$ .

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \frac{1}{2})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x - 2} - (x - \frac{1}{2})]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2 - (x - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{9}{4}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x - \frac{1}{2}} = 0$$

0,5

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} + x - \frac{1}{2} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \frac{1}{2})] = 0$  donc la droite d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$ .

3. Déterminons les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\forall x \in ]-\infty; 2[$  l'on ait

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + ax + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)x + b+c}{x+1}$$

par identification on a:

$$a = 1; \quad b = -1; \quad c = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$$

0,5

9/16

b) Deduisons-en que (D):  $y = x - 1$  est une asymptote à (Cf) en  $-\infty$ .

on a  $f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow f(x) - (x-1) = -\frac{3}{x+1}$

et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x+1} = 0$ , donc (D):  $y = x - 1$ .

est une asymptote oblique à (Cf) ou voisinage de  $-\infty$  (0,5)

4. Etudions la continuité de  $f$  en 2.

•  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0$ ,

•  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$

(0,5)

•  $f(2) = \sqrt{4 - 2 - 2} = 0$

On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$ , donc  $f$  est continue en 2.

5. a) Calculons:

•  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x + 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{4}{3}$  (0,5)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$  •  $f$  est donc dérivable à gauche de 2.

•  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} = +\infty$  (0,5)

car  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty. \end{array} \right.$

(10/16)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$ ,  $f$  n'est pas dérivable à droite de 2.

Conclusion:  $f$  n'est pas dérivable en 2. (0,5)

b. Interprétation

•  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ . La courbe (C) admet une semi-tangente à gauche du point d'abscisse 2 de coefficient directeur  $\frac{4}{3}$ . (0,25)

•  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$ . La courbe (C) admet à droite du point d'abscisse 2 une semi-tangente verticale. (0,25)

### Partie B

1. a. Étudions les variations de  $f$  sur  $] -\infty; -1[ \cup ] -1; 2[$  et sur  $] 2; +\infty[$ .

•  $\forall x \in ] -\infty; -1[ \cup ] -1; 2[$ ,  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \left( \frac{x^2 - 4}{x + 1} \right)'$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2 - 4)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2} \quad (0,25)$$

$\forall x \in ] -\infty; -1[ \cup ] -1; 2[$ ,  $(x+1)^2 > 0$ . Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $x^2 + 2x + 4$ .

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ . donc  $\forall x \in ] -\infty; -1[ \cup ] -1; 2[$ ,  $x^2 + 2x + 4 > 0$ . d'où  $f'(x) > 0$ . Ainsi  $f$  est

(17/16)

(0,25)

strictement croissante sur  $]-\infty; -1[$  et sur  $]-1; 2]$ .

•  $\forall x \in ]2; +\infty[$   $f$  est dérivable et

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$\forall x \in ]2; +\infty[$ ,  $2x - 1 > 0$  et  $\sqrt{x^2 - x - 2} > 0$ .

Donc  $\forall x \in ]2; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  d'où  $f$  est strictement croissante sur  $]2; +\infty[$ .

### Résumé

$\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$   $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante.

Tableau de variation.

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	$+$
$f$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2. Déterminons une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $x = 0$ .

$$(T_0) : y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$f'(0) = 4 \text{ et } f(0) = -4.$$

$$\Rightarrow (T_0) : y = 4x - 4.$$

12/16

3. Déterminons les coordonnées des point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Soient A et B les points.

•  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 2[$ ;  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x+1} = 0$ .

$\Rightarrow x = -2$ . Soit  $A(-2, 0)$ . (0,25)

•  $x \in ]2, +\infty[$ ;  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ .

$\Delta = 1 + 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$ .

$x_1 = -1 \notin ]2, +\infty[$ ;  $x_2 = 2$ .

Soit  $B(2, 0)$ . (0,25)

4) Tracer de la Courbe (C), les asymptotes, et les demi-tangentes en 2 (Voir annexe). (1pt)

### PARTIE C

1. Donnons une primitive F de f sur  $]-\infty, -1[$  on a  $f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ . Une primitive F

de f est  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 3 \ln(-x-1) + k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). (0,5)

2. A est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (D);  $x = -5$  et  $x = -2$  a. (Voir annexe). (0,25)

13/16

b. Calculons A.

$$A = \int_{-5}^{-2} [f(x) - (x-1)] dx. \text{ U.A.}$$

$$A = \int_{-5}^{-2} \left( x-1 - \frac{3}{x+1} - x+1 \right) dx. \text{ U.A.}$$

$$A = -3 \int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x+1}. \text{ U.A.}$$

$$A = -3 \left[ \ln(-x-1) \right]_{-5}^{-2}. \text{ U.A.}$$

$$= -3 (\ln(2-1) - \ln(5-1)) \cdot \text{U.A.} \quad (0,5)$$

$$A = -3 \cdot (-\ln 4) \Rightarrow \boxed{A = 6 \ln 2 \text{ cm}^2}$$

3. Soit  $\Sigma$  la portion du plan comprise entre  $x=2$ ,  $x=3$ , l'axe des abscisses et la courbe (c).  
Calculons le volume V. en  $\text{cm}^3$ .

$$V = \pi \int_2^3 [f(x)]^2 dx. \text{ U.V.}$$

$$V = \pi \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx. \text{ U.V.}$$

$$V = \pi \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_2^3. \text{ U.V.}$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{1}{3}(27) - \frac{9}{2} - 6 \right) - \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \right] \text{ U.V.}$$

$$= \pi \left( 9 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{8}{3} + 6 \right) \text{ U.V.} \quad (0,5)$$

$$= \left( \frac{9}{2} - \frac{8}{3} \right) \pi \Rightarrow \boxed{V = \frac{11}{6} \pi \text{ cm}^3}$$

(14/16)

## PARTIE D.

Soit  $g(x) = |f(x)|$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

- Tracé de la courbe  $(\Gamma)$ . (0,25)  
(voir annexe)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = -f(x) \text{ sur } ]-\infty; -2] \cup ]-1; 2[. \\ g(x) = f(x) \text{ sur } [-2; -1[ \cup ]2; +\infty[ \end{array} \right.$$

$$g(x) = f(x) \text{ sur } [-2; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

- Sur  $] -\infty; -2] \cup ] -1; 2[$   $(\Gamma)$  est la symétrique de  $(C)$  par rapport à l'axe des abscisses. (0,25)

- Sur  $[-2; -1[ \cup ]2; +\infty[$ ;  $(\Gamma)$  et  $(C)$  sont confondues.

2. Déterminons graphiquement le nombre de solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = m$ . (0,5)

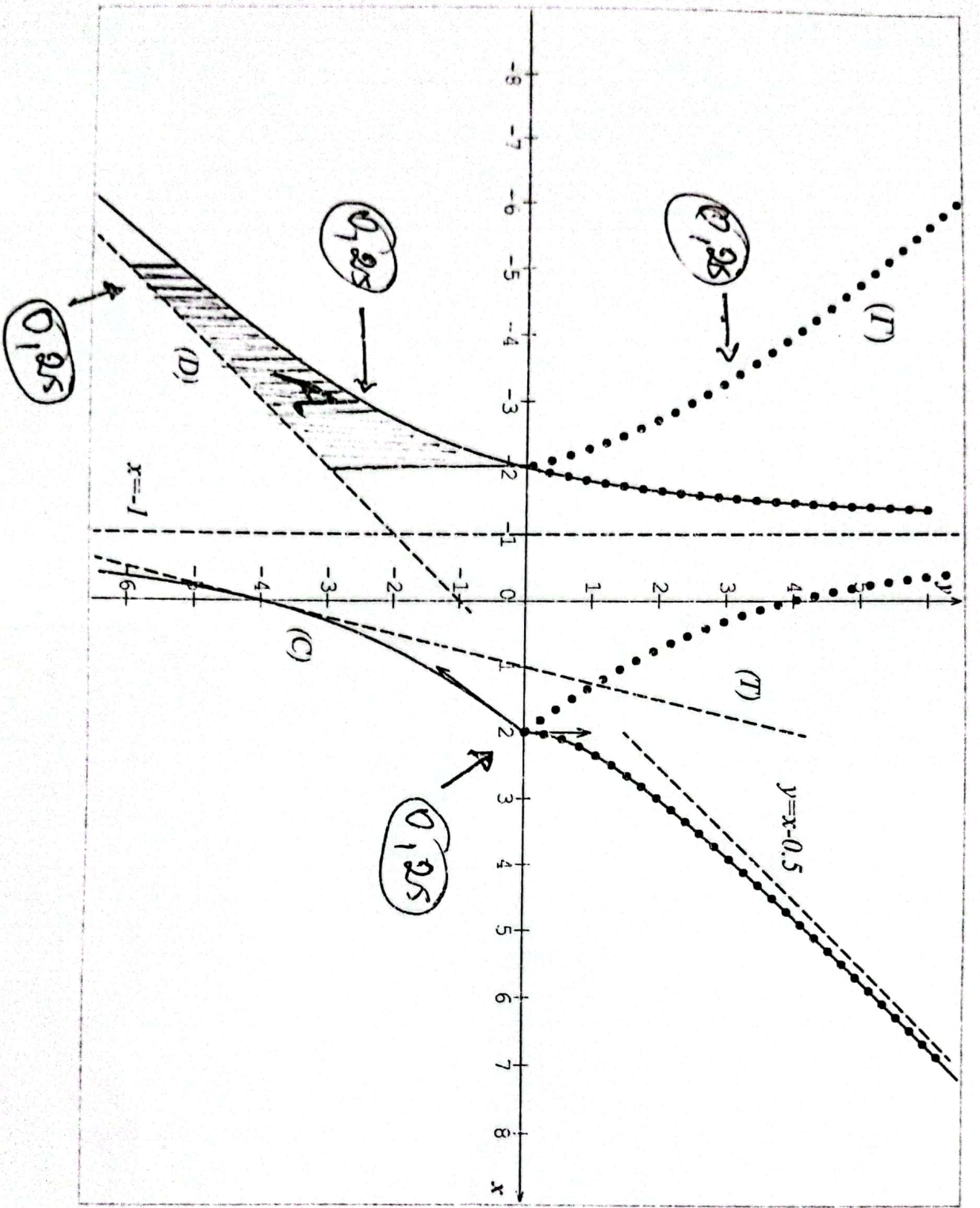
- Pour  $m < 0$ ;  $f(x) = m$  n'admet pas de solution

- Pour  $m = 0$ ;  $f(x) = m$  admet 2 solutions

- Pour  $m > 0$   $f(x) = m$  admet 4 solutions

15/16

Famille arithmétique



1 pt