UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

23 A23 A N°1
Durée : **4 heures**
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

Nota Bene :

Pour la correction des copies, il faudra tenir compte, pour chaque réponse à une question de l'épreuve de :

- ✓ *La justesse du raisonnement pour 50% de la note. Si le raisonnement est acceptable mais insuffisant, on donne 25% de la note.*
- ✓ *L'exactitude des résultats qui doivent être conformes aux résultats attendus et qui sont en adéquation avec le raisonnement pour 50% de la note.*

EXERCICE 1 (04 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = 1$, $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $Z_C = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $Z_D = 4$.

1. Soit f la similitude plane directe qui transforme A en C et D en B.

a) Déterminons les éléments géométriques caractéristiques de f.

$f : z' = az + b$
$f(A) = C \implies z_C = az_A + b$
$f(D) = B \implies z_B = az_D + b$

On en déduit que : $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_D} = \frac{\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 + i\sqrt{3}}{1-4} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

De plus, $z_C = az_A + b$ donc $b = 0$.

Par suite $f : z' = \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z$.

La similitude f a pour :

- ➢ centre O ;
- ➢ rapport $k = \left|\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$;
- ➢ angle $\theta = \arg\left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\pi}{3}[2\pi]$. **0,5 pt**

b) Déterminons l'image (C') du cercle (C) de centre A et de rayon 6 par f.

L'image (C') de (C) est le cercle de centre $f(A) = C$ et de rayon $R' = \frac{1}{2} \times 6 = 3$. **0,25 pt**

2. On considère la courbe $\mathcal{E}$ d'équation : $x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 16$.

a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques (excentricité, axes, directrices, foyers, et sommets) de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ c'est à dire $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$.

L'équation de $\mathcal{E}$ est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 4$ et $b = 2\sqrt{3}$.

La courbe $\mathcal{E}$ est donc une ellipse. **0,25 pt**

Posons $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$

Les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$ sont :

- Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$
- Axe focal : $y = 0$, axe non focale : $x = 0$;
- Directrices : $(D_1) : x = \frac{a^2}{c} = \frac{16}{2} = 8$ et $(D_2) : x = -\frac{a^2}{c} = -8$;
- Foyers : $F_1(2\,,0)$, $F_2(-2\,,0)$;
- Sommets $A_1(4\,,0)$, $A_2(-4\,,0)$, $B_1(0\,,2\sqrt{3})$ et $B_2(0\,,-2\sqrt{3})$. **0,5 pt**

b) Déterminons l'équation de la tangente $(\mathbb{T})$ à $\mathcal{E}$ au point $E(2,3)$. **0,25 pt**

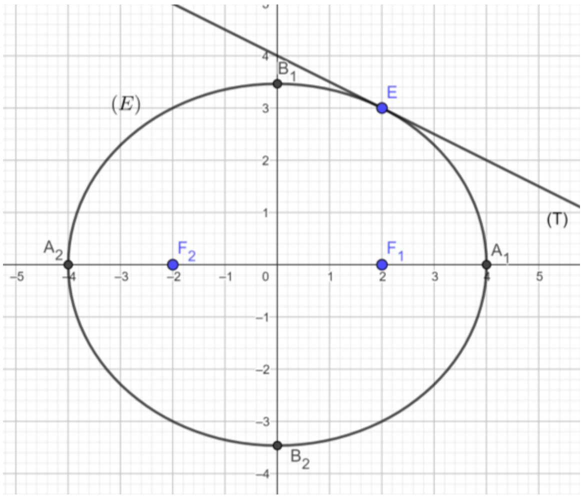
La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ à $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$ a pour équation $\frac{xx_0}{4^2} + \frac{yy_0}{(2\sqrt{3})^2} = 1$.

Donc, $(\mathbb{T})$: $\frac{2x}{4^2} + \frac{3y}{(2\sqrt{3})^2} = 1$, c'est-à-dire : $(\mathbb{T}) : x + 2y - 8 = 0$.

Autre méthode :

On peut aussi considérer $(\mathbb{T})$ comme la tangente en E à la courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{16 - x^2}$

c) Traçons soigneusement $\mathcal{E}$, $(\mathbb{T})$



0,5 pt

3. On considère la courbe (Γ) d'équation : $15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} - 768 = 0$.

a) Montrons que (Γ) est l'image réciproque de $(\mathcal{E})$ par f.

Soit $M(z = x + iy)$ et $M'(z' = x' + iy')$.

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}\,y) \\ y' = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}\,x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - \sqrt{3}\,y' \\ y = \sqrt{3}\,x' + y' \end{cases}$$

0,25 pt

Déterminons l'image réciproque $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$

$M(x,y) \in \mathcal{E}_0 \Leftrightarrow \exists N(x', y') \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = N$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'^2+\frac{4}{3}y'^2=16 \\ x'=\frac{1}{4}(x+\sqrt{3}\,y) \\ y'=\frac{1}{4}(-\sqrt{3}\,x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2+13y^2-2xy\sqrt{3}-768=0 \\ x'=\frac{1}{4}(x+\sqrt{3}\,y) \\ y'=\frac{1}{4}(-\sqrt{3}\,x+y) \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{E}_0=(\boldsymbol{\Gamma}) : 15x^2+13y^2-2xy\sqrt{3}-768=0$. **0,5 pt**

b) Déduisons-en que (**Γ**) est une conique dont on déterminera la nature et ses éléments caractéristiques (excentricité, axes, directrices, foyers, et sommets).

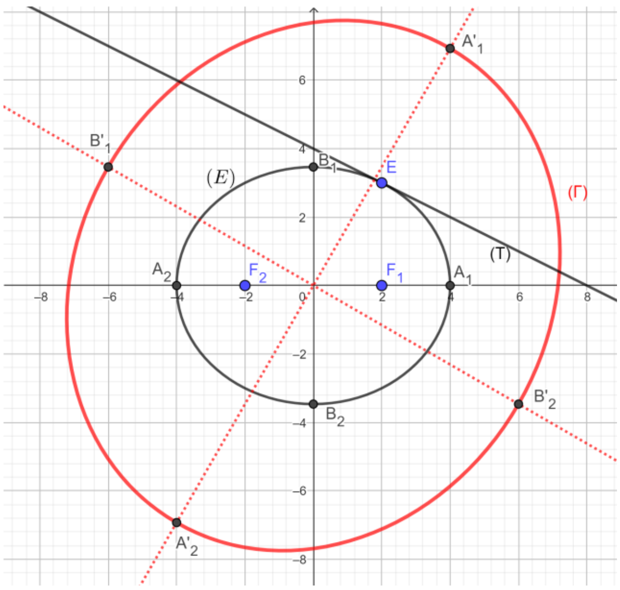
La courbe (Γ) est l'image de l'ellipse $\mathcal{E}$ par la similitude f^{-1}. Elle est donc une ellipse.

0,25 pt

Ses éléments caractéristiques sont :

- Excentricité : $e'=e=\frac{1}{2}$
- Axe focal $-\sqrt{3}\,x+y=0$, Axe non focale $x+\sqrt{3}y=0$
- Directrices : $(D'_1) :\ x+\sqrt{3}y=32$ et $(D'_2) : x+\sqrt{3}y=-32$
- Foyers : $F'_1(2\,,2\sqrt{3})$, $F'_2(-2\,,-2\sqrt{3})$,
- Sommets $A'_1(4\,,4\sqrt{3})$, $A'_2(-4\,,-4\sqrt{3})$, $B'_1(-6\,,2\sqrt{3})$ et $B'_2(6\,,-2\sqrt{3})$. **0,5 pt**

c) Traçons soigneusement (**Γ**). **0,5 pt**



EXERCICE 2 : (5 points)

1. Une urne contient 15 jetons indiscernables au toucher sur lesquels on a inscrit des entiers naturels en base 2, 5, 16 et 10. L'urne contient 2 jetons portant le nombre $a=\overline{1001}^{\,2}$, 4 jetons portant le nombre $b=\overline{431}^{\,5}$, 6 jetons portant le nombre $c=\overline{7E6}^{\,16}$ et 3 jetons portant le nombre $d=2023$.

a) Déterminons les nombres a, b et c dans la base décimale.

- $\boldsymbol{a} = \overline{\mathbf{1001}}^{\,\mathbf{2}} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = \mathbf{9}$ **0,25pt**
- $\boldsymbol{b} = \overline{\mathbf{431}}^{\,\mathbf{5}} = 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 = \mathbf{116}$ **0,25pt**
- $\boldsymbol{c} = \overline{\boldsymbol{7E6}}^{\,\mathbf{16}} = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 6 = \mathbf{2022}$ **0,25pt**

b) Déterminons le reste de la division euclidienne par 7 du nombre inscrit sur chacun des jetons.

- $\boldsymbol{a} \equiv \mathbf{2}[7]$ **0,25pt**
- $\boldsymbol{b} \equiv \mathbf{4}[7]$ **0,25pt**
- $\boldsymbol{c} \equiv \mathbf{6}[7]$ **0,25pt**
- $\boldsymbol{d} = \mathbf{2023} \equiv \mathbf{0}[7]$ **0,25pt**

2. On pose $S_n = 2^n + 4^n + 6^n$ où n est un entier naturel.

a) Démontrons que $S_{6n} \equiv 3[7]$.

$S_{6n} = 2^{6n} + 4^{6n} + 6^{6n}$

$\quad = (2^6)^n + (4^6)^n + (6^6)^n$

Or,

- $2^6 \equiv \mathbf{1}[7]$,
- $4^6 = 2^6 \times 2^6 \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{1}[7] \equiv \mathbf{1}[7]$
- $6^6 = 2^6 \times 3^6 = 2^6 \times 729 = 2^6 \times (104 \times 7 + 1) \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{1}[7] \equiv \mathbf{1}[7]$

Donc

$$S_{6n} \equiv \mathbf{1^n + 1^n + 1^n}[7]$$
$$S_{6n} \equiv \mathbf{3}[7]$$ **0,75pt**

b) Déterminons le reste de la division euclidienne de S_{2023} par 7.

On a : $2023 = 6 \times 337 + 1$ donc $S_{2023} = S_{6 \times 337 + 1}$

$$= 2^{(6\times337+1)} + 4^{(6\times337+1)} + 6^{(6\times337+1)}$$

$$= [(2^6)^{337} \times 2] + [(4^6)^{337} \times 4] + [(6^6)^{337} \times 6]$$

$$\equiv (\mathbf{1} \times \mathbf{2}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{4}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{6})\ [7]$$

$$\equiv \mathbf{2 + 4 + 6}\ [7]$$

$$\equiv \mathbf{12}\ [7]$$

$$\equiv \mathbf{5}\ [7]$$

Par suite le reste de la division euclidienne de A_{2023} par 7 est 5. **0,5 pt**

3. L'urne précédente est utilisée dans un jeu dont la règle est la suivante :
Le joueur tire un jeton, note le numéro et le remet dans l'urne avant de procéder à un second tirage. Pour chaque tirage, le joueur gagnera un nombre de points égal au reste, dans la division euclidienne par 7, du nombre inscrit sur le jeton.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de points obtenus par le joueur à l'issue des deux tirages.

a) Déterminons la loi de probabilité de X.

	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	4	6	8
4	4	6	8	10
6	6	8	10	12

Les valeurs possibles de X sont **0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 et 12**. **0,25 pt**

$p(X=0)=\frac{3^2}{15^2}=\frac{9}{225}$, $p(X=2)=\frac{2^1\times3^1\times2}{15^2}=\frac{12}{225}$, $p(X=4)=\frac{2^2+4^1\times3^1\times2}{15^2}=\frac{28}{225}$

$p(X=6)=\frac{6^1\times3^1\times2+4^1\times2^1\times2}{15^2}=\frac{52}{225}$, $p(X=8)=\frac{6^1\times2^1\times2+4^2}{15^2}=\frac{40}{225}$

$p(X=10)=\frac{6^1\times4^1\times2}{15^2}=\frac{48}{225}$ $p(X=12)=\frac{6^2}{15^2}=\frac{36}{225}$. **0,5 pt**

Récapitulation

x_i(valeurs prises par X)	0	2	4	6	8	10	12
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{225}$	$\frac{12}{225}$	$\frac{28}{225}$	$\frac{52}{225}$	$\frac{40}{225}$	$\frac{48}{225}$	$\frac{36}{225}$

0,25 pt

b) Calculons son espérance mathématique E(X).

$E(X)=\left(0\times\frac{9}{225}\right)+\left(2\times\frac{12}{225}\right)+\left(4\times\frac{28}{225}\right)+\left(6\times\frac{52}{225}\right)+\left(8\times\frac{40}{225}\right)+\left(10\times\frac{48}{225}\right)+\left(12\times\frac{36}{225}\right).$

$$\mathbf{E(X)=\frac{112}{15}}$$ **0,5pt**

c) Calculer la probabilité d'avoir un gain qui dépasse l'espérance.

$$\boldsymbol{p\left(X>\frac{112}{15}\right)=p(X=8)+p(X=10)+p(X=12)}$$
$$\boldsymbol{=\frac{40}{225}+\frac{48}{225}+\frac{36}{225}}$$
$$\boldsymbol{=\frac{124}{225}}$$ **0,5pt**

PROBLEME (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique 3 cm.

PARTIE A (2,5 pts)

On considère la fonction f_m à variable réelle définie par : $f_m(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+x}{m-x}\right)$ où m est un paramètre réel non nul. On note C_m la courbe représentative de f_m dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminons le domaine de définition D_m de f_m.

$D_m=]-|m|\,,|m|[$

Si $m<0$, $D_m=]m\,,-m[$. Si $m>0$, $D_m=]-m\,,m[$. **0,25 pt**

2. a) Montrons que f_m est impaire.

Pour tout $x\in D_m$, $-x\in D_m$

$f_m(-x)=\frac{1}{2}ln\left(\frac{m-x}{m+x}\right)=-\frac{1}{2}ln\left(\frac{m+x}{m-x}\right)$

$\boldsymbol{f_m(-x)=-f_m(x)}$ **, d'où $\boldsymbol{f_m(x)}$ est impaire.** **0,25 pt**

b) Calculons les limites aux bornes de D_m.

- Si $m<0$, $\lim\limits_{x\to m^+} f_m(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to -m^-} f_m(x)=-\infty$ **0,25 pt**
- Si $m>0$, $\lim\limits_{x\to -m^+} f_m(x)=-\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to m^-} f_m(x)=+\infty$. **0,25 pt**

c) Montrons que pour tout réel m et pour tout réel x de D_m, $f_{-m}(x)=-f_m(x)$.

$\forall\, x\in D_m$, $f_{-m}(x)=\frac{1}{2}ln\left(\frac{-m+x}{-m-x}\right)=\frac{1}{2}ln\left(\frac{m-x}{m+x}\right)=-\frac{1}{2}ln\left(\frac{m-x}{m+x}\right)=-f_m(x).$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_m},\ \boldsymbol{f_{-m}(x) = -f_m}$ **(x).** **0,25 pt**

3. On suppose dans cette question que m est un réel strictement positif.

a) Etudions les variations de f_m.

La fonction f_m est dérivable sur $]-m\ ,m[$ et $\forall x \in\,]-m\,,m[$, $\boldsymbol{f'_m(x) = \dfrac{m}{(m-\ x)(m+\ x)}}$

$\forall\ \ x \in\,]-m\ ,m[\ ,\ f'_m(x) > 0$ donc f_m est strictement croissante. **0,5 pt**

b) Montrons que f_m réalise une bijection de D_m sur un intervalle J à préciser.

Sur $]-m\ ,m[$, f_m est continue et strictement croissante, donc f_m réalise une bijection de $]-m\ ,m[$ sur J= $\mathbb{R}$. **0,25 pt**

c) Soit $f_m{}^{-1}$ la bijection réciproque de f_m. Définissons la fonction $f_m{}^{-1}$.

Soit $x \in\,]-m\ ,m[$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_m(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2} ln\left(\frac{m\ +\ x}{m\ -\ x}\right) = y \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{m\ +\ x}{m\ -\ x}\right) = e^{2y} \\ &\Leftrightarrow\ x(1 + e^{2y}) = me^{2y} - m \\ &\Leftrightarrow x = \frac{m(e^{2y}\ -\ 1)}{1+e^{2y}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(f_m)^{-1}} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to\, \boldsymbol{]-m\ ;\ m[} \\ \boldsymbol{x \mapsto (f_m)^{-1}(x) = \dfrac{m(e^{2x}\ -\ \ 1)}{1 + e^{2x}}} \end{array}$$

0,5 pt

PARTIE B (2,5 pts)

1. Dressons le tableau de variations de f_1.

x	-1		1
$f'_1(x)$		$+$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 pt

2. Soit (T) la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0. Etudions la position de (C_1) par rapport à (T).

La droite (T) a pour équation $y = x$. **0,25 pt**

Posons $g(x) = f_1(x) - x$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;1[$ et $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)(1+x)}}$

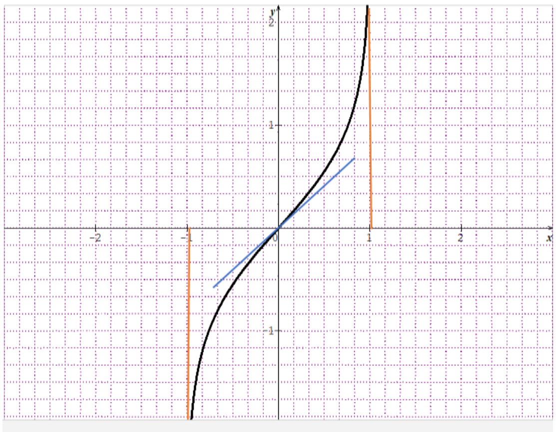
La fonction $\boldsymbol{g}$ **est strictement croissante sur** $\boldsymbol{]-1\,;1[}$**.** **0,5 pt**

De plus, $g(0) = 0$. Donc, sur $]-1\,;0[$, $g(x) < 0$ et sur $]\,0;1[$ $g(x) > 0$.

Ainsi :

- Sur $\boldsymbol{]-1\,,0[}$, $\boldsymbol{f_1(x) - x < 0}$**, d'où** $\boldsymbol{(C_1)}$ **est en dessous de (T).**
- Sur $\boldsymbol{]-1\,,0[}$, $\boldsymbol{f_1(x) - x > 0}$**, d'où** $\boldsymbol{(C_1)}$ **est au-dessus de (T).** **0,25 pt**

3. Construisons dans le même repère (C_1) et (T).



0,5pt

4. Comment obtient-on les courbes $C_{(-1)}$ et $C_{(f_1)^{-1}}$ de $(f_1)^{-1}$ à partir de (C_1) ?

On a **:**

- f_{-1} (x) $= -f_1(x)$, donc (C_{-1}) est obtenue à partir de (C_1) par la symétrie axiale d'axe la droite (Ox). **0,25 pt**
- $(C_{f_1^{-1}})$ est obtenue à partir de $(C_1.)$ par la symétrie axiale d'axe la droite $y = x$. **0,25 pt**

PARTIE C (3,5 pts)

1. Soit Φ une primitive de $(f_1)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrons que $\Phi \circ f_1$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xf_1{}'(x)$ sur $]-1\,,1[$.

La fonction $\Phi \circ f_1$ est dérivable sur $]-1\,,1[$ car c'est la composée de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in]-1\,;1[, (\Phi \circ f_1\,)'(x) = \Phi'\big(f_1(x)\big) \times f_1'(x) = f_1{}^{-1}\big(f_1(x)\big) \times f_1'(x) = \boldsymbol{xf_1{}'(x)}\cdot$

Par suite **$\Phi \circ f_1$ est une primitive** de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto xf_1{}'(x)}$ **sur** $\boldsymbol{]-1\,,1[}$. **0,25 pt**

b) Démontrons alors que pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle $]-1\,,1[$, on a :

$$\int_{f_1(a)}^{f_1(b)} (f_1)^{-1}(t)dt = \int_a^b tf_1{}'(t)dt.$$

Soient a et b deux éléments de $\boldsymbol{]-1\,,1[}$.

$$\int_{f_1(a)}^{f_1(b)} f_1{}^{-1}(t)dt = [\Phi(t)]_{f_1(a)}^{f_1(b)} = \Phi \circ f_1(b) - \Phi \circ f_1(a) = \int_a^b (\Phi \circ f_1)'(t)dt = \int_a^b tf_1{}'(t)dt$$

0,5 pt

c) Déduisons-en que pour tout x de $]-1\,,1[$, $\int_0^{f_1(x)} (f_1)^{-1}(t)dt = \int_0^x tf_1{}'(t)dt.$

On a : $\int_{f_1(a)}^{f_1(b)} f_1{}^{-1}(t)dt = \int_a^b tf_1{}'(t)dt$

Pour $a = 0$ et $b = x$ on a : $\boldsymbol{\int_0^{f_1(x)} f_1{}^{-1}(t)dt = \int_0^x tf_1{}'(t)dt.}$ **0,25 pt**

2. Soit x un élément de $]-1\,,1[$.

a) Démontrons que $\int_0^x tf_1{}'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

On a : $f'_1(t) = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{1-t^2}$

$$\int_0^x tf_1{}'(t)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Donc $\boldsymbol{\int_0^x tf_1{}'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2).}$ **0,5 pt**

b) Déduisons-en que pour tout élément y de IR, $\int_0^y f_1{}^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et x le réel de de $]-1\,;1[$ tel que $y = f_1(x)$.

On a alors $x = f_1{}^{-1}(y) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$$\int_0^y f_1{}^{-1}(t)dt = \int_0^x t f_1{}'(t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \left(\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4e^{2y}}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2y} + 1}{2e^y}\right)^2$$

$$= \ln\left(\frac{e^{2y} + 1}{2e^y}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

Par suite $\boldsymbol{\int_0^y f_1{}^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)}$. **0,5 pt**

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_{(f_1)^{-1}})$ de $(f_1)^{-1}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses. Calculons $\mathcal{A}$.

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \int_0^1 f_1{}^{-1}(t)dt \times ua = \ln\left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2}\right) \times 9\ \mathrm{cm}^2}$. **0,5 pt**

3. Soit x un réel et A le point de $(C_{(f_1)^{-1}})$ d'abscisse $\ln\sqrt{2}$

a) Montrons que pour tout réel x on a $\left((f_1)^{-1}(x)\right)' = 1 - \left((f_1)^{-1}(x)\right)^2$.

On avait $f_m{}^{-1}(x) = \frac{m(e^{2x} - 1)}{1+e^{2x}}$ d'où $f_1{}^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

La fonction $f_1{}^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$,

$(f_1{}^{-1})'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

$(f_1{}^{-1})'(x) = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$.

D'autre part : $1 - \left[f_1{}^{-1}(x)\right]^2 = \left(1 - f_1{}^{-1}(x)\right)\left(1 + f_1{}^{-1}(x)\right)$

$$= \left(\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\right)\left(\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$1 - \left[f_1{}^{-1}(x)\right]^2 = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$.

Par suite $\boldsymbol{\left(f_1{}^{-1}(x)\right)' = 1 - \left[f_1{}^{-1}(x)\right]^2}$. **0,5 pt**

b) Déduisons-en le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{OA}$ de $(C_{(f_1)^{-1}})$ autour de l'axe des abscisses.

V$= \pi \int_0^{\ln(\sqrt{2})} \left[f_1{}^{-1}(x)\right]^2 dx \times uv$ (avec uv =unité de volume = $27cm^3$). **0,25 pt**

V$= \pi\left[x - f_1{}^{-1}(x)\right]_0^{\ln(\sqrt{2})} = \pi\left[ln\sqrt{2} - f_1{}^{-1}(ln\sqrt{2})\right] \times uv = \pi\left(ln\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \times uv$

V$\boldsymbol{= \pi\left(\ln\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \times uv}$. **0,25 pt**

PARTIE D (2,75 pts)

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $F_n(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n dt$.

1. a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a : $0 \leq F_n(x) \leq x\left(f_1^{-1}(x)\right)^n$.

On a : f_1^{-1} est croissante sur $[0\,;+\infty[$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq f_1^{-1}(t) \leq f_1^{-1}(x)$

$\Rightarrow 0 \leq [f_1^{-1}(t)]^n \leq [f_1^{-1}(x)]^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n dt \leq \left(f_1^{-1}(x)\right)^n \int_0^x dt$

D'où : $\boldsymbol{0 \leq F_n(x) \leq x\left(f_1^{-1}(x)\right)^n}$. **0,5 pt**

b) Déduisons-en $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ (x réel positif fixé).

On a : $0 \leq F_n(x) \leq x\left(f_1^{-1}(x)\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_1^{-1}(x)\right)^n = 0$, car $f_1^{-1}(x) \in]-1,1[$.

Par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0}$. **0,5 pt**

2. a) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{n+1}$.

$F_{n+2}(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^{n+2} dt = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n \times \left(f_1^{-1}(t)\right)^2 dt$

$F_{n+2}(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n \times (1 - (f_1^{-1}(t))')dt$

$F_{n+2}(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n dt - \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n \times (f_1^{-1}(t))'dt$

D'où $\boldsymbol{F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{n+1}}$. **0,5 pt**

d) Déduisons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$.

On pose P_n : $F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$

- P_1 est vrai. En effet,

$$F_2(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^2 dt = \int_0^x (1 - ((f_1)^{-1}(t))')dt = \left[t - f_1^{-1}(t)\right]_0^x$$
$$= x - f_1^{-1}(x)$$
$$= x - \sum_{p=1}^1 \left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$$

Car, pour $p = 1$, $\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1} = f_1^{-1}(x)$

- Supposons P_k vrai et montrons que P_{k+1} vrai.

$$F_{2k+2}(x) = F_{2k}(x) - \frac{1}{2k+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2k+1}$$
$$= x - \sum_{p=1}^{k}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1} - \frac{1}{2k+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2k+1}$$
$$= x - \sum_{p=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$. **0,5 pt**

Autre méthode :

La méthode d'itération peut être acceptée, même si elle est moins rigoureuse.

On donnera 0,25 pt au lieu de 0,5 pt.

On a :

$F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{n+1}$

$F_4(x) = F_2(x) - \frac{1}{3}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{3}$

$F_6(x) = F_4(x) - \frac{1}{5}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{5}$

$F_8(x) = F_6(x) - \frac{1}{7}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{7}$

……………………………………

$F_{2p}(x) = F_{2p-2}(x) - \frac{1}{2p-1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$

………………………………………

$F_{2n}(x) = F_{2n-2}(x) - \frac{1}{2n-1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2n-1}$

En faisant la somme membre à membre et après simplification on obtient :

$F_{2n}(x) = F_2(x) - \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$, or $F_2(x) = x - f_1^{-1}(x)$

$F_{2n}(x) = x - f_1^{-1}(x) - \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$.

D'où $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ $\boldsymbol{F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}}$. **0,25 pt**

3. a) Montrons que pour tout $x \in [0\,,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} = f_1(x) - F_{2n}(f_1(x)).$$

Pour tout $x \in [0\,,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en composant F_{2n} avec f_1 on aura :

$F_{2n}(f_1(x)) = f_1(x) - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(f_1(x))\right)^{2p-1}$

$F_{2n}(f_1(x)) = f_1(x) - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)x^{2p-1}$

$\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)x^{2p-1} = f_1(x) - F_{2n}(f_1(x))$

Or $\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)x^{2p-1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

Donc $\boldsymbol{x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} = f_1(x) - F_{2n}(f_1(x))}$. **0,5 pt**

b) Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 3^{2n-1}}\right)$.

En prenant $x = \frac{1}{3}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 3^{2n-1}}\right) = f_1\left(\frac{1}{3}\right) - \lim_{n\to+\infty} F_{2n}\left(f_1\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= ln\left(\sqrt{2}\right) - \lim_{n\to+\infty} F_{2n}\left(ln\sqrt{2}\right) = ln\sqrt{2}.$$

D'où $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 3^{2n-1}}\right) = \ln\sqrt{2}}$. **0,25 pt**