

CORRIGE DU BACCALAUREAT TECHNIQUE 2024
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SÉRIE E

EXERCICE N° 1 : (04 points)

$$(E) : z^2 - (4\sin\alpha)z + 4 = 0$$

a) Résolution dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E).

$$\Delta' = (-2\sin\alpha)^2 - (1)(4) \Rightarrow \Delta' = 4\sin^2\alpha - 4 \Rightarrow \Delta' = -4(1 - \sin^2\alpha) \\ \Rightarrow \Delta' = -4\cos^2\alpha \Rightarrow \Delta' = 4i^2\cos^2\alpha \Rightarrow \Delta' = (2i\cos\alpha)^2.$$

$$\boxed{\begin{cases} z_1 = 2\sin\alpha + 2i\cos\alpha \\ z_2 = 2\sin\alpha - 2i\cos\alpha \end{cases}}$$

b) Donnons la forme exponentielle de z_1 et z_2

$$z_1 = 2\sin\alpha + 2i\cos\alpha \Rightarrow z_1 = -2i^2\sin\alpha + 2i\cos\alpha \\ \Rightarrow z_1 = 2i^2\sin(-\alpha) + 2i\cos(-\alpha) \Rightarrow z_1 = 2i[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)] \\ \Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\alpha} \Rightarrow z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$$

$$\text{D'où } \boxed{z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}}$$

$$z_2 = 2\sin\alpha - 2i\cos\alpha \Rightarrow z_2 = -2i^2\sin\alpha - 2i\cos\alpha \\ \Rightarrow z_2 = -2i(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow z_2 = 2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$$

$$\text{D'où } \boxed{z_2 = 2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}}$$

c) Calculons : $S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

$$S = \frac{e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}}{2} + \frac{e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})}}{2} \Rightarrow S = \frac{e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})}}{2} \Rightarrow S = \frac{2\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{2} \\ \Rightarrow S = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$$

$$\text{D'où } \boxed{S = \sin\alpha}$$

2) $(E') : 17x - 40y = 1$

a) Montrons que (E') admet des solutions dans \mathbb{Z}^2

a	40	17	6	5
b	17	6	5	1
r	6	5	1	0
q	2	2	1	5

$PGCD(40; 17) = 1$. Donc (E) admet des solutions dans \mathbb{Z}^2

b) Détermination de la solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E')

$$\begin{aligned}
 1 &= 6 - 5 \text{ or } 5 = 17 - 2 \times 6 \\
 1 &= 6 + 17(-1) + 6(2) \\
 1 &= 17(-1) + 6(3) \text{ or } 6 = 40 - 17 \times 2 \\
 1 &= 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2) \\
 1 &= 17(-1) + 17(-6) + 40(3) \\
 1 &= 17(-7) + 40(3) \\
 1 &= 17(-7) - 40(-3)
 \end{aligned}$$

D'où $(x_0; y_0) = (-7; -3)$

c) Résolution dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E')

$$\begin{cases}
 17x - 40y = 1 \\
 17(-7) - 40(-3) = 1
 \end{cases}$$

$$17(x + 7) - 40(y + 3) = 0 \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3).$$

Or $17 \wedge 40 = 1$, alors d'après le théorème de GAUSS $40/x + 7$ et $17/y + 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 7 = 40k \\ y + 3 = 17k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 40k \\ y = -3 + 17k \end{cases}$$

D'où $S = \{(-7 + 40k; -3 + 17k); k \in \mathbb{Z}\}$

d) Détermination de l'inverse modulo 40 de 17 compris entre 0 et 40

Soit P_k l'ensemble des inverses modulo 40 de 17. On a :

$$17(-7) - 40(-3) = 1 \Rightarrow 17(-7) = 1 + 40(-3) \Rightarrow 17(-7) \equiv 1[40]$$

$$\Rightarrow P_k = -7 + 40k, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq -7 + 40k \leq 40$$

$$7 \leq 40k \leq 47$$

$$0,175 \leq k \leq 1,175 \Rightarrow k = 1$$

$$P_1 = -7 + 40(1) \Rightarrow \boxed{P_1 = 33}$$

33 est l'inverse modulo 40 de 17 compris entre 0 et 40.

EXERCICE N°2 : (08 points)

$$f(A) = A \text{ et } f(B) = C$$

1) Détermination du rapport et de l'angle de f

Soit k_1 et θ le rapport et l'angle de f .

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = k_1 AB & (1) \\ \theta \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) [2\pi] & (2) \end{cases}$$

$$(2) : \theta \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) [2\pi] \text{ or } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \boxed{\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]}$$

$$(1): AC = k_1 AB \Rightarrow k_1 = \frac{AC}{AB} = \tan(\widehat{BC; BA})$$

$$\Rightarrow k_1 = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \text{ d'où}$$

$$\boxed{k_1 = \sqrt{3}}$$

$$2) g(A) = A \text{ et } g(C) = B$$

a) Détermination du rapport de g

Soit k_2 le rapport de g .

$$\begin{cases} g(A) = A \\ g(C) = B \end{cases} \Rightarrow AB = k_2 AC \Rightarrow k_2 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{AB}} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{D'où } \boxed{k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Détermination de l'axe (Δ) de g

$$\boxed{(\Delta) = \text{biss}(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Montrons que $g(B) = D$

$$\begin{aligned}
g &= \text{sim} \left(A; \frac{\sqrt{3}}{3}; \Delta \right) \Rightarrow g = S_{(\Delta)} \circ h \left(A; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = h \left(A; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \circ S_{(\Delta)} \\
g \circ g &= h \left(A; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} \circ h \left(A; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow g \circ g = h \left(A; \frac{1}{3} \right) \\
g \circ g(C) &= h \left(A; \frac{1}{3} \right) (C) \Rightarrow g[g(C)] = h \left(A; \frac{1}{3} \right) (C) \Rightarrow g(B) = C' \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} ; \quad \begin{cases} \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow C' = D, \text{ d'où } \boxed{g(B) = D}
\end{aligned}$$

Déduisons que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$

Considérons le triangle ABD rectangle en A .

$$\begin{cases} g(A) = A \\ g(B) = D \end{cases} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{3} AB \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\widehat{BD; BA})$$

$\Rightarrow (\widehat{BD; BA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ or $(\widehat{BC; BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, donc $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

3. a) Montrons que $f \circ g$ est une symétrie axiale et précisons son axe.

$f \circ g$ est la composée d'une similitude plane directe de rapport $k_1 = \sqrt{3}$ et d'une similitude plane indirecte de rapport $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $f \circ g$ est une similitude plane indirecte de rapport

$k = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$. Or une similitude plane indirecte de rapport 1 est une symétrie axiale. Par conséquent, $f \circ g$ est une symétrie axiale d'axe (\mathcal{D}) à déterminer.

$$f \circ g = S_{(\mathcal{D})}$$

Détermination de (\mathcal{D})

$$S_{(\mathcal{D})} = f \circ g$$

$$S_{(\mathcal{D})}(A) = f \circ g(A) = f[g(A)] = f(A) = A$$

$$S_{(\mathcal{D})}(A) = A \Rightarrow A \in (\mathcal{D}).$$

$$S_{(\mathcal{D})}(C) = f \circ g(C) = f[g(C)] = f(B) = C$$

$$S_{(\mathcal{D})}(C) = C \Rightarrow C \in (\mathcal{D}).$$

$$\begin{cases} S_{(\mathcal{D})}(A) = A \\ S_{(\mathcal{D})}(C) = C \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\mathcal{D}) = (AC)}$$

b) $D' = f(D)$.

Montrons que D' est la symétrique de B par rapport à A

$$S_{(AC)}(B) = f \circ g(B) = f[g(B)] = f(D) = D'$$

$S_{(AC)}(B) = D'$, donc (AC) est la médiatrice du segment $[BD']$ or A est le milieu de $[BD']$.

Par conséquent $S_A(B) = D'$: D' est la symétrique de B par rapport à A .

4) Déterminons $f(I)$.

$$(BD) \cap (\Delta) = \{I\} \Rightarrow f(I) = f((BD)) \cap f((\Delta))$$

$$\Rightarrow f(I) = (f(B)f(D)) \cap f((\Delta)) \Rightarrow f(I) = (CD') \cap f((\Delta))$$

$$\text{Or } f \circ g = S_{(AC)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ g^{-1} \Rightarrow f((\Delta)) = S_{(AC)} \circ g^{-1}((\Delta))$$

$$\Rightarrow f((\Delta)) = S_{(AC)}[g^{-1}((\Delta))] = S_{(AC)}((\Delta)) \Rightarrow f((\Delta)) = (AJ).$$

$$\text{On a : } f(I) = (CD') \cap (AJ) = J$$

D'où $f(I) = J$

5) (H) est l'hyperbole de rectangle fondamental $KELJ$ et d'axe focal (BD') .

a) Montrons que (H) est une hyperbole équilatère.

Le rectangle fondamental $KELJ$ étant un carré, donc l'hyperbole (H) est équilatère.

b) Centre de (H) : A

Asymptotes de (H) : (KL) et (EJ) .

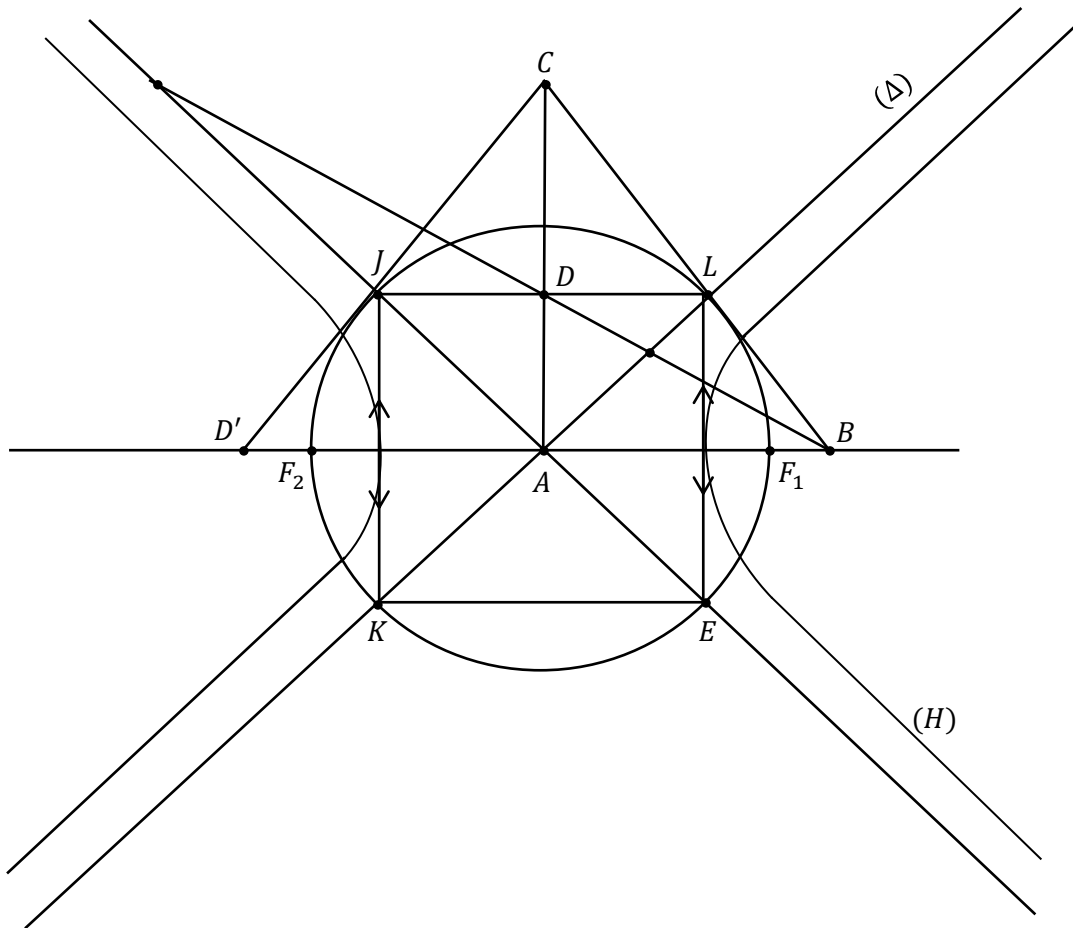
c) Foyers F_1 et F_2 (Voir figure)

d) Justifions que $f \circ g[(H)] = (H)$

$f \circ g = S_{(AC)}$ or (AC) est l'axe non focale de (H) , donc (AC) est un axe de symétrie de (H) .

Par conséquent, $f \circ g(H) = (H)$.

e) Voir figure.



EXERCICE N°3 : (05 points)

1) $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

a) Etudions les variations de f , puis dressons son tableau de variation

$E_f =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

Si $x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$

Si $x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$	$-\infty$	e	0

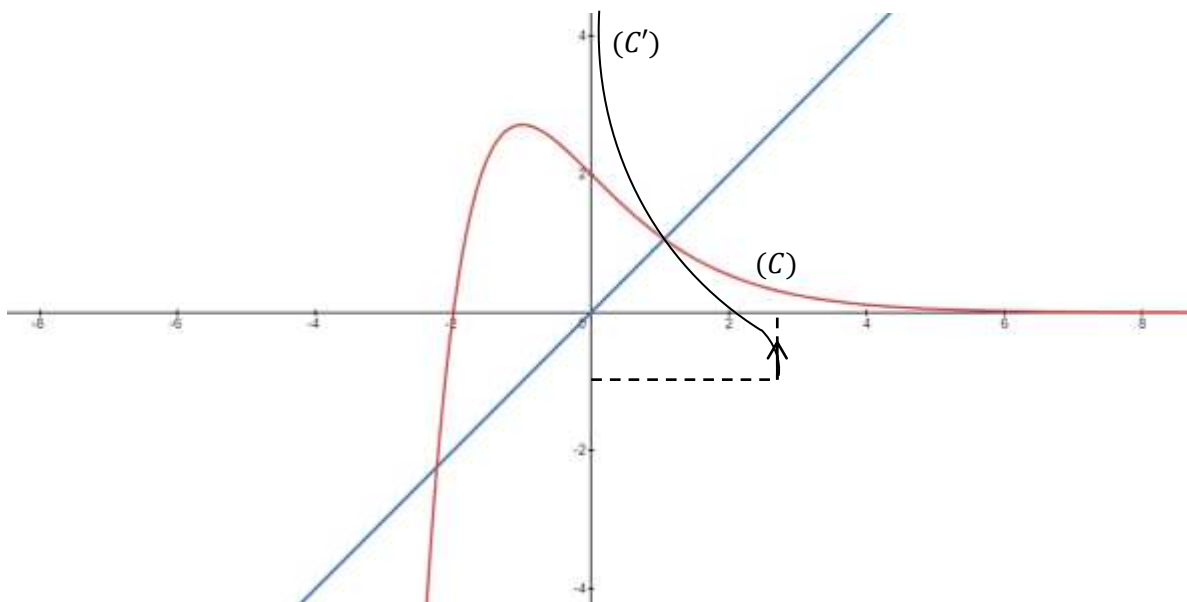
b) Traçons la courbe (C).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) (L'axe des abscisses est asymptote horizontale à (C)) au voisinage de $+\infty$.



2) g est la restriction de f sur $I = [-1; +\infty[$

a) Montrons que $g^{-1}(x)$ existe

g étant continue et strictement décroissante sur $I = [-1; +\infty[$, donc g est bijective. Par conséquent g admet une bijection réciproque notée g^{-1} . D'où $g^{-1}(x)$.

b) Courbe (C'). (Voir repère.)

$$3) I_n = \int_{-2}^0 \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx \text{ et } U_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$$

a) Vérifions que pour tout $x \in [-2; 0]$ on a : $0 \leq \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} e^2$

$$x \in [-2; 0]$$

$$-2 \leq x \leq 0$$

$$2 - 2 \leq 2 + x \leq 2 + 0$$

$$0 \leq 2 + x \leq 2$$

$$0 \leq (2 + x)^n \leq 2^n$$

$$0 \leq \frac{(2 + x)^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} \quad (1) \text{ car } n! > 0$$

$$-2 \leq x \leq 0$$

$$0 \leq -x \leq 2$$

$$e^0 \leq e^{-x} \leq e^2 \Rightarrow 1 \leq e^{-x} \leq e^2 \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} e^2}$$

b) Justifions à l'aide d'une intégration par parties que $I_1 = e^2 - 3$

$$I_1 = \int_{-2}^0 (x+2)e^{-x} dx$$

$$\begin{cases} U = x+2 \\ V' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I_1 = [-(x+2)e^{-x}]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^{-x} dx$$

$$I_1 = -2 + [-e^{-x}]_{-2}^0 = -2 - 1 + e^2 \Rightarrow \boxed{I_1 = e^2 - 3}$$

c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$I_{n+1} = \int_{-2}^0 \frac{(x+2)^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} dx$$

$$\begin{cases} U = \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} \\ V' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{(n+1)(x+2)^n}{(n+1)!} \\ V = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{(x+2)^n}{n!} \\ V = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = \left[-\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \right]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx$$

$$\text{D'où } \boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = e^2 - U_n$

$$\begin{array}{l}
 I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \\
 \cancel{I_2} = I_1 - \frac{2^2}{2!} \\
 \cancel{I_3} = \cancel{I_2} - \frac{2^3}{3!} \\
 \cancel{I_4} = \cancel{I_3} - \frac{2^4}{4!} \\
 \vdots \\
 I_n = \cancel{I_{n-1}} - \frac{2^n}{n!}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \textcircled{+}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 I_n &= I_1 - \left(\frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) \\
 &= e^2 - 3 - \left(\frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) \\
 &= e^2 - \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) \\
 &= e^2 - \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) \\
 &= e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{I_n = e^2 - U_n}$$

$$4) V_n = \frac{2^n}{n!}$$

Montrons que $\forall n \geq 2, V_{n+1} \leq \frac{2}{3} V_n$

$$n \geq 2$$

$$n+1 \geq 3$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2 \cdot 2^n}$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2 \cdot 2^n}$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2 \cdot 2^n}$$

$$\frac{n+1}{(n+1)n!} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \boxed{V_{n+1} \leq \frac{2}{3} V_n}$$

Déduisons que $\forall n \geq 2, V_n \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$$\begin{array}{l} V_{n+1} \leq \frac{2}{3} V_n \\ \cancel{V_3} \leq \frac{2}{3} \cancel{V_2} \\ \cancel{V_4} \leq \frac{2}{3} \cancel{V_3} \\ \cancel{V_5} \leq \frac{2}{3} \cancel{V_4} \\ \vdots \\ V_n \leq \frac{2}{3} \cancel{V_{n-1}} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \downarrow \\ \otimes \end{array} \right)$$

$$V_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3+1} \times V_2$$

$$V_n \leq V_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$\text{Or } V_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{V_n \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

$$V_n \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0}$$

5) Justifions que $0 \leq I_n \leq 2e^2 V_n$

$$0 \leq \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} e^2 \Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^0 \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx \leq \int_{-2}^0 \frac{2^n}{n!} e^2 dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} e^2 [x]_{-2}^0 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 2e^2 V_n$$

$$\text{D'où } \boxed{0 \leq I_n \leq 2e^2 V_n}$$

Déduisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2e^2 V_n \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

$$I_n = e^2 - U_n \Rightarrow U_n = e^2 - I_n \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^2}$$

EXERCICE N°4 : (03 points)

x_i (mois)	2	3	4	5	6
y_i (nombre de malades)	10	18	20	23	30

1) Calculons le nombre moyen des malades

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{101}{5} = 20,2 \Rightarrow \boxed{\bar{y} \approx 20 \text{ malades}}$$

2) Calculons $cov(X; Y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \bar{x} = 4$$

$$cov(X; Y) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} \Rightarrow \boxed{cov(x, y) = 9}$$

3) Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$V(x) = 2 ; V(y) = 42,56$$

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)} \cdot \sqrt{V(y)}} \Rightarrow \boxed{r = 0,97}$$

4) Déterminons la droite de régression de y en x

$$(D_{x/y}) : y = ax + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{V(x)} \Rightarrow a = 4,5 ; b = \bar{y} - a\bar{x} \Rightarrow b = 2,2$$

$$\boxed{(D_{x/y}) : y = 4,5x + 2,2}$$

5) Donnons une estimation du nombre de mois pour 60 malades

$$y = 4,5x + 2,2 \Rightarrow x = \frac{y - 2,2}{4,5} = \frac{60 - 2,2}{4,5} = 12,84$$

$x \approx 13$ mois