Examen National Mathématiques Sciences Maths A et B 2024 (4H)

En LaTeX par Marwane Farhane

11 juin 2024 (Matin)

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x\in]1,+\infty[, \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 1.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3(a) Soit $x\in]1,+\infty[$. En posant $t=(x-1)^2$, vérifier que :

$$\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

(b) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)$, on a :

$$-\frac{1}{2}<\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}<\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$)

(c) En déduire que :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

4(a) Montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$$

(b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}dt$$

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq I(x) \leq J(x)$$

(b) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2} \quad \text{et} \quad J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

(c) Montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$$

(d) En déduire que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

6(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

(b) Tracer la courbe (C). (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\,\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2\,\text{cm}$)

7. Montrer que l'équation $f(x) = x-1$ admet une unique solution a dans $]1,2[$.

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0 \in [1,+\infty[\text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 1 + f(a_n)$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$$

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$$

(c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

1.(a) Montrer que F est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

(b) En déduire que F est une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; \beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$.

2. On note F^{-1} la bijection réciproque de F.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$.

(b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}du$.

(On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)

(c) En déduire que :

$$\ell = \frac{e-1}{2\beta}$$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I

1(a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$.

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

2. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

   Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

Partie II

Soient Ω, M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α, z_1 et z_2.

1. On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m.
   (b) En déduire que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.
2. On suppose que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.
   (a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$.
   (b) Montrer que :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

(c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$.

3.(a) Montrer que :

$$(z_1 - z_2)^2 = \Delta$$

(b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O.

Exercice 4

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif dont le zéro est la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2 ; \quad (a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

($\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d).

1.(a) Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$.

(b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

2. Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

3. Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

4.(a) Vérifier que $\forall(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $(a,b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$.

(b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

5.(a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T.

(b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

Exercice 5

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q.

1(a) Montrer que p divise $r^{p-1}-1$ et que q divise $r^{q-1}-1$.

(b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$.

(c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \pmod{221}$. (On donne : $221 = 13 \times 17$).

FIN