EXAMEN DU BACCALAUREAT

ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2024

SERIE A4

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

1er tour

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 3
Durée : 3 heures

EXERCICE N°1 (4,5 points)

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5 \end{cases}$

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout n par $V_n = U_n - 10$.

1) Calculer U_1; U_2; V_0 et V_1. (1 pt)
2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. (0,5 pt)
3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. (1 pt)
4) Calculer les limites des suites (V_n) et (U_n) puis en déduire leur convergence. (1 pt)
5) On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$.
   Exprimer S_n et S'_n en fonction de n. (1 pt)

EXERCICE N°2 (4,5 points)

L'étude du nombre d'engins à deux roues dans une famille sur un échantillon de 50 familles d'une ville au Burkina Faso a donné les résultats suivants :

Nombre d'engins	0	1	2	3	4	5	6
nombre de familles	4	10	14	10	6	4	2

1) a) Quelle est la population étudiée ? (0,5 pt)
   b) Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ? (1 pt)
   c) Donner le mode de cette série statistique. (0,5 pt)
2) a) Compléter le tableau suivant : (1 pt)

Classes	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	Total
Nombre de famille					
Centre de classes					

   b) Déterminer le nombre moyen d'engins par famille de cette série présentée sous forme de classe. (0,5 pt)
   c) Construire l'histogramme de cette série. (1 pt)
   Echelle : $1cm \rightarrow 2$ sur l'axe des abscisses
   $1cm \rightarrow 4$ sur l'axe des ordonnées

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1-\ln x}{x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1cm$.

1) a) Calculer la limite de f en 0 et interpréter le résultat. (1 pt)

   b) Montrer que pour tout x strictement positif, $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$. (0,5 pt)

   c) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter le résultat. (1 pt)

2) a) Pour tout $x \in D_f$, calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f. (2 pts)

   b) Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

3) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = 1$. (2 pts)

4) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = e$. (1 pt)

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère. (1,5 pt)

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$. (1 pt)

Proposition de corrigé : A_4

Exercice 1 (4,5 pts)

1) Calculons U_1 ; U_2 ; V_0 et V_1.

$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 5 = \frac{1}{2}8 + 5 = 9 \\ \boxed{U_1 = 9} \quad 0{,}25pt \\ U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 5 = \frac{1}{2}\times 9 + 5 = \frac{19}{2} \\ \boxed{U_2 = \frac{19}{2}} \quad 0{,}25 \end{cases}$

$V_n = U_n - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = U_0 - 10 = 8 - 10 = -2 \\ \boxed{V_0 = -2} \quad 0{,}25pt \\ V_1 = U_1 - 10 = 9 - 10 = -1 \\ \boxed{V_1 = -1} \quad 0{,}25pt \end{cases}$

2) Montrons que (V_n) est une suite géométrique

$V_n = U_n - 10 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 10$

$= \frac{1}{2}U_n - 5$

$= \frac{1}{2}(U_n - 10)$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n}$ (V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ 0,5pt

3) Exprimons V_n puis U_n en fonction de n

$V_n = V_p q^{n-p} \Leftrightarrow V_n = V_0 q^n$ et $\boxed{V_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ou } \frac{-1}{2^{n-1}}}$ 0,5pt

$U_n = V_n + 10 \Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{-1}{2^{n-1}} + 10}$

0,5pt

4) Limites de V_n et U_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ (0,5 pt)

(V_n) est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ (0,5 pt)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 10\right) = 10$ (0,25 pt)

(U_n) est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 10$ (0,25 pt)

5) Calculons S_n et S'_n

$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

$S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right) \Leftrightarrow S_n = -2\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{S_n = -4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$ (0,5 pt)

$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

$S'_n = S_n + 10n \Leftrightarrow \boxed{S'_n = -4\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + 10n}$

(0,5 pt)

(4/8)

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 (4,5pts)

1) a) population étudiée : L'ensemble des 50 familles de la ville. 0,5pt

b) Caractère étudié : Le nombre d'engins à deux roues. Le caractère est quantitatif 0,5pt 0,5pt

c) Le mode de la série : 2 0,5pt

2) a) Complétons le tableau

Classes	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	Total
nombre de famille	14	24	10	2	50
Centre des classes	1	3	5	7	

1pt

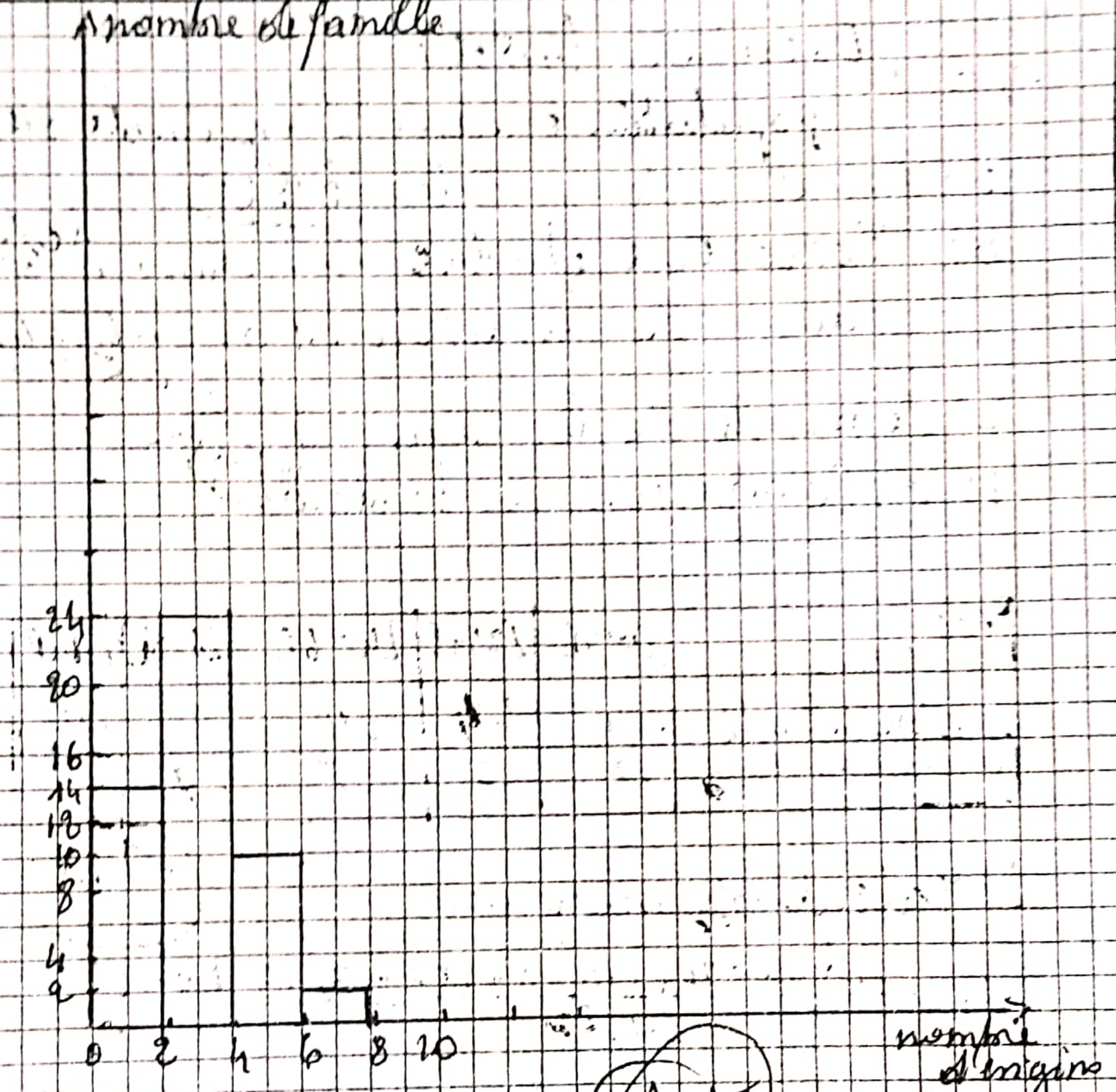
b) Calcul de moyenne

$$M = \frac{1\times14 + 24\times3 + 10\times5 + 2\times7}{50} = 3$$ Donc

le nombre moyen d'engins par famille est 3. 0,5pt

c) Histogramme

3/8



Histogramme

1pt

4/8

Proposition de correction : Problème (11 pts)

1) a) Limite de f en 0

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1-\ln x}{x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ (0,5 pt)

- Interprétation : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f). (0,5 pt)

b) Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$

Pour $x > 0$, on a :

$f(x) = \frac{x-1-\ln x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ donc

$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}}$ (0,5 pt)

c) Limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$ (0,5 pt)

Interprétation : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. (0,5 pt)

2) a) Dérivée de f

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \left(\frac{x-1-\ln x}{x}\right)'$

$\boxed{f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}}$ (0,5 pt)

5/8

• Sens de variation

$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$; $\forall x \in]0;1]$ $f'(x) \leq 0$ (0,25pt) (0,5pt)

donc f est décroissante sur $]0;1]$ (0,25pt)

$\forall x \in [1;+\infty[$ $f'(x) \geq 0$ (0,5pt) $\Leftrightarrow$ f est croissante

sur $[1;+\infty[$. ~~(1pt)~~ (0,5pt)

b) Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

(1pt)

3) position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et (D)

• $f(x) - y = f(x) - 1$

$f(x) - 1 = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ donc si $x \in]0;e^{-1}[$

$(\mathscr{C}_f)$ au dessous de (D) car $f(x) - 1 < 0$ (1pt)

si $x \in]e^{-1};+\infty[$ $f(x) - 1 > 0$ et $(\mathscr{C}_f)$

est en dessous de (D). (1pt)

4) Equation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $x = e$

$(T) : y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$f'(e) = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$; $f(e) = \frac{e-2}{e}$ donc

$(T) : \boxed{y = xe^{-2} - 3e^{-1} + 1}$ (1pt)

6/8

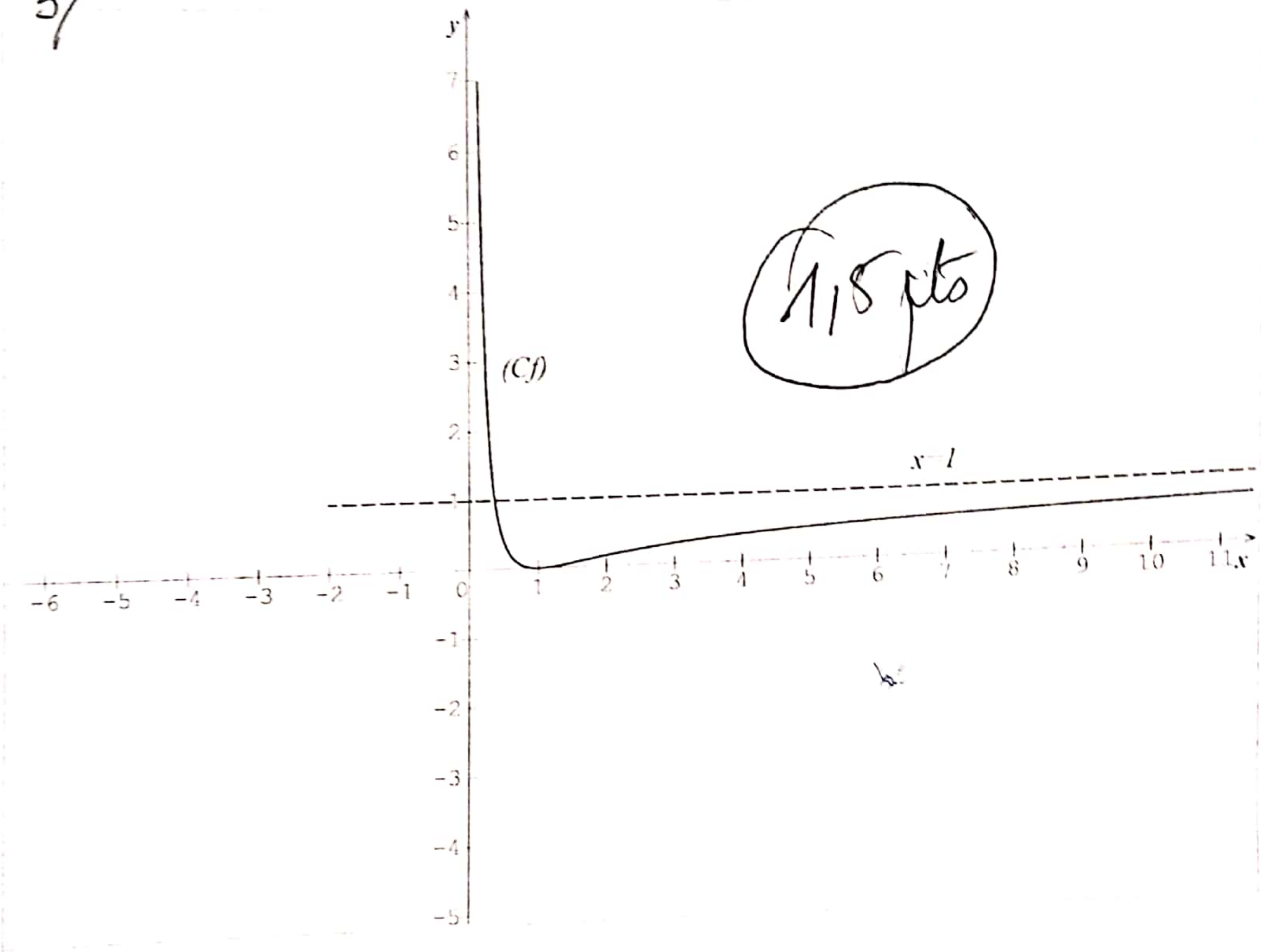
6) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$

D'après la représentation graphique $\forall x \in]0; +\infty[$ $f(x) \geq 0$ donc

$S_{\mathbb{R}} =]0; +\infty[$ (1pt)

5) Voir annexe (C) : 1pt (D) : (0,5pt)

5)



8/8