COLLECTION MATHS D'AFRIQUE

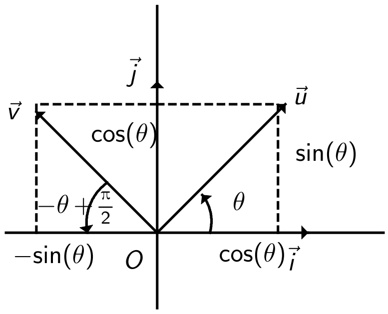
Epreuve de Mathématiques baccalauréat série C

Session Juin 2024 pays Niger

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1. Changement de repère et conique../ 5points

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R=(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère le repère $R_\theta=(O,\vec{u},\vec{v})$ obtenu par rotation d'angle θ et de centre O. Soit M un point du plan, on note (X,Y) les coordonnées d'un point M dans le repère R_θ.



Changement de repère.

Par définition, $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ et $\vec{v}=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$ par suite en notant (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $R_\theta=(O,\vec{u},\vec{v})$ on a :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j} \iff \overrightarrow{OM}=X\vec{u}+Y\vec{v}$$
$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j} \iff \overrightarrow{OM}=(X\cos\theta-Y\sin\theta)\vec{i}+(X\sin\theta+Y\cos\theta)\vec{j}$$

on en déduit donc $\boxed{x=X\cos\theta-Y\sin\theta \text{ et } y=X\sin\theta+Y\cos\theta}$.

2. a) Après calcul, on trouve que (C_α) a pour équation dans le repère $R_\theta=(O,\vec{u},\vec{v})$:

$$\boxed{X^2+Y^2+\alpha(X^2-Y^2)\sin(2\theta)+2\theta XY\cos(2\theta)+4X\cos(\theta)-4Y\sin(\theta)-\alpha^2=0}$$

b) Le terme XY est nul dans (C_α) si et seulement si $\cos(2\theta)=0$ c'est-à-dire si et seulement si, $\boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$ car $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. a) Pour $\theta=\frac{\pi}{4}$ l'équation (C_α) devient : $\boxed{(1+\alpha)X^2+(1-\alpha)Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-\alpha^2=0}$.

b) Discutons suivant les valeurs de α de la nature de (C_α) :

- si $\alpha=-1$ alors (C_α) devient : $2Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-1=0 \Leftrightarrow \left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc (C_{-1}) est une parabole.
- si $\alpha=1$ alors (C_α) devient : $2X^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-1=0 \Leftrightarrow \left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc (C_1) est une parabole.

- $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$alors (C_α) devient :

$$\boxed{(1+\alpha)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{1+\alpha}\right)^2+(1-\alpha)\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha}\right)^2+\frac{\alpha^4-\alpha^2-4}{1-\alpha^2}=0}$$

de plus, $\dfrac{\alpha^4-\alpha^2-4}{1-\alpha^2}=0$ si et seulement si, $\alpha=\mp\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ donc si $\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$ l'equation (C_α) est équivalent à :

$$\boxed{y+\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha-1}}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{1+\alpha}\right)}$$

donc $\left(C_{\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}}\right)$ est une réunion de droites.

Si $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{\pm 1; \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}\right\}$ alors (C_α) devient :

$$\boxed{\frac{\left(X+\frac{\sqrt{2}}{1+\alpha}\right)^2}{\dfrac{-\alpha^4+\alpha^2+4}{(1-\alpha)(1+\alpha)^2}}+\frac{\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha}\right)^2}{\dfrac{-\alpha^4+\alpha^2+4}{(1+\alpha)(1-\alpha)^2}}=1}$$

donc on en déduit que :

- (C_α) est une hyperbole si et seulement si, $\alpha \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[-\left\{\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right\}$.
- (C_α) est une ellipse si et seulement si, $\alpha \in]-1;1[$.

c) On en déduit que :

- Si $\alpha=-1$ alors (C_α) devient :
  $2Y^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-1=0 \Leftrightarrow \left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc (C_{-1}) est la parabole de sommet $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de foyer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ d'axe focal $(\Omega,\vec{u})$ et de directrice la droite (D) d'équation $x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- si $\alpha=1$ alors (C_α) devient :
  $2X^2+2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-1=0 \Leftrightarrow \left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc (C_1) est la parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de foyer $F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ d'axe focal $(\Omega,\vec{v})$ et de directrice la droite (D) d'équation $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-1;1,\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right\}$.
Alors (C_α) est un cercle si et seulement si $\frac{-\alpha^4+\alpha^2+4}{(1-\alpha)(1+\alpha)^2}=\frac{-\alpha^4+\alpha^2+4}{(1+\alpha)(1-\alpha)^2}$ c'est-à-dire si et seulement si, $(1+\alpha)(1-\alpha)^2=(1-\alpha)(1+\alpha)^2$ donc si et seulement si, $\alpha=0$ et dans ce cas, (C_0) est le cercle de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{2}}{1+\alpha},\frac{\sqrt{2}}{1-\alpha}\right)$ et de rayon 2.

Exercice 2. Equation fonctionnelle $f(xy)=f(x)+f(y)$../ 4 points

1. D'après la relation (1), pour $x=y=1$ on a $f(1)=2f(1)$ donc $\boxed{f(1)=0}$.
2. Soit $a\in]0,+\infty[$ fixé. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions $x\mapsto ax$ et $x\mapsto f(x)$ toutes dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\boxed{g'(x)=af'(ax)}$.
3. Soit $a\in]0,+\infty[$ fixé. La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions $x\mapsto f(a)$ et $x\mapsto f(x)$ toutes dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\boxed{h'(x)=f'(x)}$.
4. Soient f une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant (1) et $a\in]0,+\infty[$ fixé. Alors on a $f(ax)=f(a)+f(x)$ donc $g(x)=h(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, par suite $\boxed{f'(x)=af'(ax)}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

5. D'après ce qui précède, on en déduit que pour tout $(x,a)\in]0,+\infty[^2$, $f'(x)=af'(ax)$ donc en particulier $f'(1)=af'(a)$ par suite $\boxed{f'(a)=\dfrac{f'(1)}{a}}$.

6. On a vu que pour toute fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant (1) on a pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{f'(1)}{x}$ ainsi, toute fonction f vérifiant (1) est necéssairement solution de l'équation différentielle $y'=\frac{\lambda}{x}$ donc necéssairement définie par $f(x)=\lambda\ln(x)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$. Or $f(1)=0$ donc $c=0$ par suite, $f(x)=\lambda\ln(x)$ où est un nombre réel.
   Réciproquement, si f est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\lambda\ln(x)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ alors on a :

   - f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\lambda}{x}$.
   - f vérifie (1), en effet, pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[^2$; $f(xy)=f(x)+f(y)$.

   Ainsi, les fonctions f définies et dérivables sur $]0,+\infty[^2$ vérifiants (1) sont définies par : $\boxed{x\mapsto\lambda\ln(x)}$ donc en particulier la fonction $x\mapsto\ln x$ vérifie (1) et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$.

Problème. Applications affines - suites numériques../ 11 points
Partie A

1. Le système d'équation $\begin{cases} x'=x+(\lambda-1)y\\ y'=2x+(\lambda-2)y\end{cases}$ admet pour déterminant $\begin{vmatrix}1 & \lambda-1\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=-\lambda$ donc le système admet une unique solution à λ fixé si et seulement si $\lambda\neq 0$ donc f_λ est bijective si et seulement si, λ est non nul.

2. Pour $\lambda\neq 0$, le système $\begin{cases} x'=x+(\lambda-1)y\\ y'=2x+(\lambda-2)y\end{cases}$ est un système de cramer dont les solutions sont données par :
$$x=\frac{(\lambda-2)x'+(1-\lambda)y'}{-\lambda}\quad\text{et}\quad x=\frac{-2x'+y'}{-\lambda}$$
   ainsi f_λ^{-1} a pour expression analytique : $\boxed{\begin{cases} x'=\frac{1}{\lambda}[(2-\lambda)x+(\lambda-1)y]\\ y'=\frac{1}{\lambda}(2x-y)\end{cases}}$.

3. L'application $f_\lambda\circ f_\lambda$ a pour expression analytique : $\boxed{\begin{cases} x'=(2\lambda-1)x+(\lambda^2-2\lambda+1)y\\ y'=(2\lambda-2)x+(\lambda^2-2\lambda+2)y\end{cases}}$ donc l'application f_λ est involutive si et seulement si $\lambda=1$.

4. L'application f_1 a pour expression analytique : $\boxed{\begin{cases} x'=x\\ y'=2x-y\end{cases}}$. L'ensemble des points invariants de f_1 est la droite d'équation $y=x$.
   De plus, f_1 est une application affine involutive donc f_1 est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y=x$.

Partie B : Etude de f_0

1. L'application f_0 a pour expression analytique : $\boxed{\begin{cases} x'=x-y\\ y'=2x-2y\end{cases}}$. L'ensemble des points invariants de f_0 est réduit au singleton $\{(0,0)\}$.

2. Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y')$ son image par f_0 alors $y'=2x'$ par suite $M'(x',y')$ appartient à la droite d'équation $y=2x$.
   Réciproquement, soit $M(x,2x)$ un point de la droite d'équation $y=2x$ alors son image M' par f_0 a pour coordonnées $x'=-x$ et $y'=-2x$ donc M' appartient aussi à la droite d'équation $y=2x$ donc par conséquent, l'image du plan par f_0 est la droite (Δ) d'équation $y=2x$.
   De plus, cette droite est globalement invariant par f_0.

3. Soit $M(x,y)$ un point de (Δ) et $M'(x',y')$ son image par f_0. On a
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}'=x'\vec{i}+2x'\vec{j}=(x-2x)\vec{i}+2(x-2x)\vec{j}=-(x\vec{i}+2x\vec{j})=-\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

donc $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ avec $k = -1$.

4. Soient p la projection sur (Δ) de direction le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et h l'homothétie de centre O de rapport -1. Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par p.
Alors existe, un réel β tel que :
$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \beta\vec{u}$ par suite $x' = x + \beta$ et $y' = y + \beta$. De plus, M' appartient à (Δ) donc $\beta = y - 2x$ par suite p avec pour expression analytique $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y \\ y' = -2x + 2y \end{array}\right.}$.
h a pour expression analytique $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -y \end{array}\right.}$. Ainsi, on en déduit que f_0 est la composée de p et h c'est-à-dire $f = h \circ p$.

Partie C

1. a) Soit $M(x, y)$ un point de la droite (D_λ) et $M'(x', y')$ son image par f_λ.
D'après **la partie A**, on en déduit que $x = \frac{1}{\lambda}[(2-\lambda)x' + (\lambda - 1)y']$ et $y = \frac{1}{\lambda}(2x' - y')$

$$M(x, y) \in (D_\lambda) \Leftrightarrow y = x + k \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}(2x' - y') = \frac{1}{\lambda}[(2-\lambda)x' + (\lambda - 1)y'] + \lambda k \Leftrightarrow y' - x' = -k$$

ainsi, l'image de la droite (D_λ) par f_λ est la droite (D'_λ) d'équation $y = x - k$.
b) Par récurrence, on montre que l'image de la droite (D_λ) par f_λ^n est la droite $\left(D_\lambda^{(n)}\right)$ d'équation $y = x + (-1)^n k$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. a) On a $A_0(1, 0)$, $A_1(1, 2)$ et $A_2(2\lambda - 1, 2\lambda - 2)$ avec $u_2(\lambda) = \lambda - 1$ ainsi, la propriété est initialisée.
Si on suppose construit les points A_0, .., A_n, on en déduit alors :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + (\lambda - 1)y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + (\lambda - 2)y_n \end{array}\right.}$$

donc $x_n = 2u_n(\lambda) + (-1)^n$ et $y_n = 2u_n(\lambda)$ par suite :

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2u_n(\lambda) + (-1)^n + 2(\lambda - 1)u_n(\lambda) = 2\lambda u_n(\lambda) + (-1)^n \\ y_{n+1} & = & 2(2u_n(\lambda) + (-1)^n) + 2(\lambda - 2)u_n(\lambda) = 2\lambda u_n(\lambda) + 2(-1)^n \end{array}$$

donc $x_{n+1} = 2\lambda u_n(\lambda) + 2(-1)^n$ et $y_{n+1} = 2\lambda u_n(\lambda) + 2(-1)^n$ en posant $u_{n+1}(\lambda) = \lambda u_n(\lambda) + (-1)^n$ ainsi, u_n est un polynôme en λ de degré n puisque u_{n-1} est une polynôme en λ de degré $n - 1$ donc par suite la relation est établie pour tout tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.
b) D'après ce qui précède, on en déduit que tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$\boxed{u_{n+1}(\lambda) = \lambda u_n(\lambda) + (-1)^n}$$

c) Montrons cette propriété par recurrence.

On a $x_1 = 1$ et $y_1 = 2$ donc pour tout $\lambda \neq -1$, $u_1(\lambda) = 1 = \dfrac{\lambda^1 - (-1)^1}{\lambda + 1}$ donc la propriété est initialisée.
Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$, on ait pour tout $\lambda \neq -1$, $u_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$ donc pour tout $\lambda \neq -1$, $u_{n+1}(\lambda) = \lambda\dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1} + (-1)^n = \dfrac{\lambda^{n+1} - (-1)^{n+1}}{\lambda + 1}$ donc la propriété est héréditaire par conséquent elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
d) Pour $\lambda = -1$ on a pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1}(-1) = -u_n(-1) + (-1)^n$ donc on en déduit : $u_1(-1) = 1$, $u_2(-1) = -2$ et $u_3(-1) = 3$. Par récurrence on montre que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{u_n(-1) = n \times (-1)^{n-1}}$$

Fin