

Ministère de l'Éducation Nationale Centre National des Examens et Concours de l'Éducation EXAMEN : Baccalauréat Général Séries: Terminale Sciences Exactes (TSE)- Sciences et Technologie Industrielle (STI) Épreuve: Mathématiques	République du Mali Un Peuple-Un But-Une Foi BAC 2024 SESSION : Juin 2024 Durée: 4 heures Coefficient: 4
--	--

Exercice 1.....6 pts

I. Une classe d'un lycée est constituée de 26 garçons et 14 filles. Dans cette classe 13 garçons et n filles sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues. On choisit au hasard une personne parmi les élèves de cette classe. On note les évènements suivants :

G : « la personne choisie est un garçon »

F : « la personne choisie est une fille »

L : « la personne choisie est inscrite dans un centre d'apprentissage de langues »

1. Calcule les probabilités $p(G)$ et $p(F)$.
2. Construis un arbre de probabilité correspondant aux données de l'énoncé, sachant que $p_G(L) = \frac{1}{2}$ et $p_F(L) = \frac{n}{14}$.
3. Calcule, en fonction de n , $p(L)$.
4. Détermine n pour que les évènements G et L soient indépendants.

II. On considère un triangle ABC isocèle du plan tel que $AB = AC$. On note I le milieu de $[BC]$ et on donne $AI = 4a$, $BC = 2a$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour la figure on prendra $a = 2$ cm.

1. On note G le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$.

a. Construis G .

b. Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2MA + MB + MC\| = \|2MA - MB - MC\|.$$

2. Etant donné un nombre réel k , Détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2$, on discutera suivant les valeurs de k .

3. On prend $a = 1$ et on construit un repère du plan de centre I , de sorte que les valeurs de base soient $\vec{i} = \overrightarrow{IC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4} \overrightarrow{IA}$.

Détermine les coordonnées de A, B, C et G . Retrouve alors les réponses de 1.b et 2.

Exercice 2.....5 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. S est la similitude plane directe de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' avec $M' = S(M)$.

1. Exprime z' en fonction de z .

2. On définit la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\begin{cases} M_0 \text{ d'affixe } z_0 = 1 + i \\ M_n = S(M_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$.

z_n est l'affixe de M_n , pour tout entier naturel n .

a. Détermine les affixes des points M_1, M_2 et M_3 .

b. Trouve une relation entre z_n et z_{n-1} pour $n \geq 1$ puis exprime z_n en fonction de z_0 et n .

c. Soit $a_n = |z_n|$. Prouve que a_n est le terme général d'une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

d. Etudie la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème.....9 pts

Partie A

Soit la fonction g définie sur $] -1, +\infty[$ par $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{1+x} + \ln(x+1)$.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. a. Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.

b. Dresse le tableau de variations de g .

c. Calcule $g(0)$ puis déduis-en le signe de $g(x)$ pour $x \in] -1, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie $] -1, +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = x \ln(x+1)$.

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ telle que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

1. a. Calcule $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ puis interprète le résultat.

- b. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète géométriquement le résultat.
2. a. $\forall x \in]-1, +\infty[$, compare $f'(x)$ et $g(x)$.
- b. Dresse le tableau de variations de f .
3. a. Résous, dans $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.
- b. Etudie la position relative de (C_f) et de la droite $(\Delta): y = x$ sur $[0; e-1]$.
4. Construis (C_f) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
5. Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$.
- a. Montre que, la fonction h admet une fonction réciproque notée h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b. Calcule $h^{-1}(e-1)$.
- c. Construis $(C_{h^{-1}})$, la courbe de h^{-1} , dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- d. Dédus-en que h^{-1} n'est pas dérivable en 0 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x} = 0$.

Partie C

1. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, compare $x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ et $x \mapsto x-1 + \frac{1}{x+1}$.
2. Calcule $\int_1^{e-1} \frac{x^2}{x+1} dx$ puis en intégrant par partie, calcule $\int_1^{e-1} x \ln(x+1) dx$.
3. Calcule, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e-1$.

Partie D

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montre que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < e-1$.
2. Montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis détermine sa limite.