EXAMEN DU BACCALAUREAT

ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2024

SERIES : C – E

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

2nd tour

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées.)

Coefficient : 06
Durée : 04 heures

EXERCICE 1 (04 points)

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $BC = a$ avec a un réel strictement positif.

Pour tout réel $\lambda \neq 0$, on considère le système $S_\lambda = \{(A, \lambda) ; (B, 1) ; (C, 1)\}$.
On note G_λ l'éventuel barycentre du système S_λ et I le milieu du segment $[BC]$.

1) a) Pour quelle(s) valeur (s) de λ, G_λ existe-t-il ? **(0,25pt)**

b) Déterminer et construire l'ensemble (D) des barycentres G_λ lorsque $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -2\}$. **(0,75pt)**

c) Déterminer λ pour que le point A soit le milieu de $[G_\lambda I]$. **(0,5pt)**

2) Soit (E_m) l'ensemble des points M du plan vérifiant : $4MA^2 + mMB^2 - MC^2 = -a^2$ avec $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Pour quelle(s) valeur (s) de m le point A appartient-il à (E_m) ? **(0,5pt)**

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E_{-1}) et construire (E_{-1}). **(0,75pt)**

3) Soit (F) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$$

a) Vérifier que $B \in (F) et A \notin (F)$. **(0,75pt)**

b) Déterminer alors (F). **(0,5pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (d'unité graphique 6cm).
On considère la suite numérique $(\theta_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

On note M_n le point du cercle de centre O et de rayon 1, vérifiant $mes(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}) = \theta_n$.
On note z_n l'affixe de M_n.

1) Placer les points M_0, M_1 et M_2. **(0,75pt)**

2) a) Montrer que pour tout entier n, $\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}$ est un argument de z_n. **(0,5pt)**

b) Ecrire z_n sous forme exponentielle. **(0,25pt)**

c) Calculer $mes(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+12}})$ et en déduire l'emplacement du point M_{12}. **(1pt)**

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = z_n . e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. **(0,5pt)**

4) On pose $Z = \frac{z_{n+4}-z_n}{z_{n+4}-z_{n+8}}$

a) Ecrire Z sous forme exponentielle. **(0,5pt)**

b) En déduire la nature exacte du triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$. **(0,5pt)**

PROBLEME (12 points)

Partie A (03 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout couple (a, b) de réels, on définit la transformation du plan, notée $T_{(a,b)}$, qui, à tout point M de coordonnées (x,y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x',y') vérifiant : $x' = x + a$ et $y' = by$.

1) Etudier, suivant les valeurs du couple (a,b), l'ensemble $\Gamma_{(a,b)}$ des points invariants par $T_{(a,b)}$. **(0,75pt)**

2) On considère la translation t définie par le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a,o) et la transformation t' d'expression analytique : $x' = x$ et $y' = by$.

   a) Préciser la transformation t' lorsque $b = 0$. **(0,25pt)**

   b) On suppose $b \neq o$

      i) Montrer que $T_{(a,b)} = t'o\,t$. **(0,5pt)**

      ii) Vérifier que $t'o\,t = t\,o\,t'$. **(0,5pt)**

3) On suppose $b \neq o$ et on considère une droite (D) du plan d'équation cartésienne : $ux + vy + w = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$

   a) Montrer que l'image de (D) par $T_{(a,b)}$ est une droite (D'). **(0,5pt)**

   b) Dans quel cas, (D') est-elle parallèle à (D) ? **(0,5pt)**

Partie B (1,5 point)

Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1) Résoudre (E). **(0,5pt)**

2) A tout couple (α,β) de nombres réels, on associe la fonction $f_{(\alpha,\beta)}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f_{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha x+\beta)e^{2x}$. On note $f'_{(\alpha,\beta)}$ la dérivée de $f_{(\alpha,\beta)}$.

   a) Montrer que $f'_{(\alpha,\beta)} = f_{(2\alpha,\ \alpha+2\beta)}$. **(0,5pt)**

   b) En déduire une primitive de la fonction $f_{(p,q)}$. **(0,5pt)**

Partie C **(05 points)**

On note φ la fonction $f_{(2,-3)}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1cm).

1) Etudier le sens de variation de φ et dresser son tableau de variations. **(1,5pt)**
2) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. **(0,25pt)**
3) Montrer qu'il existe un réel x_0 et un seul tel que $\varphi''_{(x_0)} = 0$ et déterminer une équation de la tangente (T_{x_0}) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse x_0. **(1pt)**
4) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T_0). **(1,25pt)**
5) Soit λ un réel strictement négatif. Calculer en fonction de λ, l'aire A_λ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = 0$; $x = 0$ et $x = \lambda$. **(1pt)**

Partie D **(2,5 points)**

On note T la transformation particulière correspondant à $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2e^{-1}$.

Soit $C_{(\alpha,\beta)}$ la courbe représentative de la fonction $f_{(\alpha,\beta)}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$f_{(\alpha,\beta)} = (\alpha x + \beta)e^{2x}$.

1) Montrer que l'image de $C_{(\alpha,\beta)}$ par T est la courbe représentative de la dérivée $f'_{(\alpha,\beta)}$. **(1pt)**
2) On suppose $\alpha \neq 0$.
   a) Montrer que pour toute fonction $f_{(\alpha,\beta)}$, la dérivée seconde $f''_{(\alpha,\beta)}$ s'annule une fois et une seule. **(0,5pt)**
   On note $I_{(\alpha,\beta)}$ le point correspondant de $C_{(\alpha,\beta)}$.
   b) Déterminer l'ensemble des points $I_{(\alpha,\beta)}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. **(1pt)**
   On donne : $e \approx 2,7$; $e^2 \approx 7,4$.

Série(s) : C et E

Session 2022

Sujet 1

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Proposition de Corrigé

Exercice 1 (4 pts)

1°) a) Existence de G_λ.

G_λ existe si et seulement si $\lambda+2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$, G_λ existe. (0,25 pt)

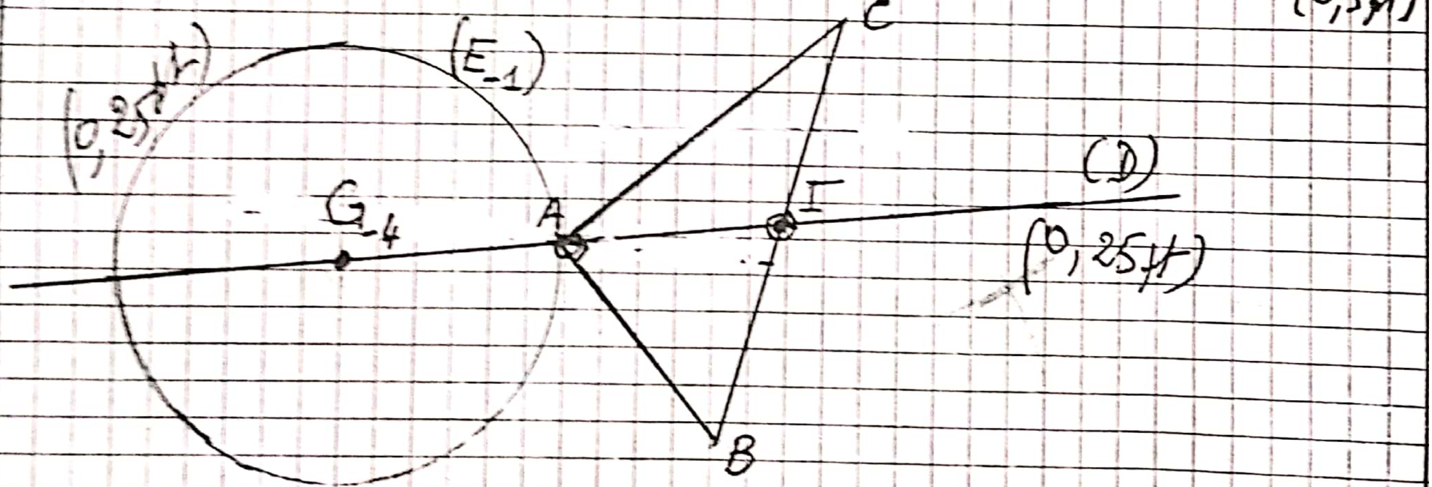
b) Déterminons et construisons (D).

$G_\lambda = \text{bar}\{(A,\lambda);(B,1);(C,1)\} \Leftrightarrow \vec{AG_\lambda} = \frac{1}{\lambda+2}\vec{AB} + \frac{1}{\lambda+2}\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \vec{AG_\lambda} = \frac{2}{\lambda+2}\vec{AI}$

$\Leftrightarrow G_\lambda \in (AI)$.

(D) est la droite (AI) privée des points A et I. (0,5 pt)



c°) Déterminons λ pour que A soit le milieu de $[G_\lambda I]$.

A est milieu de $[G_\lambda I] \Leftrightarrow \vec{AG_\lambda} = -\vec{AI}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\lambda+2} = -1 \Leftrightarrow \lambda = -4$ (0,5 pt)

2) $(E_m) : 4MA^2 + mMB^2 - MC^2 = -a^2$, $m \in \mathbb{R}^*$

a) Valeurs de m pour lesquelles $A \in (E_m)$.

$A \in (E_m) \Leftrightarrow mAB^2 - AC^2 = -a^2 = -BC^2$

$\Leftrightarrow mAB^2 - AC^2 = -(AB^2 + AC^2)$

$\Leftrightarrow mAB^2 = -AB^2$

$\Leftrightarrow m = -1$

Pour $m = -1$, le point A appartient à (E_m). (0,5 pt)

b) Nature et Construction de (E_{-1}).

$(E_{-1}) : 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -a^2 \Leftrightarrow -4MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$

G_{-4} est le barycentre du système $\{(A,-4); (B,1); (C,1)\}$.

(E_{-1}) n'est pas l'ensemble vide car $A \in (E_{-1})$. De plus $G_{-4} \neq A$, donc (E_{-1}) est le cercle de centre G_{-4} et passant par A. (0,5 pt)

3) $(F) : -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}$

a) * Vérifions que $B \in (F)$.

On a $-2BA^2 + BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{AB})$

$= 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}$ donc $B \in (F)$ (0,5 pt)

* Vérifions que $A \notin (F)$:

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2 \neq 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}$ donc $A \notin (F)$. (0,25 pt)

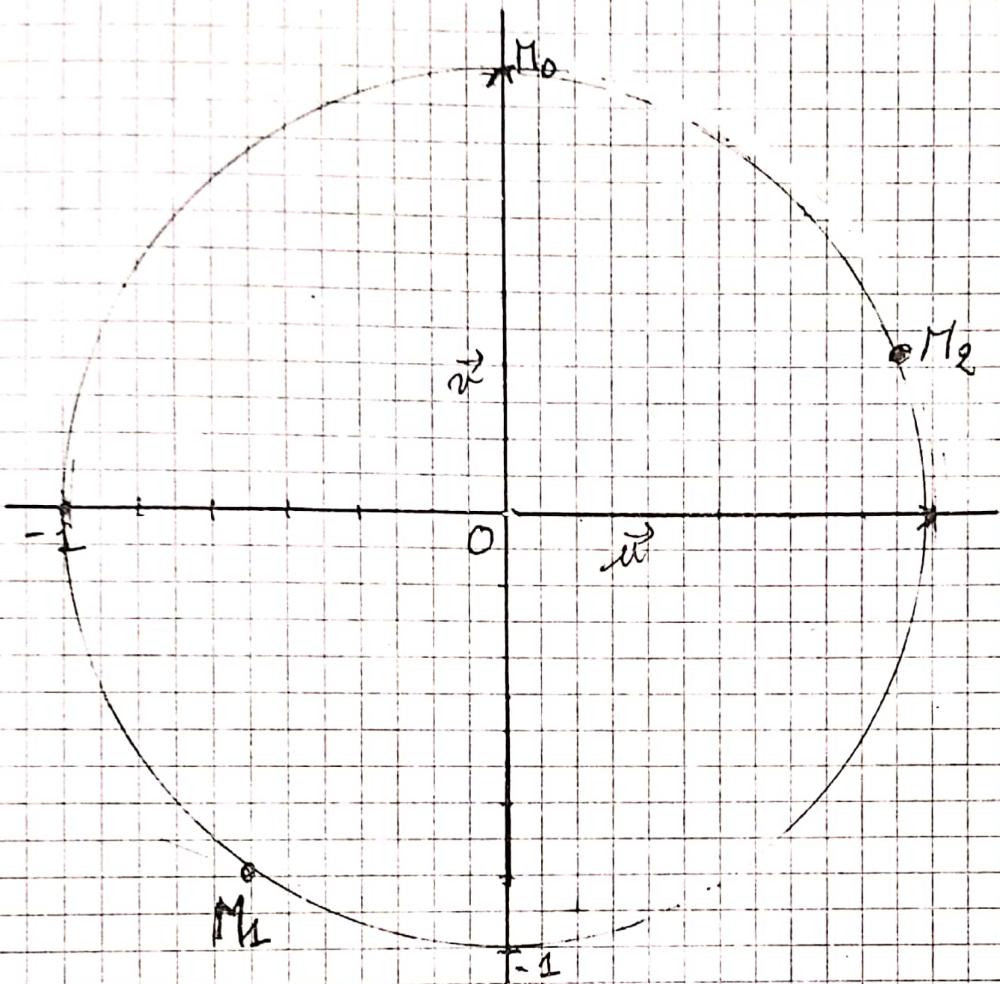
b) Déterminons (F). On a $-2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}$

$(F) \neq \emptyset$ car $B \in (F)$ et (F) n'est pas le plan car $A \notin (F)$ donc (F) est la perpendiculaire à (AI) passant par B. (0,5 pt)

2/10

Exercice 2 (4 pts)

1) Plaçons les points M_0, M_1 et M_2.



(0,75 pt)

2) a) Montrons que $\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}$ est un argument de z_n.

On a $\theta_{n+1}-\theta_n=\frac{5\pi}{6}$, donc (θ_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{5\pi}{6}$ et de premier terme $\theta_0=\frac{\pi}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\theta_n=\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}$ est un argument de z_n. (0,5 pt)

b) Ecrivons z_n sous forme exponentielle.

$M_n\in\mathcal{C}(O;1)\iff |z_n|=1$ et $\arg(z_n)=\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

donc $z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. (0,25 pt)

c) Mesure de $(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_{n+12}})$ et emplacement de M_{12}.

3/10

$mes(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+12}}) = \arg\left(\frac{z_{n+12}}{z_n}\right) = \arg(z_{n+12}) - \arg(z_n)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{5(n+12)\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right) = 10\pi$

$mes(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+12}}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (0,5 pt)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $mes(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+12}}) = 0$ et $M_n \in \mathscr{C}(O,1)$ donc $M_n = M_{n+12}$ et en particulier pour $n=0$, $M_0 = M_{12}$. (0,5 pt)

3) Montrons que $z_{n+4} = z_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

On a $\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+4)\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}} = e^{i\frac{10\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

d'où $z_{n+4} = z_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. (0,5 pt)

4) a) Ecrivons Z sous forme exponentielle.

$Z = \frac{z_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} - z_n}{z_{n+4} - z_{n+4} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{z_n}{z_{n+4}} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\pi} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (0,5 pt)

ou

$Z = e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

b) Nature du triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

On a $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, donc $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est un triangle équilatéral. (0,5 pt)

4/10

Problème (12 points)

Partie A (3 pts)

1) Ensemble $\Gamma_{(a,b)}$ des points invariants par $T_{(a,b)}$.

$T_{(a,b)}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x+a = x \\ by = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x = -a \\ y(b-1) = 0 \end{cases}$

- Si $a \neq 0$ alors il n'y a pas de point invariant par $T_{(a,b)}$. $\Gamma_{(a,b)} = \phi$. (0,25 pt)
- Si $a=0$ et $b=1$ alors $T_{(a,b)}$ est l'identité du plan. $\Gamma_{(a,b)}$ est le plan. (0,25 pt)
- Si $a=0$ et $b \neq 1$ alors $\Gamma_{(a,b)}$ est l'axe des abscisses. (0,25 pt)

2) a) Précisons t' lorsque $b=0$.

Pour $b=0$, $t' : \begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$

t' est la projection orthogonale sur l'axe $(O;\vec{i})$. (0,25 pt)

b) On suppose $b \neq 0$

i) Montrons que $T_{(a,b)} = t' \circ t$.

Soit $M_1(x_1, y_1)$ l'image de M par t et $M' = t'(M_1)$

On a $(t' \circ t)(M) = M'$

$t(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x+a \\ y_1 = y \end{cases}$ et $t'(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = by_1 \end{cases}$

et par suite $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = by \end{cases}$ donc $T_{(a,b)} = t' \circ t$. (0,5 pt)

ii) Vérifions que $t' \circ t = t \circ t'$.

Soit $M_2(x_2, y_2)$ l'image de M par t' et $M''(x'', y'')$ l'image de M_2 par t. On a $(t \circ t')(M) = M''$.

$t'(M) = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = by \end{cases}$ et $t(M_2) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x_2 + a \\ y'' = y_2 \end{cases}$ et par suite $\begin{cases} x'' = x+a \\ y'' = by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases}$ donc $tot' = T_{(a,b)}$.

Il vient alors que $tot' = t'ot = T_{(a,b)}$. (0,5 pt)

3) On suppose $b \neq 0$

a) Montrons que l'image de (D) est une droite (D').

$(D) : ux + vy + w = 0$, $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$T_{(a,b)} : \begin{cases} x' = x+a \\ y' = by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = \frac{1}{b} y' \end{cases}$

$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow ux + vy + w = 0 \Leftrightarrow u(x'-a) + \frac{v}{b} y' + w = 0$

$\Leftrightarrow ux' + \frac{v}{b} y' - au + w = 0$

L'image de (D) est la droite $(D') : ux + \frac{v}{b} y - au + w = 0$.

(0,5 pt)

b) Cas où (D) et (D') sont parallèles.

$\vec{m}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -\frac{v}{b} \\ u \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs directeurs respectivement de (D) et de (D').

$\det(\vec{m}, \vec{n}) = -vu + \frac{vu}{b} = uv\left(\frac{1}{b} - 1\right)$

$\det(\vec{m}, \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$ car $uv \neq 0$.

Dans le cas où $b = 1$, les droites (D) et (D') sont parallèles. (0,5 pt)

Partie B (1,5 pt)

$(E) : y'' - 4y' + 4y = 0$

1) Résolvons (E).

$(C) : r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$.

La solution générale de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (Ax+B)e^{2x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. (0,5 pt)

2) a) Montrons que $f'_{(\alpha,\beta)} = f_{(2\alpha, \alpha+2\beta)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha e^{2x} + 2(\alpha x + \beta)e^{2x}$

6/10

$f'_{(\alpha,\beta)}(x) = (2\alpha x + \alpha + 2\beta)e^{2x} = f_{(2\alpha,\alpha+2\beta)}(x)$

donc $f'_{(\alpha,\beta)} = f_{(2\alpha,\alpha+2\beta)}$. (0,5 pt)

b) Déduisons une primitive de $f_{(p,q)}$.

$f_{(2\alpha,\alpha+2\beta)} = f_{(p,q)} \iff \begin{cases} 2\alpha = p \\ \alpha+2\beta = q \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}p \\ \beta = -\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q \end{cases}$

Une primitive de $f_{(p,q)}$ est $f_{(\frac{1}{2}p,\, -\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}q)}$. (0,5 pt)

__Partie C__ (5 pts)

$\varphi(x) = (2x-3)e^{2x}$

1) Sens de variation et tableau de variation de φ.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\varphi'(x) = (4x-4)e^{2x}$ (0,25 pt)

$\forall x \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(x) < 0$ et φ est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$. (0,25 pt)

$\forall x \in]1; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$ et φ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (0,25 pt)

* $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x-3)e^{2x} = 0$ (0,25 pt)

* $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-3)e^{2x} = +\infty$ (0,25 pt)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-e^{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(0,25 pt)

2°) Equation de (T_0).

(T_0) : $y = x\varphi'(0) + \varphi(0)$

(T_0) : $y = -4x - 3$ (0,25 pt)

7/10

3) Equation de (T_{x_0})

$\varphi''(x) = (8x-4)e^{2x}$ (0,25 pt)

$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x-4=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Donc $x_0 = \frac{1}{2}$. (0,25 pt)

$(T_{1/2})$: $y = (x-\frac{1}{2})\varphi'(\frac{1}{2}) + \varphi(\frac{1}{2}) = -2e(x-\frac{1}{2}) - 2e$

$(T_{1/2})$: $y = -2ex - e$ (0,5 pt)

4°) Traçons $(\mathcal{C})$ et (T_0). (voir graphique)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ donc $(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O;\vec{J})$.

5°) Calculons A_λ.

$A_\lambda = -\int_\lambda^0 \varphi(x)dx$ u.a (0,25 pt)

Une primitive de φ est $f_{(1;-2)}$ (0,25 pt)

$A_\lambda = -[(x-2)e^{2x}]_\lambda^0$ u.a $= 2+(\lambda-2)e^{2\lambda}$ u.a. (0,5 pt)

Partie D (2,5 pts)

1°) Montrons que l'image de $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$ par T est la courbe représentative de la dérivée $f'_{(\alpha,\beta)}$.

T : $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = 2e^{-1}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}ey' \end{cases}$

$M(x,y) \in \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow y = (\alpha x+\beta)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ey' = [\alpha(x'+\frac{1}{2})+\beta]e^{2(x'+\frac{1}{2})}$

$\Leftrightarrow y' = (2\alpha x' + \alpha + 2\beta)e^{2x'}$

$\Leftrightarrow M'(x',y') \in \mathcal{C}_{(2\alpha,\alpha+2\beta)}$

$\mathcal{C}_{(2\alpha,\,\alpha+2\beta)}$ est la courbe représentative de $f_{(2\alpha,\,\alpha+2\beta)} = f'_{(\alpha,\beta)}$,
donc l'image de $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$ par T est la courbe représentative de la dérivée $f'_{(\alpha,\beta)}$. (1pt)

2) On suppose $\alpha \neq 0$

a) Montrons que $f''_{(\alpha,\beta)}$ s'annule une et une seule fois.

On a $f'_{(\alpha,\beta)} = f_{(2\alpha,\,\alpha+2\beta)}$ donc $f''_{(\alpha,\beta)} = f'_{(2\alpha,\,\alpha+2\beta)}$

$$f''_{(\alpha,\beta)} = f_{(4\alpha,\,2\alpha+2(\alpha+2\beta))} = f_{(4\alpha,\,4\alpha+4\beta)} \quad (0,25pt)$$

$$f''_{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \iff 4\alpha x + 4\alpha + 4\beta = 0 \iff x = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}.$$

$f''_{(\alpha,\beta)}$ s'annule une fois et une seule pour $x = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$
(0,25pt)

b) Déterminons l'ensemble des points $I_{(\alpha,\beta)}$.

$$f_{(\alpha,\beta)}\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) = \left[\alpha\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)+\beta\right]e^{2\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)} = -\alpha e^{2\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}$$

$I_{(\alpha,\beta)}$ est le point de coordonnées $\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha},\, -\alpha e^{2\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)}\right)$ (0,5pt)

$\alpha+\beta = 1$ donc $x = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \iff -\alpha = \frac{1}{x}$

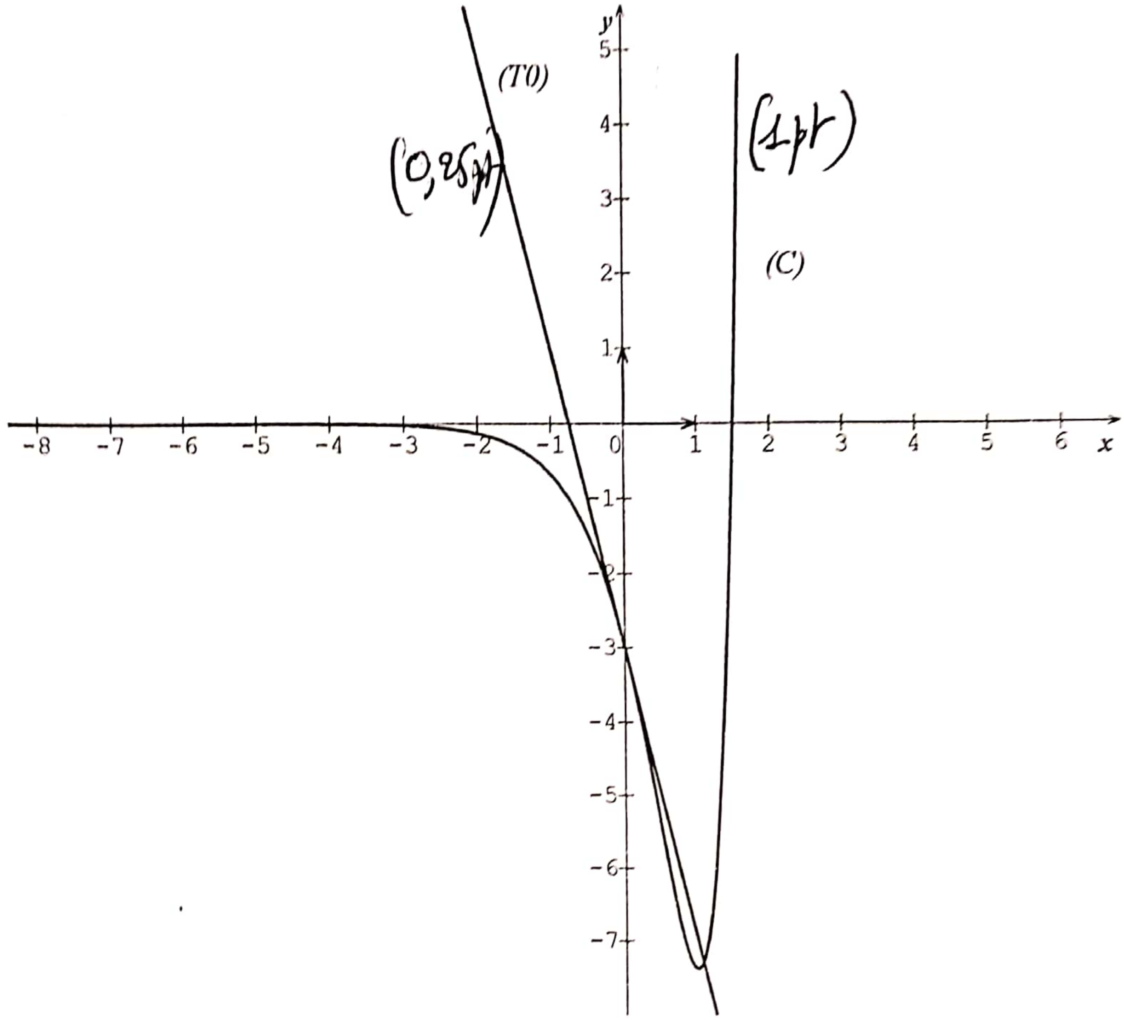
$$y = -\alpha e^{2\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)} = \frac{1}{x}e^{2x}$$

L'ensemble des points $I_{(\alpha,\beta)}$ tels que $\alpha+\beta = 1$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}e^{2x}$. (0,5pt)

FIN

9/10

Sujet 1 : courbe *(C)* et tangente (T_0)



10/10