ELHAJJAJI MATHS

BAC BLANC N°: 3

SUJET CORRIGÉ DÉTAILLÉ

2 BACCALAUREAT

" SCIENCES EXPÉRIMENTALES "

2 BAC SC.EXP

EL BACHIR EL HAJJAJI

بقلم : الاستاذ : البشير الحجاجي

نسألكم الدعاء الخالص

دُعَاءٌ

أَبِي وَ أُمِّي

أَسْأَلُ اللهَ الرَّحْمَنَ الرَّحِيمَ الَّذِي لَا تُخَالِطُهُ الظُّنُونُ
وَلَا تُعْجِزُهُ الْأُمُورُ أَنْ يَرْحَمَهُمْ رَحْمَةً تُوَسِّعُ
عَلَيْهِمْ قُبُورَهُمْ وَتُسَهِّلُ حِسَابَهُمْ،
وَيَرْحَمُنَا إِذَا صِرْنَا إِلَى مَا صَارُوا إِلَيْهِ

دُعَاءٌ

سُبْحَانَ اللهِ وَبِحَمْدِهِ عَدَدَ خَلْقِهِ، وَرِضَا
نَفْسِهِ، وَزِنَةَ عَرْشِهِ، وَمِدَادَ كَلِمَاتِهِ

El hajjaji El bachir:

gmail: hajjajibachir123@gmail.com

002126.73.36.82.92

اللَّهُمَّ أَطْعِمْ أُمِّي وَأَبِي مِنَ الْجَنَّةِ، وَأَرِهِمْ مَكَانَهُمْ
مِنَ الْجَنَّةِ، وَقُلْ لَهُمْ ادْخُلُوا مِنْ أَيِّ بَابٍ تَشَاؤُونَ

الامتحان التجريبي رقم 3

3H	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

Instructions générales

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le condidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3,00 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,25 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2,75 points
Problème	Étude d'une fonction, calcul intégral et suites numériques	11,00 points

بسم الله الرحمن الرحيم

Bac blanc N°:3

2 BAC
SC. EXP
DUREE:
3 HEURES

EXERCICE 1 ☞ 3,00 POINTS

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le point $A(1;-1;3)$ et le plan $(P): x-y+3z=0$

0,25 ① a- Vérifier que : $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ / $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (OA)

0,50 b- Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à la droite (OA) en A.

0,25 c- Vérifier que : $(P)//(Q)$

② Soit (S) la sphère tangente au plan (Q) en A et telsque le plan (P) coupe (S) selon un cercle (Γ) de centre O et de rayon $r=\sqrt{33}$

0,75 a- Montrer que $\Omega(a;b;c)$ le centre de la sphère (S) appartient à la droite (OA), puis en déduire que : $b=-a$ et $c=3a$

0,75 b- Montrer que : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$, puis en deduire que : $a-b+3c=-11$

0,50 c- En deduire les coordonneés de Ω, puis montrer que le rayon de (S) est $R=2\sqrt{11}$

EXERCICE 2 ☞ 3,25 POINTS

0,50 I- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2-\sqrt{2}z+2=0$

II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les point A, B et C d'affixes respectives :

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$; $b=1+i$ et $c=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)$

0,50 ① Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexe a et b.

0,50 ② Montrer que le point A est l'image du point B par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$, puis déterminer la nature du triangle OAB.

0,25 3. a. Vérifier que : $\frac{a}{b}=c$

0,25 b. En déduire le module et un argument du nombre complexe c.

4. Soit D le point d'affixe $d=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

0,50 a. Calculer d^2, puis donner une forme trigonométrique de d^2

0,25 b. En déduire le module et un argument de d

0,50 c. Vérifier que : $d=2c$, puis en déduire que :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 3 — 2,75 POINTS

Une maladie atteint 1% d'une population donnée

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs.
- Chez les individus non malades, 98% des testes sont négatifs.

On choisit au hasard un individu de cette population.

On considère les deux événements suivants :

T : "Le test est positif"

M : "L'individu choisit est malade"

0,50 1. Construire un arbre pondéré.

0,75 2. Calculer $p(\overline{M})$, $p_M(\overline{T})$ et $p_{\overline{M}}(T)$

0,50 3. Calculer $p(T\cap M)$ et $p(T\cap\overline{M})$, puis en déduire $p(T)$

0,50 4. a. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que cet individu soit malade ?

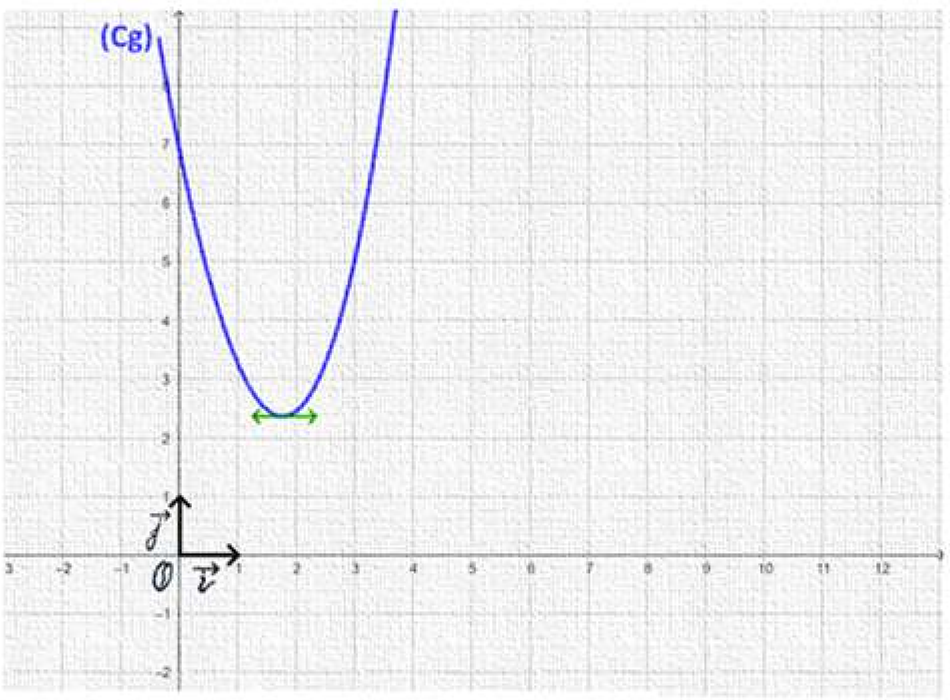
0,50 b. Les deux événements M et T sont ils indépendants ? justifier

PROBLEME — 11,00 POINTS

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}$$

La courbe représentative de g est comme suit :



0,25 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x)>0$

II - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité : 1cm)

0,50 1 - a - Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}=-\infty$

0,50 b - Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

0,25 c - Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,25 2 - a - Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x-\frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$

0,50 b - Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (Poser $t=\frac{1}{2}x$)

0,25 c - Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,25 d - Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)

0,75 3 - a - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)e^{-\frac{1}{2}x}$

0,25 b - Dresser le tableau de variations de f

0,75 4 - Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0<\alpha<\frac{1}{2}$ (On donne : $f\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 0,3$)

0,50 5 - a - Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f''(x)=\frac{1}{4}(-x^2+10x-17)e^{-\frac{1}{2}x}$

0,50 b - En déduire que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions (leurs coordonnées ne sont pas demandés)

0,50 6 - Représenter la droite (D) et la courbe dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On admet que les points d'inflexions sont $A(2,1;7)$ et $B(7,8;7)$)

0,50 7 - a - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

0,50 b - Montrer que f^{-1} est dérivable en -1 et calculer $(f^{-1})'(-1)$

0,50 c- Tracer $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère

0,50 8- a- Montrer que la fonction : $H : x \longmapsto (-2x^2-8x-16)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ sur $\mathbb{R}$

0,25 b- En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$.

0,50 c- En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_{-2}^{0} 2x e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

0,50 d- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les deux droites d'équations $x=-2$ et $x=0$

III- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0,50 1- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

0,50 2- Montrer que (u_n) est décroissante

0,75 3- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION

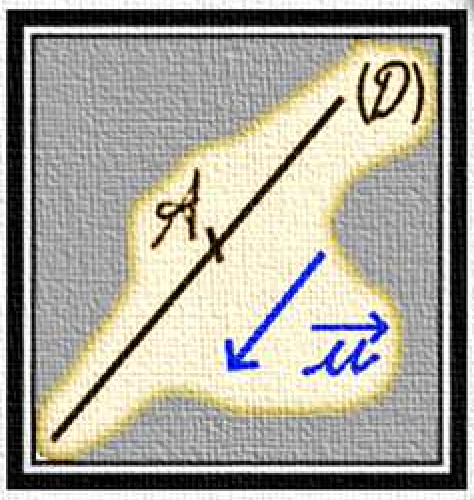
EXERCICE 1 ☞ 3,00 POINTS

1 – a – Vérifions que : $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (OA)

Rappel

☞ Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite (D), il faut avoir un point appartenant à (D) et un vecteur directeur de (D)

Si (D) est une droite passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $\vec{u}(a ; b ; c)$ est un vecteur directeur de (D)



Alors : $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} / t\in\mathbb{R}$

est une représentation paramétrique de la droite (D)

☞ La droite (AB) passe par le point A (aussi par B) et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (aussi $\overrightarrow{BA}$) est un vecteur directeur de (AB)

On a la droite (OA) passe par le point $O(0;0;0)$ et $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ est un vecteur directeur de (OA)

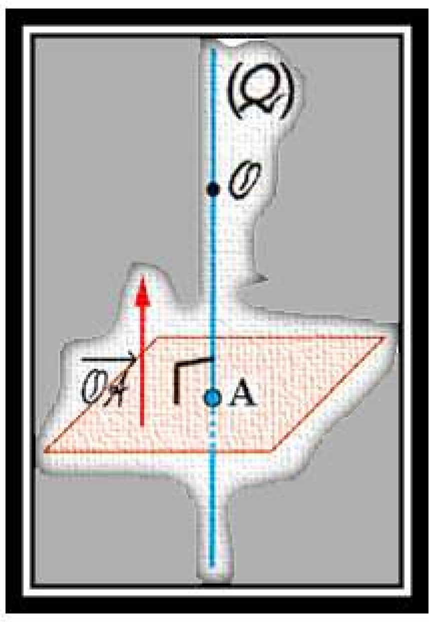
D'où : $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (OA)

b – Déterminons une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à la droite (OA) en A.

Remarque

Les mots : perpendiculaire et parallèle sont juste pour cacher vecteur directeur ou normal.

On a : $(OA) \perp (Q)$



Et puisque $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ est un vecteur directeur de la droite (OA)

Alors $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ est un vecteur normal à (Q)

Donc : $(Q) : 1x - 1y + 3z + d = 0$

$(Q) : x - y + 3z + d = 0$

On a : $A \in (Q)$

Donc : $x_A - y_A + 3z_A + d = 0$

Donc : $1 + 1 + 9 + d = 0$

Donc : $d = -11$

D'où : $(Q) : x - y + 3z - 11 = 0$

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

c- Vérifions que : $(P) // (Q)$

On a : $(P) : x - y + 3z = 0$

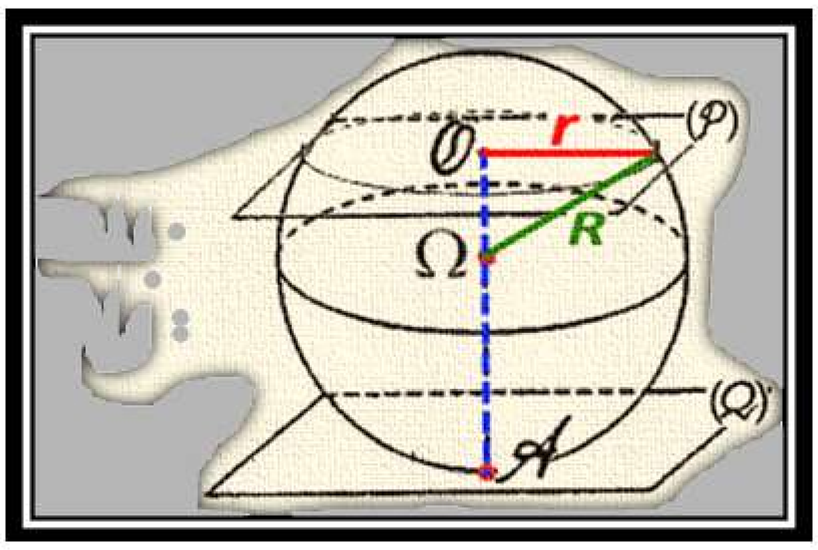
Donc : $\vec{u}(1;-1;3)$ est un vecteur normal à (P) $\quad \boxed{\vec{u} = \overrightarrow{OA}}$

Et on a $\vec{u}(1;-1;3)$ est aussi normal à (Q)

Donc les deux plan (P) et (Q) sont parallèles.

$\boxed{2}$ -a- Soit $\Omega(a;b;c)$ le centre de la sphère (S)

On a la sphère (S) est tangente au plan (Q) en A



Donc : $(\Omega A) \perp (Q)$ ⊛

Et on a O est le centre du cercle d'intersection du plan (P) et la sphère (S)

Donc O est la projection orthogonale du point Ω sur le plan (P)

Donc $(O\Omega) \perp (P)$ ⊛⊛

Et puisque : $(P) // (Q)$

Alors, d'après ⊛ et ⊛⊛ on aura : $(\Omega A) // (O\Omega)$

Donc les deux droites (ΩA) et $(O\Omega)$ sont confondues

Et par suite $\Omega \in (OA)$

Deduisons que : $b = -a$ et $c = 3a$

بسم الله الرحمن الرحيم

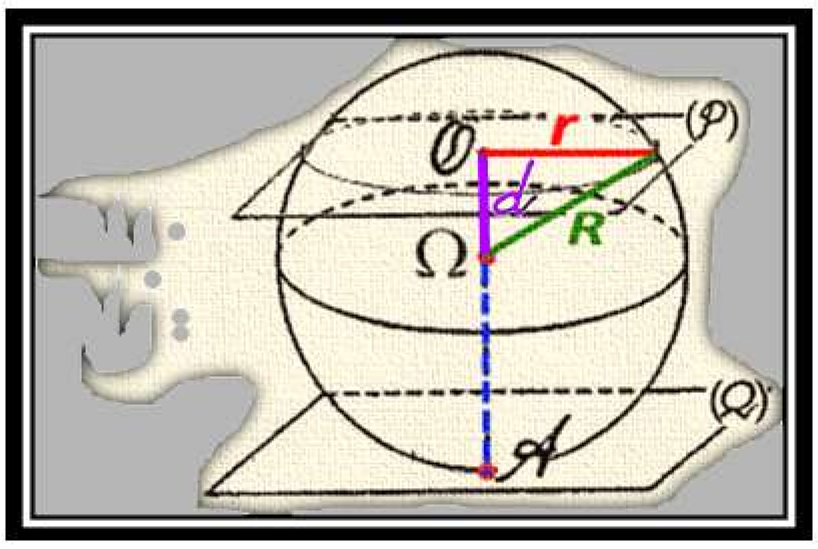
وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

On a : $\Omega \in (OA) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_\Omega = t \\ y_\Omega = -t \\ z_\Omega = 3t \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = 3t \end{cases}$

D'où : $b = -a$ et $c = 3a$ car $t = a$

b- Montrons que : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$



Soit $d = d(\Omega ; (P))$

On sait que : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Donc : $r^2 = R^2 - d^2$

Et puisque : $r = \sqrt{33}$; $R = \Omega A$ et $d = \Omega O$

Alors : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$

Déduisons que : $a - b + 3c = -11$

On a : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$

Donc $(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2 + (z_\Omega - z_A)^2 - (x_\Omega^2 + y_\Omega^2 + z_\Omega^2) = 33$

$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-3)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 33$

$a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 + c^2 - 6c + 9 - a^2 - b^2 - c^2 = 33$

$-2a + 2b - 6c + 11 = 33$

$2a - 2b + 6c = 11 - 33$

$2(a - b + 3c) = -22$

D'où : $a - b + 3c = -11$

c- Déduisons les coordonnées de Ω

D'après le résultat de la question 2-a, on a : $b = -a$ et $c = 3a$

Et puisque : $a - b + 3c = -11$ (D'après le résultat de la question précédente)

Alors, on aura : $a + a + 3.3a = -11$

Donc : $11a = -11$

Donc : $a = -1$; $b = 1$ et $c = -3$

Et par suite : $\Omega(-1 ; 1 ; -3)$

Montrons que le rayon de la sphère est $R = 2\sqrt{11}$

On a $A \in (S)$

Donc $R = \Omega A$

$= \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + 36}$

$= \sqrt{44}$

$= 2\sqrt{11}$

D'où : $R = 2\sqrt{11}$

EXERCICE 2 — 3,25 POINTS

I ~ Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $z^2 - \sqrt{2}z + 2 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(2)$

$= 2 - 8$

$= -6$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ c = 2 \end{cases}$

Puisque : $\Delta < 0$

Alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D'où : $S = \left\{ \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2} \right\}$

II ~ Soient : $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $b = 1 + i$ et $c = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)$

1 ~ Déterminons une forme trigonométrique des nombres complexes a et b

Remarques

Soit $z = a + ib$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$

Ecrire z sous forme trigonométrique revient à déterminer deux réels r et θ tels que : $r > 0$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

avec : $\begin{cases} r = |z| & \text{Le module de } z \\ \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi] & \text{un argument de } z \end{cases}$

La méthode est comme suit :

Au début, on détermine le module $r = |z|$

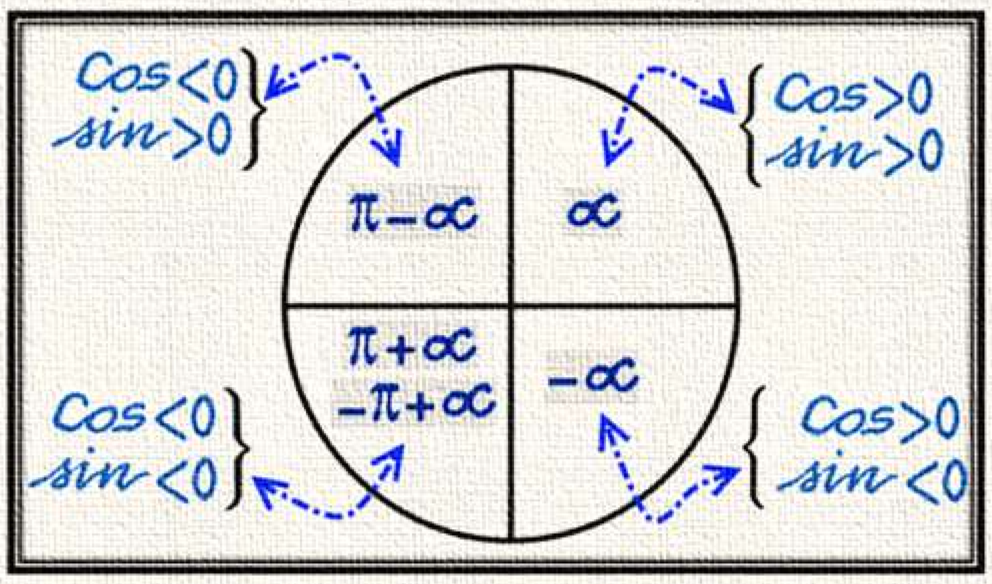
Puis on factorise par le module, et pour le programme de 2Bac sciences expérimentales, après avoir factoriser par le module, il faut avoir l'un des cas suivants :

$z = r\left(\pm\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \longrightarrow$ On pense à : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$z = r\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i\right) \longrightarrow$ On pense à : $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

$z = r\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow$ On pense à : $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

puis et pour enlever les moins $(-)$, il faut juste utiliser le cercle trigonométrique suivante :



Des cas, pour déterminer le module, ça sera mieux de factoriser z pour éviter les grands calcul.

On a : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Donc : $|a|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right|=\left|\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

Donc : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$

On a : $b=1+i$

Donc : $|b|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Donc : $b=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$

2 - Montrons que le point A est l'image du point B par la rotation R.

Remarques

Pour cela, il suffit de vérifier que : $z_A-z_O=(z_B-z_O)e^{i\frac{\pi}{12}}$, avec $z_O=0$

Donc vérifions que : $\frac{a}{b}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Ici; on a : $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\arg b\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc, pour déterminer un argument des nombres complexes $\frac{a}{b}$ et ab, il faut utiliser les deux propriétés suivantes :

- $[r;\theta]\cdot[r';\theta']=[rr';\theta+\theta']$
- $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$

On a : $a=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$ et $b=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$

$$\text{Donc : } \frac{a}{b}=\frac{\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,;\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[1\,;\frac{\pi}{12}\right]=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$[1\,;\theta]=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

$$\text{Donc : } \frac{a}{b}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc : } a=b\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc : } z_A-z_O=(z_B-z_O)\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

D'où : $R(B)=A$.

Rappel

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ

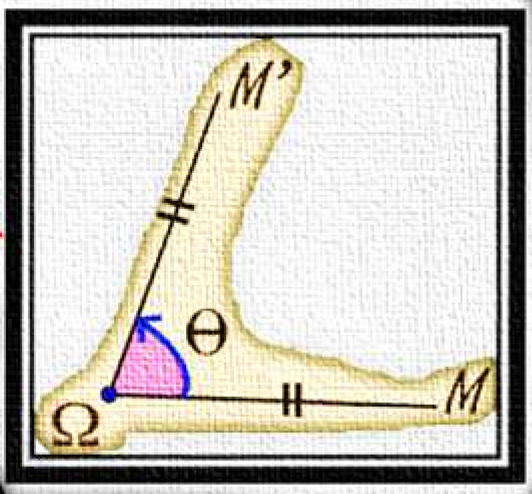
Soit M' d'affixe z' image de M d'affixe z par la rotation R

Donc $R(M)=M' \Longleftrightarrow z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)\,e^{i\theta}$

(Résultat analytique)

$$R(M)=M' \Longleftrightarrow \begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta\,[2\pi]\end{cases}$$

(Résultat géométrique)



Déterminons la nature du triangle OAB.

$$\text{On a : } R(B)=A \Longleftrightarrow \begin{cases}OA=OB\\ \left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{12}\,[2\pi]\end{cases}$$

D'où, le triangle OAB est isocèle en O

$\left(\frac{\pi}{12}\right.$ est une mesure de l'angle orienté $\left.\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}}\right)\right)$

3 a- Vérifions que : $\frac{a}{b}=c$

(Ici ; ça sera mieux de vérifier que $a=bc$)

$$\begin{aligned}\text{On a : } bc&=(1+i)\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)\right)\\
&=\frac{1}{4}(1+i)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(2i\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}+2i\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$=a$$

Donc : $6c=a$

D'où : $\frac{a}{6}=c$

b- Déduisons le module et un argument de c.

D'après le résultat de la question précédente, on a : $c=\frac{a}{6}$

Et d'après le résultat de la question 2, on a : $\frac{a}{6}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Donc : $c=e^{i\frac{\pi}{12}}$

D'où : $\begin{cases}|c|=1\\ arg(c)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]\end{cases}$

$\boxed{4}$ - a - Calculons d^2

On a : $d=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Donc : $d^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}^2+2.\sqrt{2+\sqrt{3}}.i\sqrt{2-\sqrt{3}}+\left(i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=2+\sqrt{3}+2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+(i)^2.\sqrt{2-\sqrt{3}}^2$$
$$=2+\sqrt{3}+2i\sqrt{4-3}-\sqrt{2-\sqrt{3}}^2$$
$$=2+\sqrt{3}+2i-(2-\sqrt{3})$$
$$=2+\sqrt{3}+2i-2+\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}+2i$$

D'où : $d^2=2\sqrt{3}+2i$

Une forme trigonométrique de d^2

On a : $d^2=2\sqrt{3}+2i$

Donc : $|d^2|=|2\sqrt{3}+2i|=2|\sqrt{3}+i|=2\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=4$

On a : $d^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}+\frac{2i}{4}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left[4;\frac{\pi}{6}\right]$

D'où : $d^2=\left[4;\frac{\pi}{6}\right]$

b- Déduisons le module et un argument du nombre complexe d

Soit $n\in\mathbb{N}$

Rappel

$$\begin{cases} |z^n| = r \\ \arg(z^n) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|^n = r \\ n \arg z \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{r} \\ \arg z \equiv \frac{\theta}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

$$n \arg z \equiv \theta\,[2\pi]$$

$$\Updownarrow$$

$$n \arg z = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\arg z = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

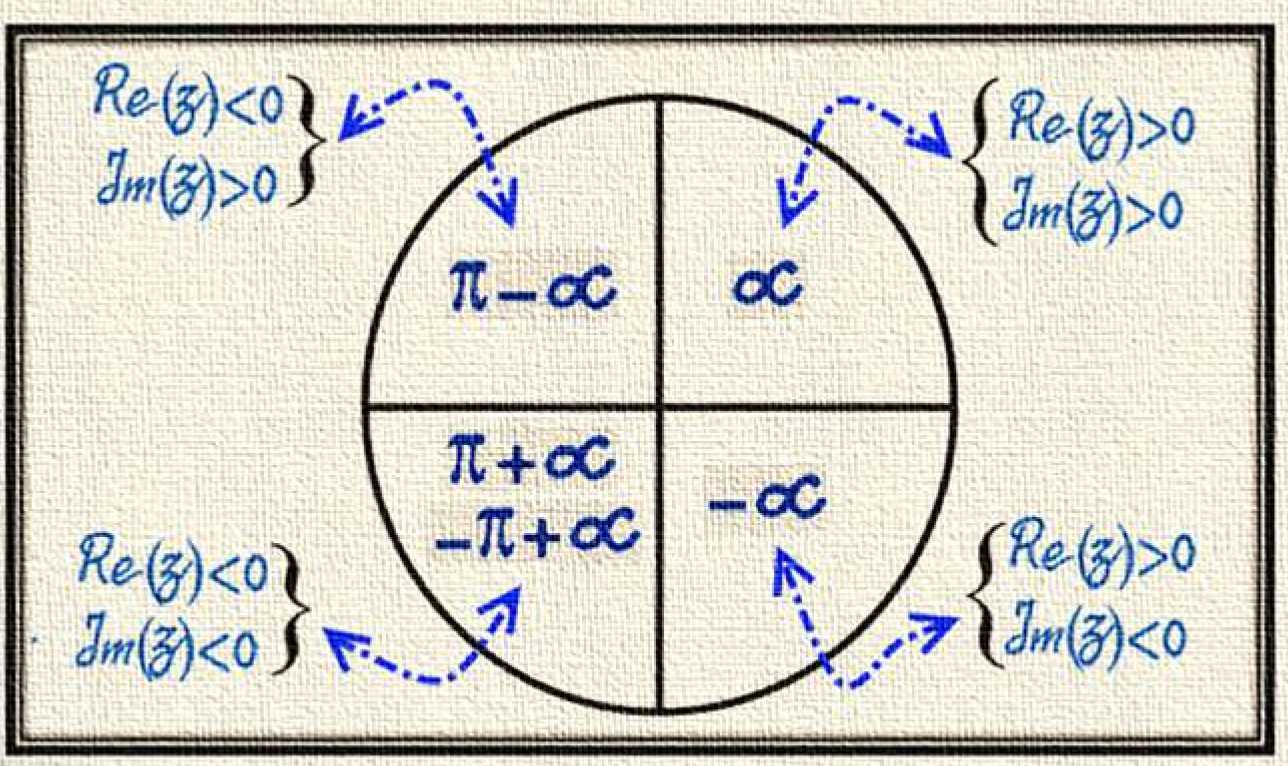
Pour : $n = 2$

Pour le module, c'est claire

Mais pour un argument de z, on a deux cas possible :

$\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$ où bien $\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\,[2\pi]$

Et pour déterminer le juste parmi les deux, il faut tout simplement savoir les signes de la partie réelle et la partie imaginaire de z en utilisant la forme algébrique de z et le cercle suivante :



D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{cases} |d^2| = 4 \\ \arg(d^2) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |d|^2 = 4 \\ 2\arg d \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |d| = 2 \\ \arg d \equiv \frac{\pi}{12}\,[\pi] \end{cases}$$

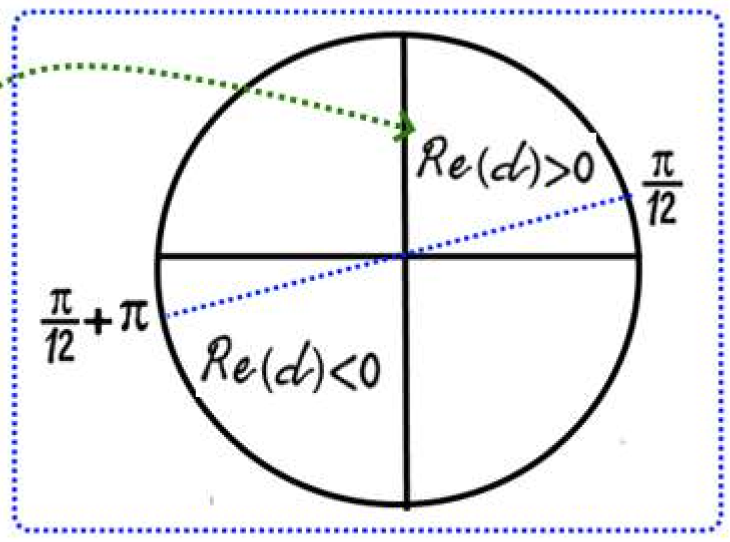
Donc : $\begin{cases} |d| = 2 \\ \arg d \equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{cases}$ où bien $\begin{cases} |d| = 2 \\ \arg d \equiv \frac{\pi}{12} + \pi\,[2\pi] \end{cases}$

Et puisque : $d=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Alors : $Re(d)>0$

Donc : $\arg d \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

D'où : $d=\left[2;\frac{\pi}{12}\right]$



c‿ Vérifions que : $d=2c$

On a : $d=\left[2;\frac{\pi}{12}\right]=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $c=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Donc : $d=2c$

Déduisons que : $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

On a : $d=2c \Longleftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}=2.\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

D'où : $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 3 ☞ 2,75 POINTS

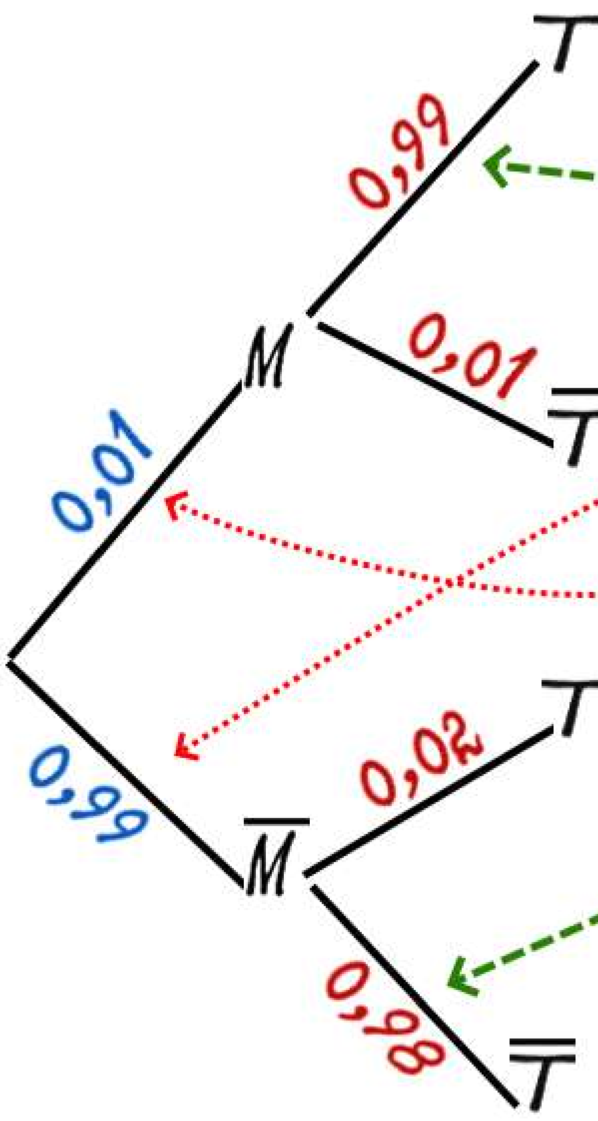
1 ‿ Construction de l'arbre pondéré.

Remarque

Un arbre pondéré permet de décrire une expérience aléatoire et de calculer des probabilités.

Pour le construire, on part d'une origine que nomme racine de l'arbre, puis on construit les branches qui mènent aux feuilles appeleés nœuds. c'est-à-dire à tous les événements possibles.

Dans notre cas l'origine est l'individu malade et la branche est le teste positif.



1% malade

$p(M)=\frac{1}{100}=0,01$

$p(\overline{M})=1-p(M)=0,99$

$p_M(T)=99\%=\frac{99}{100}=0,99$

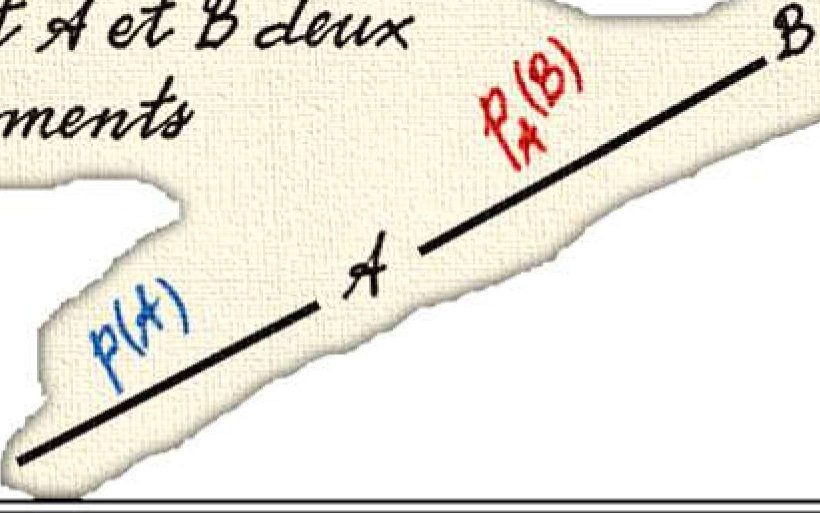
$p_{\overline{M}}(\overline{T})=98\%=\frac{98}{100}=0,98$

2 - Calculons $p(\overline{M})$, $p_M(\overline{T})$ et $p_{\overline{M}}(T)$

En générale

Soient A et B deux événements

$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$



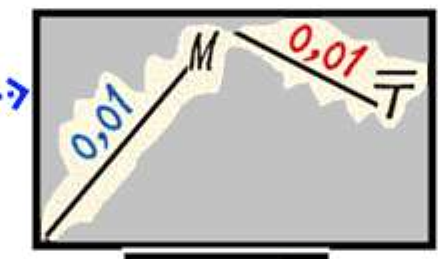
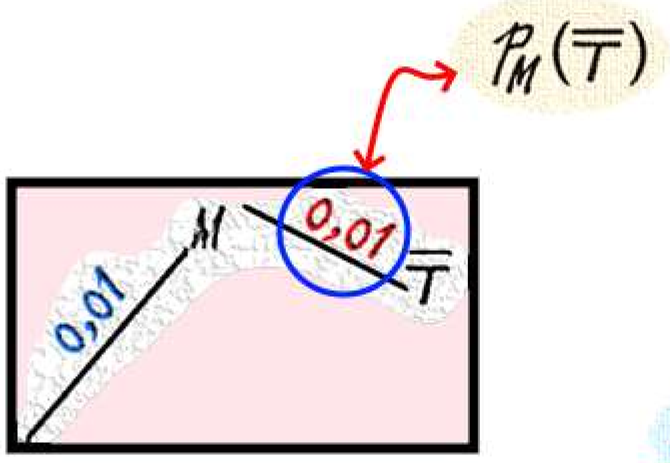
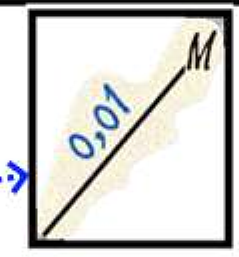
Calculons $p(\overline{M})$

D'après l'arbre pondéré

On aura : $p(\overline{M})=1-p(M)=0,99$

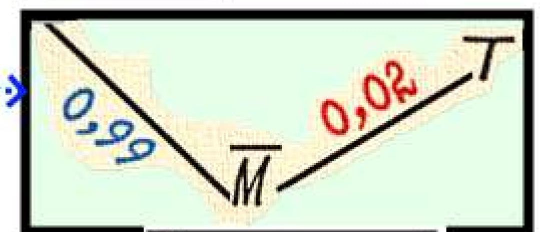
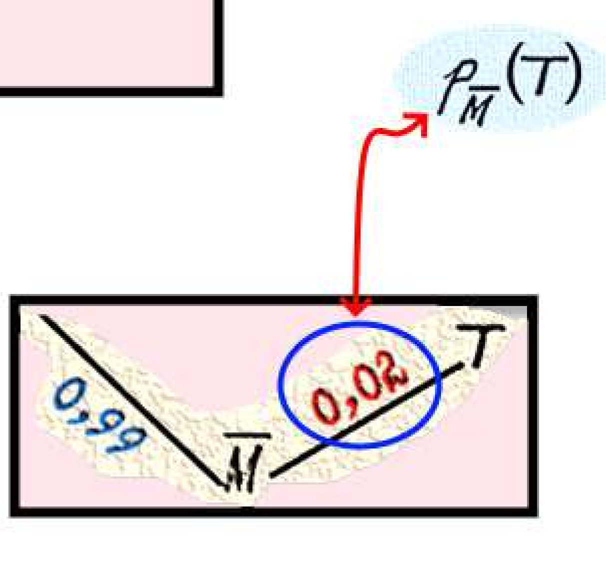
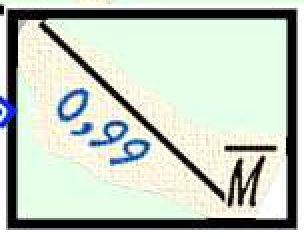
Calculons $p_M(\overline{T})$

$$p_M(\overline{T})=\frac{p(M\cap\overline{T})}{p(M)}=\frac{0,01.0,01}{0,01}=0,01$$

Calculons $p_{\overline{M}}(T)$

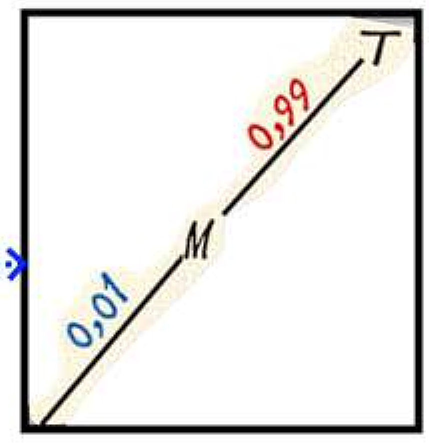
$$p_{\overline{M}}(T)=\frac{p(\overline{M}\cap T)}{p(\overline{M})}=\frac{0,99.0,02}{0,99}=0,02$$

3 - Calculons $p(T\cap M)$

$p(T\cap M)=0,01.0,99$

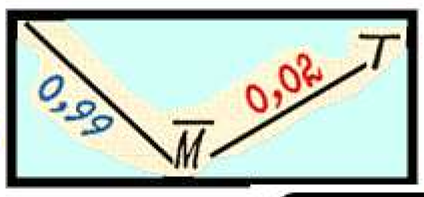
$=0,0099$



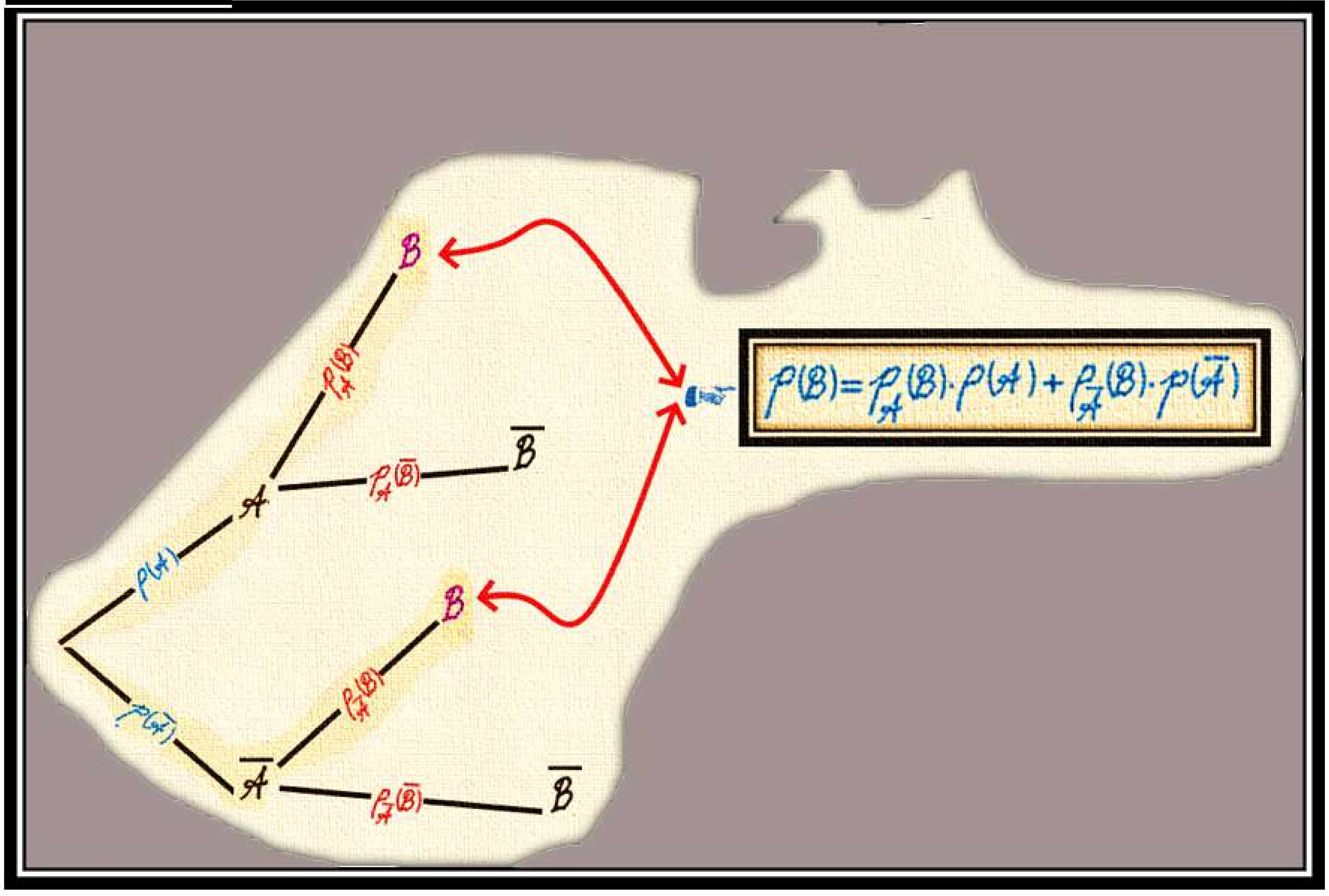
Calculons $p(T\cap\overline{M})$

$p(T\cap\overline{M})=0,99.0,02$

$=0,0198$



Rappel



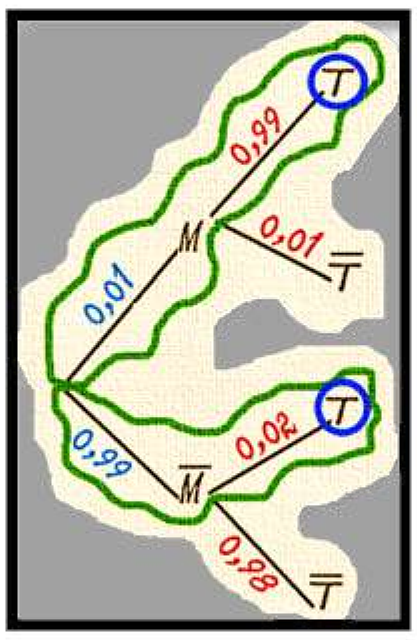
Déduisons $p(T)$

On sait que : $p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap \overline{M})$

$=0{,}0099+0{,}0198$

$=0{,}0297$

D'où: $p(T)=0{,}0297$



4 - a - Sachant que le teste est positif (T), calculons la probabilité de cet individu soit malade (M)

Rappel

Sachant qu'un événement B est realisé, la probabilité d'un événement A est $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$

$A\cap B$: Les deux événements A et B sont réalisés en même temps.

b -

Rappel

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

ou encore

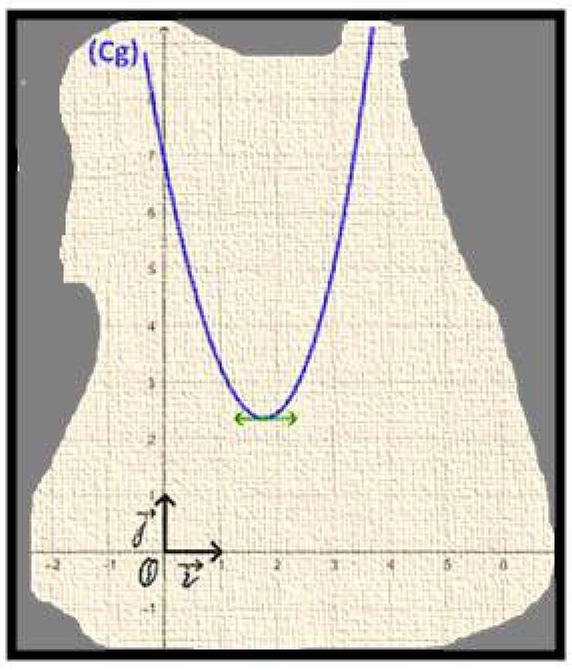
$$p_B(A)=p(A)$$

On a : $p_M(T) = 99\% = \frac{99}{100} = 0{,}99$ et $p(T) = 0{,}0297$

Donc : $p_M(T) \neq p(T)$

D'où, les événements M et T ne sont pas indépendants (ils sont liés)

PROBLEME ☞ **11,00 POINTS**



I - D'après la courbe représentative de g, on a (C_g) est au dessus de l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$ et (C_g) ne coupe pas l'axe des abscisses

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$

II - Soit : $f(x) = x - (x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}$

1 - a - Montrons que : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}x}$

On pose $t = -\frac{1}{2}x$

☞ Si $x \longrightarrow -\infty$

☞ Alors $t \longrightarrow +\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x e^{\frac{1}{2}x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} x e^{\frac{1}{2}x}}$

On pose : $t = \frac{1}{2}x$

☞ Si $x \longrightarrow -\infty$

☞ Alors $t \longrightarrow -\infty$

Donc, on aura : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t e^{t}} = -\infty$

Car $\lim\limits_{t \to -\infty} t e^{t} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^-$ Si n impair

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^+$ Si n pair

b - Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - (x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}\right)$

On a $\begin{cases} \lim -(x-1)^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty \text{ (D'après la question précédente)} \end{cases}$

Donc $\lim_{x\to-\infty} -(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x} = -\infty$

Et puisque $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

Alors $\lim_{x\to-\infty} \left(x-(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -\infty$

Et par suite $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Montrons que : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} - \frac{(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 1-(x-1)^2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}$$

On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = -\infty$ (D'après la question précédente)

Et : $\lim_{x\to-\infty} -(x-1)^2 = -\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty} -(x-1)^2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} 1-(x-1)^2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x} = +\infty$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c- Déterminons la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

2 - a- Vérifions que : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ f(x) = x - \frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} + \frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = x-(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x}$
$$= x-(x^2-2x+1)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$= x-x^2 e^{-\frac{1}{2}x} + 2x e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$= x - \frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} + \frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ f(x) = x - \frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}} + \frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$

b- Montrons que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{4\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{4\left(\frac{1}{2}x\right)}{e^{\frac{1}{2}x}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

On pose : $t=\frac{1}{2}x$ (Donc $x=2t$)

Il faut juste penser à la propriété $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^n}=+\infty$

- Si $x\longrightarrow+\infty$
- Alors $t\longrightarrow+\infty$

Donc, on aura :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty} 2t-4\cdot\frac{t^2}{e^t}+4\cdot\frac{t}{e^t}-\frac{1}{e^t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty} 2t-\frac{4}{\frac{e^t}{t^2}}+\frac{4}{\frac{e^t}{t}}-\frac{1}{e^t}$$

$$=+\infty$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}$$

Car : $\begin{cases}\lim_{t\to+\infty} 2t=+\infty\\ \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty\\ \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty\end{cases}$

D'où : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c- Montrons que la droite (D) d'equation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

Rappel

Pour montrer qu'une droite (D) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de ∞, il faut juste verifier que : $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

Et d'après la question précédente, on aura :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{1}{2}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}=0$$

Même changement de variable $t=\frac{1}{2}x$

Donc: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

D'où la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

d. Étudions la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)

Rappel

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$, il faut étudier le signe de $(f(x)-(ax+b))$

- Si: $\forall x\in I\ ;\ f(x)-(ax+b)\geqslant 0$
  Alors la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ)
- Si: $\forall x\in I\ ;\ f(x)-(ax+b)\leqslant 0$
  Alors la courbe (C_f) est au dessous de la droite (Δ)
- Les solutions de l'équation $f(x)=(ax+b)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ)

Étudions le signe de $f(x)-y$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-y=x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}-x$$
$$=(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}$$

$(D): y=x$
On remplace y par x

Puisque: $\begin{cases}(x-1)^2\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{2}x}>0\end{cases}$

Alors: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)-y\leqslant 0$

Donc la courbe (C_f) est au dessous de la droite (D) sur $\mathbb{R}$ partout

Remarque

$f(x)=y \iff (x-1)^2=0 \iff x-1=0 \iff x=1$

Donc (C_f) coupe la droite (D) en un seul point $A(1;f(1))$ avec $f(1)=1$

Cette question est très importante pour l'étude de la suite (partie III)

En effet :

- La suite (u_n) est majorée par 2 et minorée par 1 (Voir la partie III)
- D'après la position relative de (C_f) et la droite $(D): y=x$; on a : $\forall x\in[1;2]; f(x)-x\leq 0$
  - Donc (u_n) est décroissante
- Le seul point fixe de f est 1 $(f(1)=1)$

Donc la limite de la suite (u_n) vaut 1

3 - a - Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)e^{\frac{1}{2}x}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

(Comme étant composeés, produit et somme des fonctions dérivable.)

Soit $x\in\mathbb{R}$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{(u.v)'=u'.v+u.v'}$

$\boxed{(u^n)'=n.u'.u^{n-1}}$

$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left(x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}\right)'\\
&=1-\left((x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}\right)'\\
&=1-\left(\left((x-1)^2\right)'.e^{-\frac{1}{2}x}+\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)'(x-1)^2\right)\\
&=1-\left(2(x-1)'.(x-1)e^{-\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}x\right)'e^{-\frac{1}{2}x}(x-1)^2\right)\\
&=1-\left(2(x-1)e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(x-1)^2\right)\\
&=1-\frac{1}{2}\left(4(x-1)-(x-1)^2\right)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&=e^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(4x-4-x^2+2x-1\right)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&=\frac{1}{2}.2e^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(-x^2+6x-5\right)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&=\frac{1}{2}\left(2e^{\frac{1}{2}x}+x^2-6x+5\right)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&=\frac{1}{2}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)e^{-\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

Attention au signe (–) avant les parenthèses

$e^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}x}=1$

Il nous demande de factoriser par $\frac{1}{2}$ et $e^{-\frac{1}{2}x}$

$= \frac{1}{2} g(x) e^{\frac{1}{2}x}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1}{2} g(x) e^{-\frac{1}{2}x}$

6- Dressons le tableau de variations de f

Étudions d'abord le signe de $f'(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Puisque : $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

Et d'après le résultat de la partie I

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4- Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

On a f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Et : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[)$

$=]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$

Puisque : $0 \in]-\infty;+\infty[$

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors :

$(\forall y \in f([a;b]))(\exists! x \in [a;b])$; $f(x) = y$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Montrons que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Rappel

Si : $\begin{cases} \text{f est continue sur l'intervalle fermé } [a;b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{cases}$ → l'un est positif / l'autre est négatif.

Alors :

- ☆ l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α de l'intervalle ouvert $]a;b[$
- ☆☆ Il existe au moins un réel $\alpha\in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$
- ☆☆☆ La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α avec $\alpha\in]a;b[$

☆, ☆☆ et ☆☆☆ sont équivalents

Pourquoi $\alpha\in]a;b[$ et non pas $\alpha\in[a;b]$?

On a : $\begin{cases} f(a)\neq 0 \text{ et } f(b)\neq 0 \text{ car } f(a)\cdot f(b)<0 \\ f(\alpha)=0 \end{cases}$

Donc $\alpha\neq a$ et $\alpha\neq b$

Et par suite $\alpha\in]a;b[$

Si de plus f est strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$

Alors α est unique.

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (car elle sur $\mathbb{R}$)

Il suffit donc de vérifier que : $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ (L'application de TVI)

On a : $f(x)=x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}$

Donc : $\begin{cases} f(0)=0-(0-1)^2e^{-\frac{1}{2}0}=-1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 0{,}3 \end{cases}$

Donc : $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on aura : $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

5 - a - Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, f''(x)=\frac{1}{4}(-x^2+10x-17)e^{-\frac{1}{2}x}$

On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}g(x)e^{-\frac{1}{2}x}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(g(x)e^{-\frac{1}{2}x}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(g'(x).e^{-\frac{1}{2}x}+\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)'.g(x)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)'.e^{-\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}x\right)'e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-6+0+2.\left(\frac{1}{2}x\right)'.e^{\frac{1}{2}x}\right).e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-6+2.\frac{1}{2}.e^{\frac{1}{2}x}\right).e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-6+e^{\frac{1}{2}x}\right).e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-6+e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(x^2-6x+5+2e^{\frac{1}{2}x}\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-6+e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}-e^{\frac{1}{2}x}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{17}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-x^2+10x-17\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{4}\left(-x^2+10x-17\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R});f''(x)=\frac{1}{4}(-x^2+10x-17)e^{-\frac{1}{2}x}$

b- Déduisons que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions

Pour cela, il faut juste étudier le signe de $f''(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $f''(x)=\frac{1}{4}(-x^2+10x-17)e^{-\frac{1}{2}x}$

Puisque : $\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}>0$

Alors le signe de $f''(x)$ est le signe de $(-x^2+10x-17)$

Son discriminant est : $\Delta=b^2-4ac$
$=10^2-4(-1)(-17)$
$=100-68$
$=32$

$$\begin{cases}a=-1\\b=10\\c=-17\end{cases}$$

Si $\Delta>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Supposons $x_1<x_2$

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Puisque : $\Delta>0$

Alors le trinôme $(-x^2+10x-17)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 (Supposons $x_1<x_2$)

Donc

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$-x^2+10x-17$	$-$	0	$+$	0	$-$

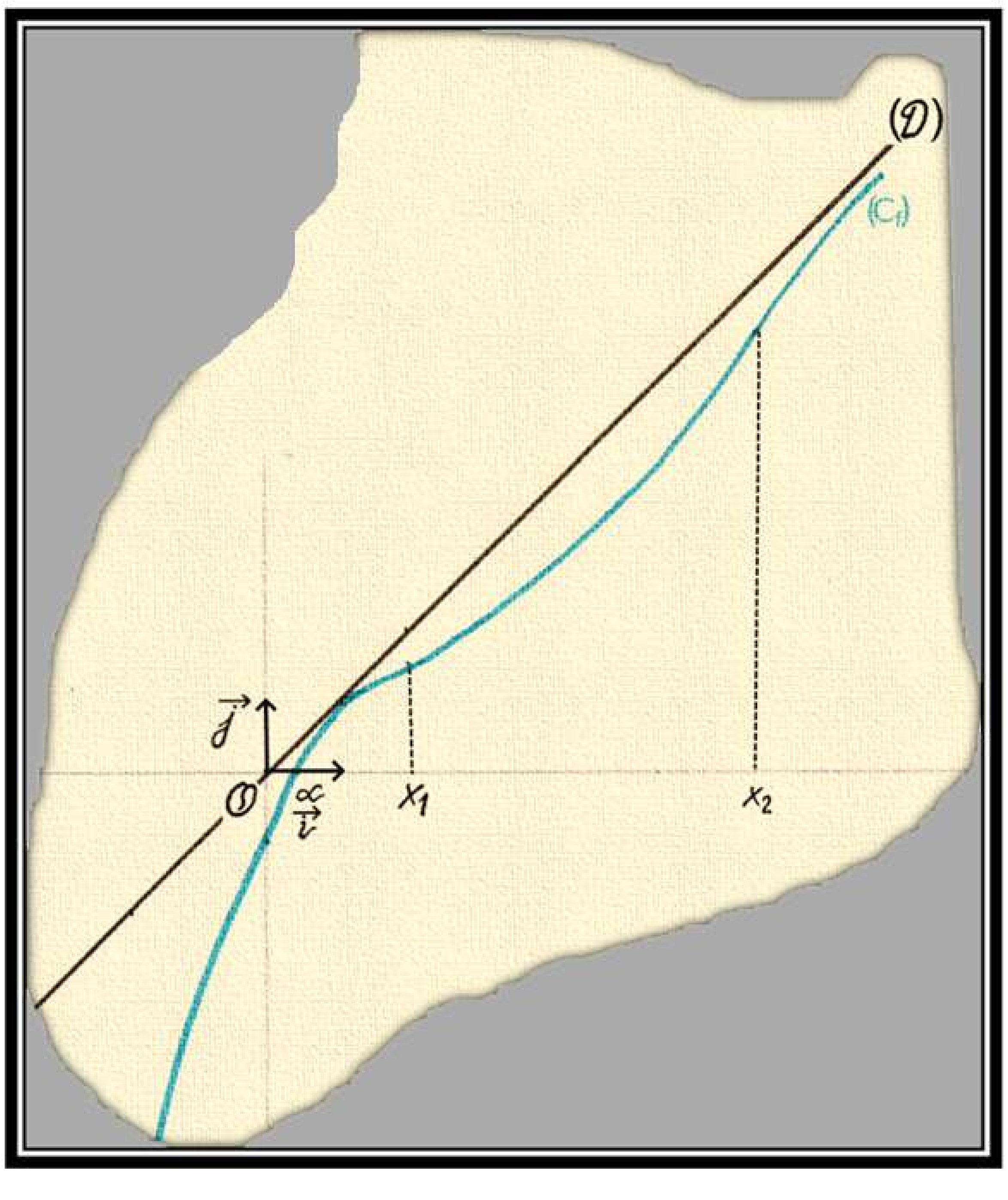
Donc f'' s'annule en x_1 et x_2 et change le signe en x_1 et x_2

D'où, la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions

$\boxed{6}$

Explications

- On a $(D): y=x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
  - (D) est le premier bissectrice ((D) passe passe par $O(0;0)$ et $E(1;1)$)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$
- L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α avec $0<\alpha<\frac{1}{2}$
  - Donc (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α compris entre 0 et $\frac{1}{2}$
- On a : $f(0)=-1$
  - Donc (C_f) coupe l'axe des ordonnées au point $(0;-1)$
- (C_f) coupe la droite (D) au point $E(1;1)$ et (C_f) est toujours au dessous de (D)
- Les deux points d'inflexions sont $A(2,1;7)$ et $B(7,8;7)$



7 - a - Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}

Rappel

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J tel que : $\mathrm{J}=f(\mathrm{I})$
Et pour déterminer J, il faut juste appliquer : image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

On a f est continue sur $\mathbb{R}$ (Composées, produit et somme des fonctions continues)
Et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J tel que :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}&=f(\mathbb{R})\\&=f(]-\infty;+\infty[)\\&=]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)[\\&=]-\infty;+\infty[\\&=\mathbb{R}\end{aligned}$$

b - Montrons que f^{-1} est dérivable en -1

Rappel

Il faut d'abord trouver le reél $x_0\in\mathrm{I}$ vérifiant $f(x_0)=-1$
Ici, et d'après la question 4, on a $f(0)=-1$
puis utilisons la propriété suivante :

Soit $f(\alpha)=\beta$
Si f est dérivable en α avec $f'(\alpha)\neq0$
Alors f^{-1} est dérivable en β et on a

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(\beta)&=\frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}\\&=\frac{1}{f'(\alpha)}\end{aligned}$$

On a $f(0)=-1$
Donc $f^{-1}(-1)=0$

Puisque f est dérivable en 0

Et $f'(0)=\frac{1}{2}g(0)e^{-\frac{1}{2}0}=\frac{1}{2}\left(0^2-6.0+5+2e^{\frac{1}{2}0}\right)=\frac{7}{2}$

Donc : $f'(0)\neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en -1

Calculons $(f^{-1})'(-1)$

On a $(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$

c. Représentation de $(C_{f^{-1}})$

Explications

$(C_{f^{-1}})$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y=x$

La droite (Δ) change les rôles de x et y

En effet :

(C_f) passe par les points $(\alpha;0)$ et $(0;-1)$

Donc $(C_{f^{-1}})$ passe par les points $(0;\alpha)$ et $(-1;0)$

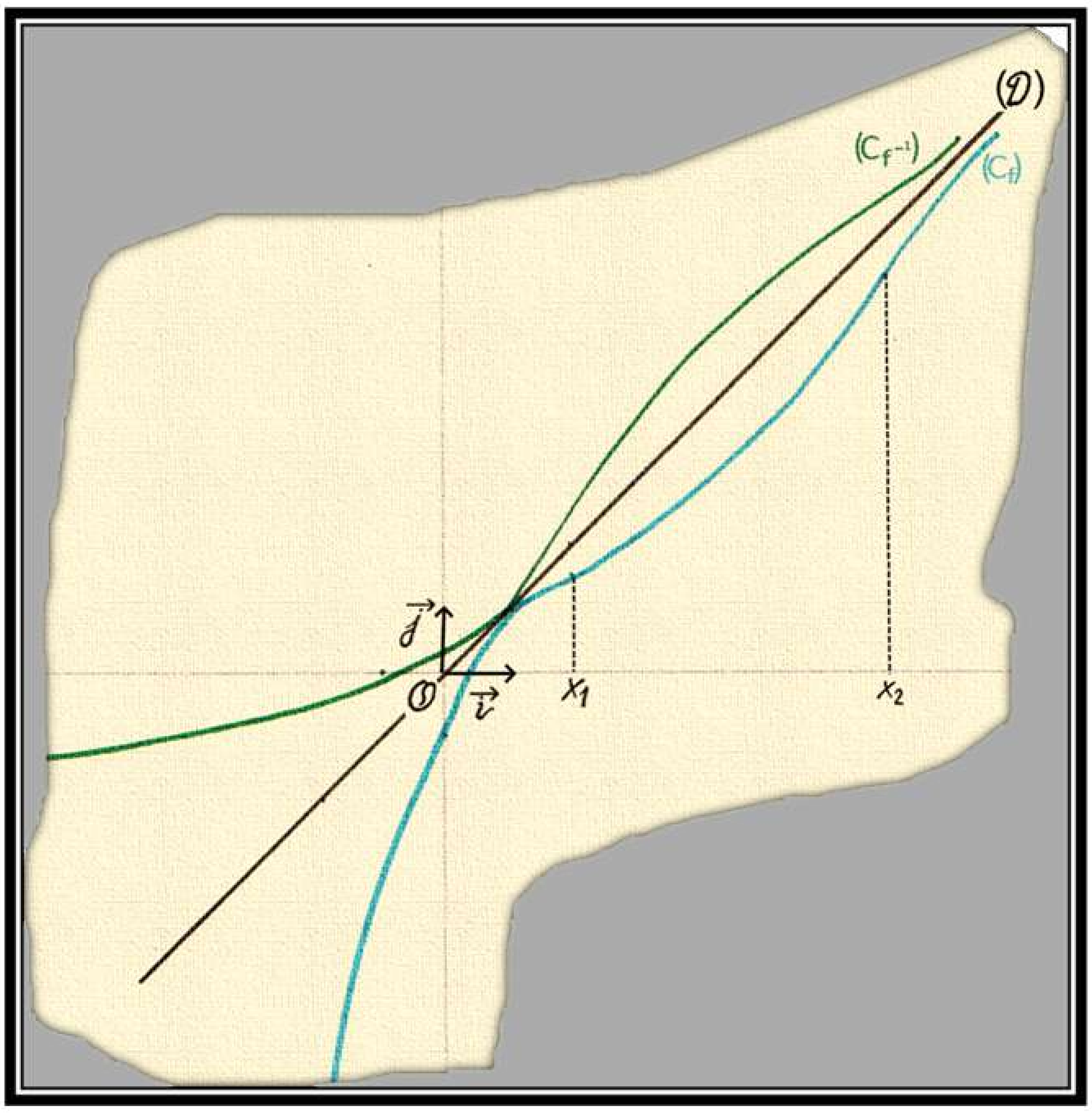
(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

$(C_{f^{-1}})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisse au voisinage de $-\infty$

L'image de la droite (D) : $y=x$ est lui même

(C_f) ; $(C_{f^{-1}})$ et (D) se coupent au point $(1;1)$

À vous les élèves, vous devez tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Question 6)



8 - a - Montrons que la fonction : $H: x \longmapsto (-2x^2-8x-16)e^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction $h: x \longmapsto x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ sur $\mathbb{R}$.

Rappel

Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, il suffit de vérifier que : $\forall x \in I \; ; \; F'(x) = f(x)$

On a H est dérivable sur $\mathbb{R}$

(Comme étant produit et composée des fonctions dérivables)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left((-2x^2-8x-16)e^{-\frac{1}{2}x}\right)' \\
&= (-2x^2-8x-16)' e^{-\frac{1}{2}x} + \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)' \cdot (-2x^2-8x-16) \\
&= (-4x-8)e^{-\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x\right)' \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-2x^2-8x-16) \\
&= (-4x-8)e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-2x^2-8x-16) \\
&= (-4x-8)e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2+4x+8)e^{-\frac{1}{2}x} \\
&= (-4x-8+x^2+4x+8)e^{-\frac{1}{2}x} \\
&= x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(ax)' = a$

$a' = 0$

$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$

D'où H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

Calculons l'intégrale : $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$.

On a : $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \int_{-2}^{0} h(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{0} H'(x)\,dx \\
&= [H(x)]_{-2}^{0} \\
&= H(0) - H(-2) \\
&= (-2.0^2 - 8.0 - 16)e^{-\frac{1}{2}.0} - (-2.(-2)^2 - 8.(-2) - 16)e^{-\frac{1}{2}.(-2)} \\
&= -16e^0 - (-8 + 16 - 16)e^1 \\
&= -16 + 8e \\
&= 8e - 16
\end{aligned}$$

D'où : $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = 8e - 16$

c. En utilisant l'intégration par partie, calculon l'intégrale :

$$I = \int_{-2}^{0} 2x e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

Rappel

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \\ v(x) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} = -2e^{-\frac{1}{2}x} \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

Il faut bien choisir les deux fonctions $u'(x)$ et $v(x)$

$e^{\blacksquare} \dashrightarrow u'(x)$

$\ln(\blacksquare) \dashrightarrow v(x)$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]$$

$$\begin{aligned}
I &= \left[2x\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} 2\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx \\
&= -4\left[xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{0} + 4\int_{-2}^{0} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \\
&= -4\left[xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{0} + 4\int_{-2}^{0} \left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)'dx \\
&= -4\left[xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{0} - 8\left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{0} \\
&= \left[(-4x - 8)e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{0} \\
&= (-4.0 - 8)e^{-\frac{1}{2}.0} - (-4.(-2) - 8)e^{-\frac{1}{2}.(-2)} \\
&= -8e^0 - 0 \\
&= -8
\end{aligned}$$

D'où : $I = -8$

d. Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$

Rappel

L'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y=ax+b$, et les deux droites d'équations $x=c$ et $x=d$ est :

$$\mathcal{A}=\int_c^d |f(x)-y|\,dx \ (u.a) \text{ et } c<d$$

avec $(u.a)$ désigne l'unité des aires $(u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|)$

- Pour enlever la valeur absolue, il faut savoir le signe de $f(x)-y$ (la position relative de (C_f) et la droite (D).)
- Il faut avoir deux droites verticales d'équations $x=c$ et $x=d$
- L'équation de l'axe des ordonnées est $x=0$

Il faut toujours prendre par considération les résultats des intégrales précédents

Donc, il faut développer

On a : $\mathcal{A}=\int_{-2}^0 |f(x)-y|\,dx \ (u.a)$

$$=\int_{-2}^0 \left|x-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}-x\right|dx \ (u.a)$$

$$=\int_{-2}^0 \left|-(x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}\right|dx \ (u.a)$$

$$=\int_{-2}^0 (x-1)^2e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \ (u.a)$$

$$=\int_{-2}^0 (x^2-2x+1)e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \ (u.a)$$

$$=\int_{-2}^0 \left(x^2e^{-\frac{1}{2}x}-2xe^{-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right) \ (u.a)$$

$$=\int_{-2}^0 x^2e^{-\frac{1}{2}x}\,dx-\int_{-2}^0 2xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx+\int_{-2}^0 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \ (u.a)$$

$$=8e-16-\mathrm{I}+\int_{-2}^0 \left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)'dx \ (u.a)$$

$(u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|)$

$$=8e-16+8-2\left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^0 \ (u.a)$$

$u.a=\|\vec{i}\|^2=1\,cm^2$

$$=8e-8-2\left(e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}-e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}\right) \ (u.a)$$

$$=8e-8-2(1-e) \ (u.a)$$

$$=(10e-10)\,cm^2$$

D'où : $\mathcal{A}=(10e-10)\,cm^2$

III- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,;\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1- Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\,;\ 1\leqslant u_n\leqslant 2$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0=2$

Donc $1\leqslant u_0\leqslant 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $1\leqslant u_n\leqslant 2$

Montrons que : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$

On a : $1\leqslant u_n\leqslant 2$ (D'après la supposition)

Et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$

Alors : $f(1)\leqslant f(u_n)\leqslant f(2)$

$f(1)=1$

$f(2)=2-(2-1)^2e^{-\frac{2}{2}}=2-e^{-1}$

Donc : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2-e^{-1}$

$2-e^{-1}<2$

Donc : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$

D'où, d'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\,;1\leqslant u_n\leqslant 2$

2 - Montrons que (u_n) est une suite décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$

Et d'après le résultat de la question 2 - d de la deuxième partie, on a : $\forall x\in[1;2]\,;f(x)-x\leqslant 0$

Et puisque : $u_n\in[1;2]$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

Alors : $f(u_n)-u_n\leqslant 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$

Et par suite (u_n) est une suite décroissante.

3 - Déduisons que (u_n) est convergente.

Rappel

- Toute suite (u_n) décroissante et minorée $(u_n\geqslant m)$ est convergente.
- Toute suite (u_n) croissante et majorée $(u_n\leqslant M)$ est convergente

- Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 1
  Alors (u_n) est une suite convergente.

Calculons $\lim_{n} u_n$

Rappel

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

- $u_{n+1} = f(u_n)\,;\ n \in \mathbb{N}$ avec $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\ u_n \in I$
- Si : $\begin{cases} u_0 \in I \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } I \\ f(I) \subset I \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Posons : $I = [1;2]$

Vérifions d'abord que : $f(I) \subset I$

On a f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$

Donc : $f([1;2]) = [f(1); f(2)] = [1; 2 - e^{-1}]$

Donc : $f(I) \subset I$

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et : $\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n \in I$

Puisque : $\begin{cases} u_0 \in I \\ f \text{ est continue sur l'intervalle } I \\ f(I) \subset I \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$

Alors la limite de la suite (u_n) est la solution de l'équation $\boxed{f(x) = x}$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - (x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x} = x \\ &\iff -(x-1)^2 e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \quad \text{car } (\forall x \in \mathbb{R})\,;\ e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{n} u_n = 1$