2 BAC PC

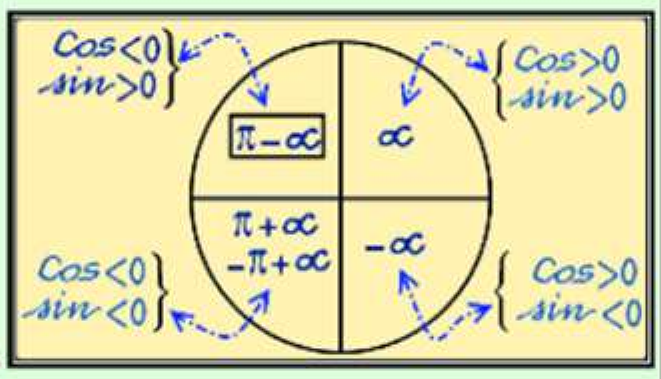
EL HAJJAJI MATHS

BAC BLANC N :2

SUJET CORRIGÉ

2 BACCALAUREAT

" SCIENCES EXPÉRIMENTALES "



بقلم :
الأستاذ : البشير الحجاجي

نسألكم الدعاء

دُعَاءُ

أَبِي وَ أُمِّي

أَسْأَلُ ٱللَّهَ ٱلرَّحْمَٰنَ ٱلرَّحِيمَ ٱلَّذِي لَا تُخَالِطُهُ ٱلظُّنُونُ وَلَا تُعْجِزُهُ ٱلْأُمُورُ أَنْ يَرْحَمَهُمْ رَحْمَةً تُوَسِّعُ عَلَيْهِمْ قُبُورَهُمْ وَ تُسَهِّلُ حِسَابَهُمْ، وَيَرْحَمُنَا إِذَا صِرْنَا إِلَى مَا صَارُوا إِلَيْهِ

دُعَاءُ

سُبْحَانَ اللهِ وَ بِحَمْدِهِ عَدَدَ خَلْقِهِ، وَرِضَا نَفْسِهِ، وَزِنَةَ عَرْشِهِ، وَ مِدَادَ كَلِمَاتِهِ

El hajjaji El bachir:

gmail: hajjajibachir123@gmail.com

OO2126.73.36.82.92

اللَّهُمَّ أَطْعِمْ أُمِّي وَ أَبِي مِنَ الجَنَّةِ، وَأَرِهِمْ مَكَانَهُمْ مِنَ الجَنَّةِ، وَقُلْ لَهُمْ ادْخُلُوا مِنْ أَيِّ بَابٍ تَشَاؤُونَ

Lycée qualifiant:
ALMASSIRA ALKHADRA
TIZNIT
PROF:
ELHAJJAJI ELBACHIR

بسم الله الرحمن الرحيم

Bac blanc N°: 2

2 BAC
SC. EXP
DUREE:
3 HEURES

EXERCICE 1

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les trois points $A(1;0;1)$; $B(m;1;2)$ et $C(2;1;1)$ avec m est un nombre reél.

0,25 I- Déterminer la valeur de m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

II- On suppose dans la suite que $m=0$.

0,25 1- a- Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

0,50 b- En déduire que les points A, B et C forment un plan et que : $x-y+2z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2- Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z+15=0$$

0,25 a- Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(2;1;4)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$

0,50 b- Calculer la distance du point Ω au plan (ABC) et en déduire que (ABC) est tangent à la sphère (S).

c- Soit le point $H(1;2;2)$

0,25 Calculer la distance ΩH, puis en déduire le point de contact de (ABC) et (S).

	③ Soit le point $E(a+3\,;\,b\,;\,a)$ où a et b deux nombres reéls
0,25	a- Déterminer b en fonction de a pour que $E \in (ABC)$
	b- On suppose que : $b=3a$
0,25	i- Vérifier que : $E \neq H$
0,50	ii- En déduire que : $(\forall a \in \mathbb{R})\,;\, 11a^2-12a+12>0$

EXERCICE 2

	I- On considère le nombre complexe a tel que : $a=2+\sqrt{3}+i$
0,25	① Montrer que le module du nombre complexe a est : $\lvert a\rvert=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
0,25	② Vérifier que : $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
0,50	③ a- En linéarisant $\cos^2\theta$, avec $\theta\in\mathbb{R}$, montrer que : $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$
0,25	b- Montrer que : $a=4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ (On rappel que : $\sin 2\theta=2\sin\theta.\cos\theta$)
0,50	c- Montrer que : $4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a, puis montrer que a^6 est un nombre imaginaire pur.
0,50	d- Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$
	II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les deux point A et Ω d'affixes respectives a et ω tels que : $a=2+\sqrt{3}+i$ et $\omega=2$. Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$
0,50	① Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $b=1+i\sqrt{3}$
0,25	② Quelle la nature du triangle ΩAB.

EXERCICE 3

Une urne contient 10 indiscernables au toucher, cinq rouges, trois jaunes et deux vertes.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1 - Soit les événements suivants :

A : " Les trois boules sont de la même couleur "

B : " Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. "

C : " Parmi les trois boules tirées, il y a au moins une boule verte. "

1,00 a - Calculer $p(A)$ et $p(B)$

0,50 b - Montrer que : $p(C)=\frac{8}{15}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

0,25 a - Donner les valeurs de X.

0,75 b - Montrer que : $p(X=2)=\frac{79}{120}$, puis déterminer la loi de probabilité de X.

0,50 c - Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=4$ et $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}$; pour tout $n\in\mathbb{N}$.

0,50 1 - Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n>3$

0,25 2 - a - Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}$

0,50 b - En déduire que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0,50 3 - a - Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-3\leqslant\frac{1}{5}(u_n-3)$

0,50 b - En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4 - On pose : $v_n=\ln(u_n-3)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

0,50 a - Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n\leqslant-n\ln 5$

0,25 b - Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

PROBLEME

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

0,50 **1**- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 **2**- a- Vérifier que : $g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

0,25 b- Dresser le tableau de variations de g

0,50 **3**- a- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

0,25 b- Vérifier que : $0<\alpha<1$

0,25 **4**- En déduire le signe de $g(x)$

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2cm)

0,50 **1**- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 **2**- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,50 **3**- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1))$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0,25 b- Étudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x-1$.

0,50 **4**- a- Montrer que $f(\alpha)=\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)$

0,25 b- Donner un encadrement de $f(\alpha)$

0,50 **5**- a- Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

0,25 b- Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

0,25 ⑥- Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

0,75 ⑦- Représenter (Δ) et (C_f) $(\alpha \simeq 0,35$ et $f(\alpha) \simeq 0,85)$

0,50 ⑧- a- Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H : x \longmapsto -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto xe^{-x}$, puis calculer : $\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx$.

0,50 b- À l'aide de l'intégration par parties, calculer : $I = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x}\,dx$.

0,50 c- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

الحديث الرابع

مراحل الخلق

عَنْ عَبْدِ اللهِ بْنِ مَسْعُودٍ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ : حَدَّثَنَا رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ وَهُوَ الصَّادِقُ الْمَصْدُوقُ :

" إِنَّ أَحَدَكُمْ يُجْمَعُ خَلْقُهُ فِي بَطْنِ أُمِّهِ أَرْبَعِينَ يَوْماً نُطْفَةً ، ثُمَّ يَكُونُ عَلَقَةً مِثْلَ ذَلِكَ ، ثُمَّ يَكُونُ مُضْغَةً مِثْلَ ذَلِكَ ، ثُمَّ يُرْسَلُ إِلَيْهِ الْمَلَكُ فَيَنْفُخُ فِيهِ الرُّوحَ ، وَيُؤْمَرُ بِأَرْبَعِ كَلِمَاتٍ : بِكَتْبِ رِزْقِهِ وَأَجَلِهِ وَعَمَلِهِ وَشَقِيٌّ أَوْ سَعِيدٌ . فَوَاللهِ الذِي لَا إِلَهَ غَيْرُهُ إِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ حَتَّى مَا يَكُونُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلَّا ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ فَيَدْخُلُهَا ، وَإِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ حَتَّى مَا يَكُونُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلَّا ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ فَيَدْخُلُهَا .

مُتَّفَقٌ عَلَيْهِ

بقلم : البشير الحجاجي

CORRECTION

$A(1;0;1)$; $B(m;1;2)$ et $C(2;1;1)$

I- Déterminons la valeur de m pour que le triangle ABC soit rectangle en A

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $(\vec{u} \parallel \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$

avec le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé

Alors :

- $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$

Pour que le triangle ABC soit rectangle en A, il suffit que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

On a $A(1;0;1)$; $B(m;1;2)$ et $C(2;1;1)$

Donc $\overrightarrow{AB}(m-1;1-0;2-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2-1;1-0;1-1)$

Donc $\overrightarrow{AB}(m-1;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

On a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow 1(m-1) + 1.1 + 0.1 = 0$

$\Leftrightarrow m - 1 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$

Donc, pour que le triangle ABC soit rectangle en A il faut et il suffit que $m=0$.

II- Si $m=0$

Alors, on aura : $A(1;0;1)$; $B(0;1;2)$ et $C(2;1;1)$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1 - a - Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Rappel

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (bc' - b'c)\vec{i} - (ac' - a'c)\vec{j} + (ab' - a'b)\vec{k}$$

Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$

Alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (1.0 - 1.1)\vec{i} - (-1.0 - 1.1)\vec{j} + (-1.1 - 1.1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

D'où : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

b - Déduisons que les points A, B et C forment un plan

(Pour cela, il suffit que les points A, B et C ne sont pas alignés)

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1 ; 1 ; -2)$

Donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés

D'où, les points A, B et C forment un plan.

Montrons que : $x - y + 2z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1 ; 1 ; -2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Donc : $(ABC): -1x+1y-2z+d=0$

Donc : $(ABC): -x+y-2z+d=0$

Et on a : $A(1;0;1)\in(ABC) \Leftrightarrow -x_A+y_A-2z_A+d=0$

$\Leftrightarrow -1+0-2(1)+d=0$

$\Leftrightarrow -3+d=0$

$\Leftrightarrow d=3$

Donc : $(ABC): -x+y-2z+3=0$

Donc : $(ABC): -(x-y+2z-3)=0$

D'où : $(ABC): x-y+2z-3=0$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

2 - a - Montrons que (S) est une sphère de centre $\Omega(2;1;4)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$

Méthode

$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$x^2+ax+y^2+by+z^2+cz+d=0$

$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+by+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+z^2+cz+\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$

$=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$ avec $a^2+b^2+c^2-4d>0$

Donc (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$

et de rayon $R=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

$(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z+15=0$

$(S): x^2-4x+y^2-2y+z^2-8z+15=0$

$(S): x^2-4x+2^2-2^2+y^2-2y+1^2-1^2+z^2-8z+4^2-4^2+15=0$

$(S): (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+15=0$

$(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-6=0$

$(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6$

D'où (S) est une sphère de centre $\Omega(2;1;4)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$

6- Calculons $d(\Omega;(ABC))$

Rappel

Si $(P): ax+by+cz+d=0$

Alors : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\boxed{\Omega(2;1;4)}$

$$d(\Omega;(ABC))=\frac{|x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|2-1+2.4-3|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

Déduisons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

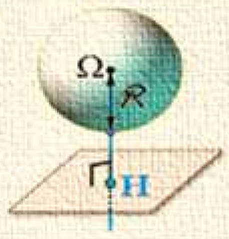
Remarques

Ici, il s'agit de la position relative d'un plan et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et une sphère (S) de centre Ω et de rayon R, il faut juste calculer la distance d entre le plan (P) et le centre Ω, $d=d(\Omega;(P))$, puis comparer d et R

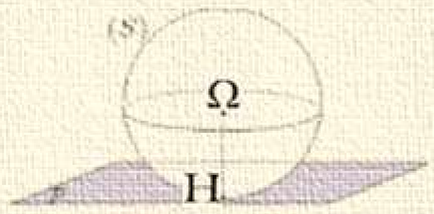
Si $d>R$

Alors (P) ne coupe pas (S)



Si $d=R$

Alors (P) est tangent à (S)

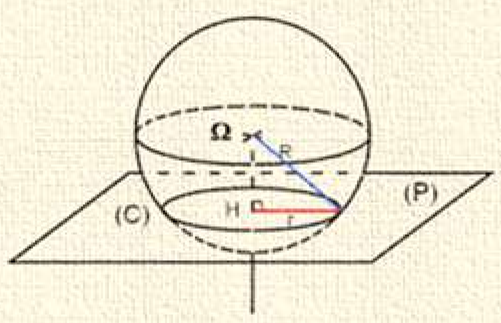


Et si H est le point de contact, alors H est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P)

Donc H est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

Si $d<R$

Alors (P) perce (يخترق) (S) selon un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ et de centre H indiquant dans le cas $d=R$



On a : $d(\Omega;(ABC))=\sqrt{6}$ et $R=\sqrt{6}$

Donc : $d(\Omega;(ABC))=R$

D'où, le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

c- Soit $H(1;2;2)$

Calculons la distance

On a $H(1;2;2)$ et $\Omega(2;1;4)$

Donc $\overrightarrow{\Omega H}(-1;1;-2)$

Donc $\Omega H=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

Déduisons le point de contact de (ABC) et (S)

On a : $\Omega H=\sqrt{6}$

Donc : $\Omega H=R$

Donc : $H\in(S)$

Il suffit de vérifier que $H\in(ABC)$

On a : $(ABC): x-y+2z-3=0$

On a : $x_H-y_H+2z_H-3=1-2+2(2)-3=0$

Donc $H\in(ABC)$

Donc $H\in(ABC)\cap(S)$

D'où H est le point de contact de (ABC) et (S)

بسم الله الرحمن الرحيم
وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

$\boxed{3}$ - a - Déterminons b pour que $E\in(ABC)$

$\boxed{E(a+3;b;a)}$

$$\begin{aligned} E\in(ABC) &\Leftrightarrow x_E-y_E+2z_E-3=0\\ &\Leftrightarrow (a+3)-b+2a-3=0\\ &\Leftrightarrow 3a-b=0\\ &\Leftrightarrow b=3a. \end{aligned}$$

D'où $b=3a$

b- Supposons que $b=3a$ $(E\in(ABC))$

i- Vérifions que $E\neq H$

Supposons que $E=H$ avec $E(a+3;3a;a)$ et $H(1;2;2)$

Donc, on aura : $\begin{cases} a+3=1\\ 3a=2\\ a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\\ a=\frac{2}{3}\\ a=2\end{cases}$

Donc $-2=\frac{2}{3}=2$

Ce qui est absurde

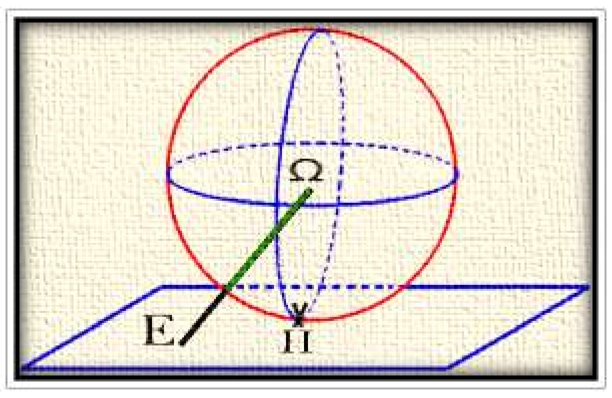
Donc, notre supposition est fausse

D'où $E\neq H$

ii- Déduisons que : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\,11a^2-12a+12>0$

Soit $a\in\mathbb{R}$

On a $E(a+3\,;3a\,;a)\in(ABC)$ et $E\neq H$



Donc : $\Omega E>R \iff \sqrt{(a+3-2)^2+(3a-1)^2+(a-4)^2}>\sqrt{6}$

$$\iff (a+1)^2+(3a-1)^2+(a-4)^2>6$$
$$\iff a^2+2a+1+9a^2-6a+1+a^2-8a+16>6$$
$$\iff 11a^2-12a+18-6>0$$
$$\iff 11a^2-12a+12>0$$

D'où : $11a^2-12a+12>0$, pour tout $a\in\mathbb{R}$

EXERCICE 2

I- 1- Montrons que le module du nombre a est : $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Rappel

Soit $z=a+ib$ avec $(a\,;b)\in\mathbb{R}^2$

$a=Re(z)$ et $b=Im(z)$

Le conjugué de z est : $\overline{z}=a-ib$

Le module de z est : $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

On a : $a=2+\sqrt{3}+i$

$$\begin{cases} Re(a)=2+\sqrt{3} \\ Im(a)=1 \end{cases}$$

Donc : $|a|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}$

$$=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{4(2+\sqrt{3})}$$
$$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

D'où le module de a est : $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2- Vérifions que : $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

On a : $a=2+\sqrt{3}+i$

$$=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{2}i$$
$$=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où : $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

3- a- En linéarisant $\cos^2\theta$ avec $\theta\in\mathbb{R}$, montrons que : $1+\cos2\theta=2\cos^2\theta$

Rappel

Pour linéariser $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$; il faut juste utiliser les deux formules d'**Euler** suivantes :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \text{et} \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

D'après la formule d'Euler, on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Donc : $(\cos\theta)^2 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$\cos^2\theta = \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2+2e^{i\theta}.e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2}{4}$$

$$\boxed{e^{i\theta}.e^{-i\theta} = e^{i\theta}.\frac{1}{e^{i\theta}} = 1}$$

$$\cos^2\theta = \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}$$

$$\boxed{e^{i\blacksquare}+e^{-i\blacksquare} = 2\cos\blacksquare}$$

$$\cos^2\theta = \frac{2\cos(2\theta)+2}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{2(\cos(2\theta)+1)}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

$$2\cos^2\theta = \cos(2\theta)+1$$

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

Donc : $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

6- Montrons que : $a = 4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

D'après le résultat de la question 2, on a :

$$a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(1+\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2.\frac{\pi}{12}\right)\right) \quad (\star)$$

Et d'après le résultat de la question précédente,

on a : $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

Donc : $1+\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12}$ $\quad \left(\text{Pour } \theta = \frac{\pi}{12}\right)$

Et on a aussi : $\sin\left(2.\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}$ (car : $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$ D'après le rappel)

On remplace dans ★ ; on aura :

$$a = 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$

$1+\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{12}$

$\sin\left(2.\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}$

D'où : $a = 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

c. Montrons que : $4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a

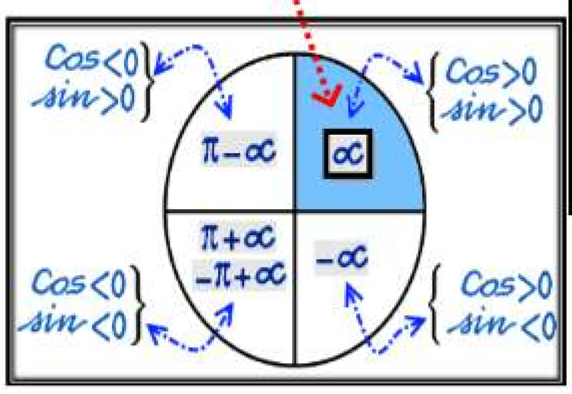
D'après le résultat de la question précédente on a :

$$a = 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Rappel

Pour que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ soit une forme trigonométrique, il faut que $r>0$

Et puisque : $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$



Alors : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$

Donc : $4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$

D'où : $a = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe a

Montrons que a^6 est un nombre imaginaire pur.

Remarque

Toujours, pour calculer z^n, il faut penser à la formule de **MOIVRE**

Pour cela, il faut d'abord écrire z sous forme trigonométrique ou bien sous forme exponentielle, puis utiliser la formule de Moivre suivante :

$$[r;\theta]^n = [r^n; n\theta]$$
$$(re^{i\theta})^n = r^n.e^{in\theta}$$

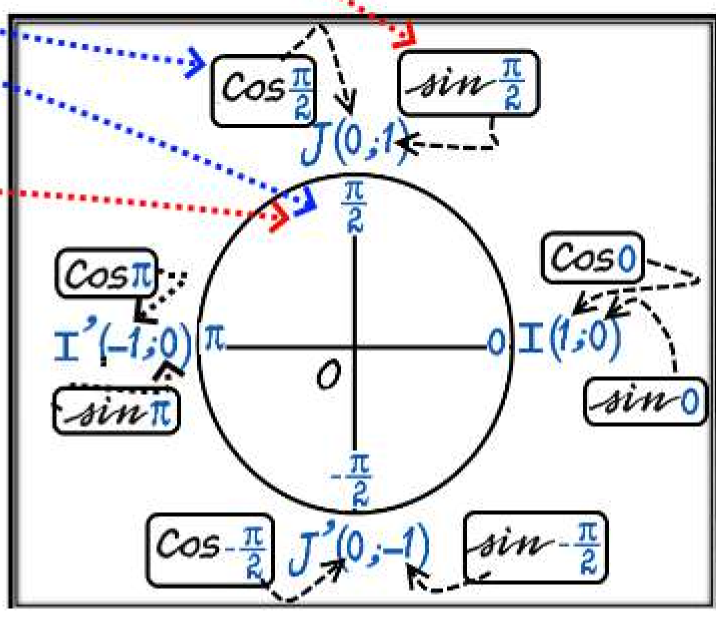
On a : $|a| = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et aussi : $|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Le module est toujours unique unique unique unique unique

On a : $a = \left[4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right);\frac{\pi}{12}\right] = \left[2\sqrt{2+\sqrt{3}};\frac{\pi}{12}\right]$

Donc : $a^6 = \left[2\sqrt{2+\sqrt{3}};\frac{\pi}{12}\right]^6$

$$=\left[2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,;\frac{\pi}{12}\right]^6$$
$$=\left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6;6.\frac{\pi}{12}\right]$$
$$=\left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6;\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6(0+i)$$
$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$$



$\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$

D'où a^6 est un nombre imaginaire pur

d- La valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$

On a : $|a|=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et aussi : $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Le module est toujours
unique unique unique
unique unique

Et puisque le module est unique

Alors on aura : $4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

II- R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1- Soit B image de A par la rotation R

Montrons que $b=1+i\sqrt{3}$

Rappel

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle Θ

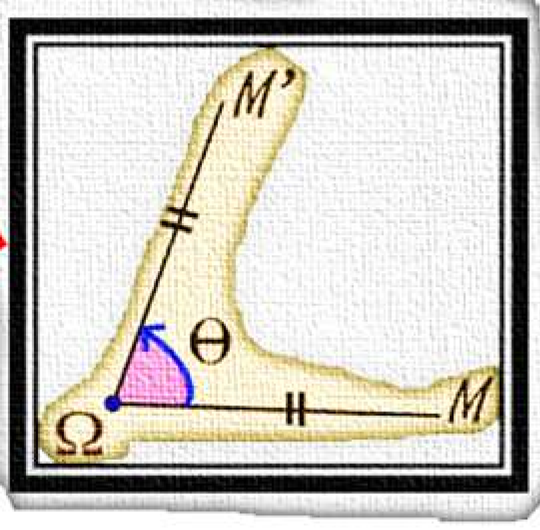
Soit M' d'affixe z' image de M d'affixe z par la rotation R

Donc $R(M)=M' \Leftrightarrow z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)e^{i\theta}$

(Résultat analytique)

$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\Theta[2\pi]\end{cases}$

(Résultat géométrique)



On a $R(A)=B \Leftrightarrow b-\omega=(a-\omega)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow b-\omega=(a-\omega)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow b-\omega=(a-\omega)(i)$

$\Leftrightarrow b-2=\left(2+\sqrt{3}+i-2\right)(i)$

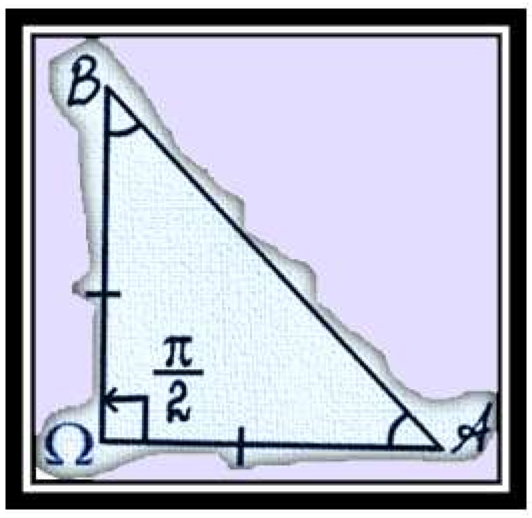
$$\iff b-2=(\sqrt{3}+i)(i) \qquad \boxed{i^2=-1}$$
$$\iff b-2=\sqrt{3}\,i+i^2$$
$$\iff b-2=\sqrt{3}\,i-1$$
$$\iff b=2-1+\sqrt{3}\,i$$
$$\iff b=1+i\sqrt{3}$$

D'où : $b=1+i\sqrt{3}$

2 - La nature du triangle ΩAB.

(Il suffit d'utiliser le résultat géométrique de la rotation)

Or a : $R(A)=B \iff \begin{cases} \Omega B=\Omega A \\ (\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B})\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$



D'où le triangle ΩAB est rectangle isocèle en Ω

EXERCICE 3

Remarque

Le type de tirage :
- Simultanément
- L'absence de l'ordre

C_n^p

1 - a - La probabilité de l'événement A.

Calculons d'abord card(Ω)

$$\text{Card}(\Omega)=C_{10}^3=\frac{A_{10}^3}{3!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$$

$A=\{$ ou $\}$

On ne peut pas tirer trois boules vertes, car dans l'urne il y a juste deux boules vertes

$$\text{Card}(A)=C_5^3+C_3^3=10+1=11$$

D'où : $p(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{11}{120}$

La probabilité de l'événement B.

$B=\{\ \}$

$$\text{Card}(B)=C_2^1\times C_3^1\times C_5^1=2\times 3\times 5=30 \qquad \boxed{C_n^1=n}$$

Donc : $p(B)=\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$

b - Montrons que : $p(C)=\frac{8}{15}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Rappel

"*Tirer au moins*" ou bien "*Tirer au plus*"
Ça sera mieux de penser à "*l'événement contraire*"

On a : C : "Tirer au moins une boule verte"

$C = \{\ \text{ou}\ \}$ = les et

Son événement contraire est $\overline{C} = \{\ \}$

$\overline{C}$: " parmi les trois boules tirées, il n'y a aucune boule verte".

Autrement, on doit choisir trois boules parmi les boules non vertes.

$\{\ \}$ 8 non vertes.

$$Card(\overline{C}) = C_8^3 = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$$

Donc : $p(\overline{C}) = \frac{56}{120} = \frac{8\times7}{8\times15} = \frac{7}{15}$

$p(C) = 1 - p(\overline{C})$

Et puisque : $p(C) = 1 - p(\overline{C})$

Alors : $p(C) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

2 - **Remarques**

- Il faut toujours bien comprendre la variable aléatoire.
- Dans notre cas X = nombre de couleurs obtenues après avoir tirer les trois boules.

$\{\ \text{ou}\ \}$ une seule couleur $(X=1)$

$\{\ \text{ou}\ \text{ou}\ \}$ Deux couleurs différentes $(X=2)$

$\{\ \}$ Trois couleurs différentes $(X=3)$

a - Les valeurs de X sont

$(X=1)$
$(X=2)$
$(X=3)$

D'où : $X(\Omega) = \{1;2;3\}$

b - Montrons que : $p(X=2) = \frac{79}{120}$

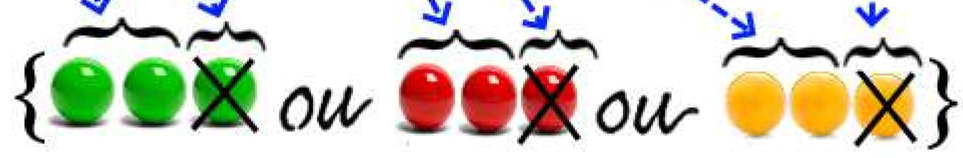
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

1ère méthode : Calcul direct

$(X=2) = \{\ \text{ou}\ \text{ou}\ \}$

$$\text{card}(X=2)=\underbrace{C_2^2}\times\underbrace{C_8^1}+\underbrace{C_5^2}\times\underbrace{C_5^1}+\underbrace{C_3^2}\times\underbrace{C_7^1}=1\times 8+10\times 5+3\times 7=8+50+21=79$$



Donc : $p(X=2)=\dfrac{79}{120}$

$2^{ème}$ méthode : $\sum p_i=1$

Calculons $p(X=1)$ et $p(X=3)$

$(X=1)$: Les trois boules tirées sont de la même couleur (C'est juste l'événement A)

Donc : $p(X=1)=p(A)=\dfrac{11}{120}$

$(X=3)$: Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différente. (C'est exactement l'événement B)

Donc : $p(X=3)=p(B)=\dfrac{30}{120}$

$\boxed{\sum p_i=1}$

On sait que : $p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$

Donc : $p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)$

$=1-\dfrac{11}{120}-\dfrac{30}{120}$

$=\dfrac{79}{120}$

D'où : $p(X=2)=\dfrac{79}{120}$

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

Loi de probabilité de X.

On a $p(X=1)=\dfrac{11}{120}$; $p(X=2)=\dfrac{79}{120}$ et $p(X=3)=\dfrac{30}{120}$

D'où :

x_i	1	2	3	$\sum p_i$
$p(X=x_i)$	$\dfrac{11}{120}$	$\dfrac{79}{120}$	$\dfrac{30}{120}$	1

c- Calculons l'espérence mathématique de X.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X=x_i)$$

$$=1.\frac{11}{120}+2.\frac{79}{120}+3.\frac{30}{120}$$

$$=\frac{11+158+90}{120}$$

$$=\frac{259}{120}$$

EXERCICE 4

1 - Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n>3$

Initialisation

Pour $n=0$

On a $u_0=4$

Donc $u_0>3$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $u_n>3$

Montrons que : $u_{n+1}>3$

On a : $u_{n+1}-3=\dfrac{4u_n+3}{u_n+2}-3$

$$=\frac{4u_n+3-3(u_n+2)}{u_n+2}$$

$$=\frac{4u_n+3-3u_n-6}{u_n+2}$$

$$=\frac{u_n-3}{u_n+2}$$

Ici, il faut étudier le signe de $u_{n+1}-3$

Pour utiliser l'encadrement, il faut arriver à écrire u_{n+1} comme : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{u_n+2}$

$$=\frac{4(u_n+2)-5}{u_n+2}$$

$$=4-\frac{5}{u_n+2}$$

Puisque : $u_n>3$ (D'après la supposition)

Alors : $\begin{cases} u_n-3>0 \\ u_n+2>0 \end{cases}$

Donc : $u_{n+1}-3>0$

Donc : $u_{n+1}>3$

D'où, d'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n>3$

2 - a - Vérifions que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n-\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}=\frac{4u_n+3}{u_n+2}-u_n-\frac{3u_n-u_n^2+3-u_n}{u_n+2}$$

$$=\frac{4u_n+3-u_n(u_n+2)}{u_n+2}-\frac{2u_n-u_n^2+3}{u_n+2}$$

$$=\frac{4u_n+3-u_n^2-2u_n-2u_n+u_n^2-3}{u_n+2}$$

$$=0$$

Donc : $u_{n+1}-u_n-\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}=0$

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}$

b- Déduisons la monotonie de (u_n)

Étudions le signe de $u_{n+1}-u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{u_n+2}$

Puisque : $u_n>3$ (D'après le résultat de la question 1)

Alors : $\begin{cases} u_n+1>0 \\ 3-u_n<0 \\ u_n+2>0 \end{cases}$

Donc $u_{n+1}-u_n<0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

D'où : (u_n) est une suite décroissante.

Déduisons que (u_n) est convergente.

Rappel

- Toute suite (u_n) décroissante et minorée $(u_n\geqslant m)$ est convergente.
- Toute suite (u_n) croissante et majorée $(u_n\leqslant M)$ est convergente

Puisque (u_n) est décroissante et minorée par 3 .

Alors (u_n) est convergente.

$\boxed{3}$ - a - Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}-3\leqslant\frac{1}{5}(u_n-3)$

Rappel

Pour cette question, il suffit d'étudier le signe de :

$u_{n+1}-3-\frac{1}{5}(u_n-3)$

Mais
- Il faut pas développer $\frac{1}{5}(u_n-3)$
- Il faut simplifier puis factoriser $u_{n+1}-3$ par u_n-3

Après avoir factoriser $u_{n+1}-3$ par u_n-3, on le factorise avec $\frac{1}{5}(u_n-3)$ puis étudier le signe de l'expression trouvée

Des fois, il faut prendre par considération la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$

- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante

Alors : $\forall n \geq n_0$; $u_n \geq u_{n_0}$

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante

Alors : $\forall n \geq n_0$; $u_n \leq u_{n_0}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a déjà trouver que

$$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 3 - \frac{1}{5}(u_n - 3) = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} - \frac{1}{5}(u_n - 3)$$

$$= (u_n - 3)\left(\frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5}\right)$$

Puisque : $u_n > 3$

Alors : $u_n > 3 \Leftrightarrow u_n + 2 > 5$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5} < 0$$

Donc : $u_n > 3 \Rightarrow \begin{cases} u_n - 3 > 0 \\ \frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5} < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (u_n - 3)\left(\frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5}\right) < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 3 - \frac{1}{5}(u_n - 3) < 0$$

Donc : $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{5}(u_n - 3)$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{5}(u_n - 3)$

b- Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Remarques

Pour répondre à cette question, on peut utiliser l'une des deux méthodes : Télescopage ; La récurrence.

Dans cette exercice, on va essayer avec le télescopage.

Attention !!

Il faut que tous les membres soient positifs

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a : $0<u_{n+1}-3\leqslant\frac{1}{5}(u_n-3)$

Donc $0<\cancel{u_1-3}\leqslant\frac{1}{5}(u_0-3)$ (pour $n=0$)

$0<\cancel{u_2-3}\leqslant\frac{1}{5}(\cancel{u_1-3})$ (pour $n=1$)

$0<\cancel{u_3-3}\leqslant\frac{1}{5}(\cancel{u_2-3})$ (pour $n=2$)

$0<\cancel{u_4-3}\leqslant\frac{1}{5}(\cancel{u_3-3})$ (pour $n=3$)

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$0<u_n-3\leqslant\frac{1}{5}(\cancel{u_{n-1}-3})$

Par multiplication membre à membre, on aura :

$0<u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n(u_0-3)$

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}\ ; 0<u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}\ ; 0<u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0 \text{ si } -1<q<1}$

Et puisque : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}0=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0 \quad \text{car } -1<\frac{1}{5}<1\end{cases}$

Alors, d'après les critères de convergence

on aura $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3)=0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

4- On pose : $v_n=\ln(u_n-3)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

Remarquons d'abord que (v_n) est bien définie car : $\forall n\in\mathbb{N}\ ; u_n-3>0$

a- Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ; v_n\leqslant-n\ln 5$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

D'après le résultat de la question 3-b, on a : $u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Et puisque : $u_n-3>0$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^n>0$

$\boxed{\begin{cases}\ln a^n=n\ln a\\ a>0\end{cases}}$

Alors : $u_n-3\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^n \Leftrightarrow \ln(u_n-3)\leqslant\ln\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\Leftrightarrow v_n\leqslant n\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\boxed{\begin{cases}\ln\frac{1}{a}=-\ln a\\ a>0\end{cases}}$

$\Leftrightarrow v_n \leqslant -n\ln 5$

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n \leqslant -n\ln 5$

b- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

D'après le résultat de la question précédente on a :

$\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n \leqslant -n\ln 5$

Et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln 5 = -\infty$ car $\ln 5>0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

PROBLEME

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit $g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(1-(x^2-2x+2)e^{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{x^2-2x+2}{e^x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{e^x}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{+\infty}{0^+}=+\infty}$$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+\end{cases}$

Pour éviter le changement de variable, ça sera mieux d'écrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=1-\frac{x^2-2x+2}{e^x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-(x^2-2x+2)e^{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x^2-2x+2}{e^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\cdot\frac{e^x}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a}{\infty}=0}$$

Car : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}=+\infty\end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$$

2 - a - Vérifions que : $g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

On a g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $g'(x)=\left(1-(x^2-2x+2)e^{-x}\right)'$

$$\begin{aligned}
&=1'-\left((x^2-2x+2)e^{-x}\right)'\\
&=-\left((x^2-2x+2)'e^{-x}+(e^{-x})'(x^2-2x+2)\right)\\
&=-\left((2x-2)e^{-x}+(-x)'e^{-x}(x^2-2x+2)\right)\\
&=-\left((2x-2)-(x^2-2x+2)\right)e^{-x}\\
&=-(2x-2-x^2+2x-2)e^{-x}\\
&=-(-x^2+4x-4)e^{-x}\\
&=(x^2-4x+4)e^{-x}\\
&=(x-2)^2e^{-x}
\end{aligned}$$

$\boxed{a'=0}$

$\boxed{(u.v)'=u'.v+u.v'}$

$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\, g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$

b - Dressons le tableau de variations de g.

Étudions d'abord le signe de $g'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$

Puisque : $e^{-x}>0$ et $(x-2)^2\geq 0$

Alors : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, g'(x)\geq 0$ (g' s'annule en 2)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	1

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

3 - a - Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

On a g est continue sur $\mathbb{R}$ (comme étant composée, produit et somme des fonctions continues sur $\mathbb{R}$)

Et on a g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Et $g(\mathbb{R})=g(]-\infty;+\infty[)$

$$=\left]\lim_{x\to-\infty} g(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$

$$=]-\infty;1[$$

Et puisque $0\in]-\infty;1[$

Alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
> $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I);\ f(x)=y$

b- Vérifions que : $0<\alpha<1$

Pour cela, il suffit de vérifier que $g(0).g(1)<0$ (Application de TVI)

On a : $g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} g(0)=1-(0^2-2.0+2)e^{0}=1-2e^{0}=1-2=-1 \\ g(1)=1-(1^2-2.1+2)e^{-1}=1-e^{-1}=1-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-1}{e} \end{cases}$

$\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)>0 \end{cases}$

Donc : $g(0).g(1)<0$

D'où, d'après TVI, on aura : $0<\alpha<1$

> Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a)\times f(b)<0$
> Alors, il existe $\alpha\in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$

Remarque

> Pour les deux autres conditions :
> La continuité et la strictement monotonie sont banals d'après la question précédente

4- Déduisons le signe de $g(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;\alpha]$

On a g est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$

Soit $x\in]-\infty;\alpha]$

$x\in]-\infty;\alpha] \Rightarrow x\leqslant\alpha$

$\Rightarrow g(x)\leqslant g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x)\leqslant 0$ car $g(\alpha)=0$

Donc : $\forall x\in]-\infty;\alpha]\ ;\ g(x)\leqslant 0$

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g'(x)$	+		0	+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	1

$g(x)\leqslant 0$ $\qquad$ $g(x)\geqslant 0$

Sur l'intervalle $[\alpha;+\infty[$

Soit $x\in[\alpha;+\infty[$

On a g est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$

$x\in[\alpha;+\infty[\Rightarrow x\geqslant\alpha$

$\Rightarrow g(x)\geqslant g(\alpha)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad$ car $g(\alpha)=0$

Donc : $\forall x \in [\alpha ; +\infty[\; ; g(x) \geq 0$

C'est le résultat qu'il faut prendre par considération dans la deuxième partie, et surtout l'étude de signe de $f'(x)$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha] \; ; g(x) \leq 0 \\ \forall x \in [\alpha ; +\infty[\; ; g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Partie II

On a : $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Remarque

Ici, pour calculer les limites au voisinage de ∞ et pour éviter le changement de variable, ça sera mieux d'écrire $f(x)$ sous forme : $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$

$$= x - 1 + \frac{x^2+2}{e^x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + (x^2+2)e^{-x}\right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + \frac{x^2+2}{e^x}\right) \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x - e^x + x^2 + 2}{e^x} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

Il faut rendre l'expression au même dénominateur pour utiliser les deux propriétés $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\text{Car} : \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + (x^2+2)e^{-x}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{x^2+2}{e^x}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{e^x} \end{aligned}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

$$= \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\cdot\frac{e^x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}} \qquad \boxed{\frac{a}{\infty}=0}$$

$$=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$$

Car : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x^2}=1 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}=+\infty \end{cases}$

2 - Calculons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+(x^2+2)e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{(x^2+2)e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{xe^x} \qquad \boxed{\frac{+\infty}{0^-}=-\infty}$$

Il faut juste séparer les termes avec : $\begin{cases} \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \\ \frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c} \end{cases}$

On a : $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}=1$

Et : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{xe^x}=-\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(x^2+2)=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty} xe^x=0^- \end{cases}$

D'où : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Interprétation géométrique

On a : $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty \end{cases}$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

3 - a - Calculons $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+(x^2+2)e^{-x}-(x-1)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}+2e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x)^2e^{-x}+2e^{-x}$$

On pose $t=-x$

Si $x\to+\infty$

Alors $t\to-\infty$

Donc, on aura $\lim_{x\to+\infty}(-x)^2e^{-x}+2e^{-x}=\lim_{t\to-\infty}t^2e^{t}+2e^{t}=0$

Car : $\lim_{t\to-\infty}t^2e^{t}=\lim_{t\to-\infty}e^{t}=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$

Interprétation géométrique

On a : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b- Étudions la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta): y=x-1$

Rappel

Pour étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=ax+b$, il faut étudier le signe de $(f(x)-(ax+b))$

- Si : $\forall x\in I\ ;\ f(x)-(ax+b)\geq 0$
  - Alors la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ)
- Si : $\forall x\in I\ ;\ f(x)-(ax+b)\leq 0$
  - Alors la courbe (C_f) est au dessous de la droite (Δ)
- Les solutions de l'équation $f(x)=(ax+b)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (Δ)

Étudions le signe de : $f(x)-(x-1)$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$f(x)-(x-1)=x-1+(x^2+2)e^{-x}-(x-1)=(x^2+2)e^{-x}$

Puisque : $x^2+2>0$ et $e^{-x}>0$

Alors : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; f(x)-(x-1)>0$

D'où (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$.

4 -a- Montrons que : $f(\alpha)=\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)$

On a : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

Donc : $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

Et puisque α est la solution de l'équation $g(x)=0$

Alors : $g(\alpha)=0$

Il faut juste déterminer $e^{-\alpha}$ en fonction de α puis le remplacer dans l'expression de $f(\alpha)$

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=1$$
$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}=\frac{1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

Donc, on aura : $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

$$=\alpha-1+(\alpha^2+2)\cdot\frac{1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$
$$=\alpha-1+\frac{\alpha^2+2}{\alpha^2-2\alpha+2}$$
$$=\alpha-1+\frac{\alpha^2+2-2\alpha+2\alpha}{\alpha^2-2\alpha+2}$$
$$=\alpha-1+\frac{\alpha^2-2\alpha+2}{\alpha^2-2\alpha+2}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2\alpha+2}$$
$$=\alpha-1+1+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2\alpha+1+1}$$
$$=\alpha+\frac{2\alpha}{(\alpha-1)^2+1}$$
$$=\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)$$

D'où : $f(\alpha)=\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)$

b- Déterminons un encadrement de $f(\alpha)$

On : $f(\alpha)=\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)$ et $0<\alpha<1$

$$0<\alpha<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-1<0 \text{ et } 0<\alpha<1$$
$$\Leftrightarrow 0<(\alpha-1)^2<1 \text{ et } 0<\alpha<1$$
$$\Leftrightarrow 1<(\alpha-1)^2+1<2 \text{ et } 0<\alpha<1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{(\alpha-1)^2+1}<1 \text{ et } 0<\alpha<1$$
$$\Leftrightarrow 1<\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}<2 \text{ et } 0<\alpha<1$$
$$\Leftrightarrow 2<1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}<3 \text{ et } 0<\alpha<1$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

$$\Leftrightarrow 0<\alpha\left(1+\frac{2}{(\alpha-1)^2+1}\right)<3 \text{ et } 0<\alpha<1$$

$$\Leftrightarrow 0<f(\alpha)<3 \text{ et } 0<\alpha<1$$

D'où : $0<f(\alpha)<3$

$\boxed{5}$ - a - Calculons $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Comme étant composée, produit et somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.)

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x-1+(x^2+2)e^{-x}\right)' \\
&= (x-1)'+\left((x^2+2)e^{-x}\right)' \\
&= 1+(x^2+2)'e^{-x}+\left(e^{-x}\right)'(x^2+2) \\
&= 1+2xe^{-x}+(-x)'e^{-x}(x^2+2) \\
&= 1+2xe^{-x}-e^{-x}(x^2+2) \\
&= 1+\left(2x-(x^2+2)\right)e^{-x} \\
&= 1+\left(2x-x^2-2\right)e^{-x} \\
&= 1-(x^2-2x+2)e^{-x} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{(ax)'=a}$

$\boxed{a'=0}$

$\boxed{(u.v)'=u'.v+u.v'}$

$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$

$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}}$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ f'(x)=g(x)$

b - Étudions le signe de $f'(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a : $f'(x)=g(x)$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$

Et d'après le résultat de la question 4 de la première partie,

on a : $\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty;\alpha]\,;\ g(x)\leq 0\\ \forall x\in[\alpha;+\infty[\,;\ g(x)\geq 0\end{cases}$

D'où : $\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty;\alpha]\,;\ f'(x)\leq 0\\ \forall x\in[\alpha;+\infty[\,;\ f'(x)\geq 0\end{cases}$

Le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $f'(\alpha)=0$
Donc au point $A(\alpha;f(\alpha))$, (C_f) admet une tangente horizontale

6 - Une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0

Rappel

Si f est dérivable en x_0
Alors : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(x_0 ; f(x_0))$
(point d'abscisse x_0)

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= -1x+1$$
$$= -x+1$$

$$\begin{cases} f'(0)=g(0)=1-(0^2-2.0+2)e^0=1-2e^0=1-2=-1 \\ f(0)=0-1+(0^2+2)e^{-0}=1 \end{cases}$$

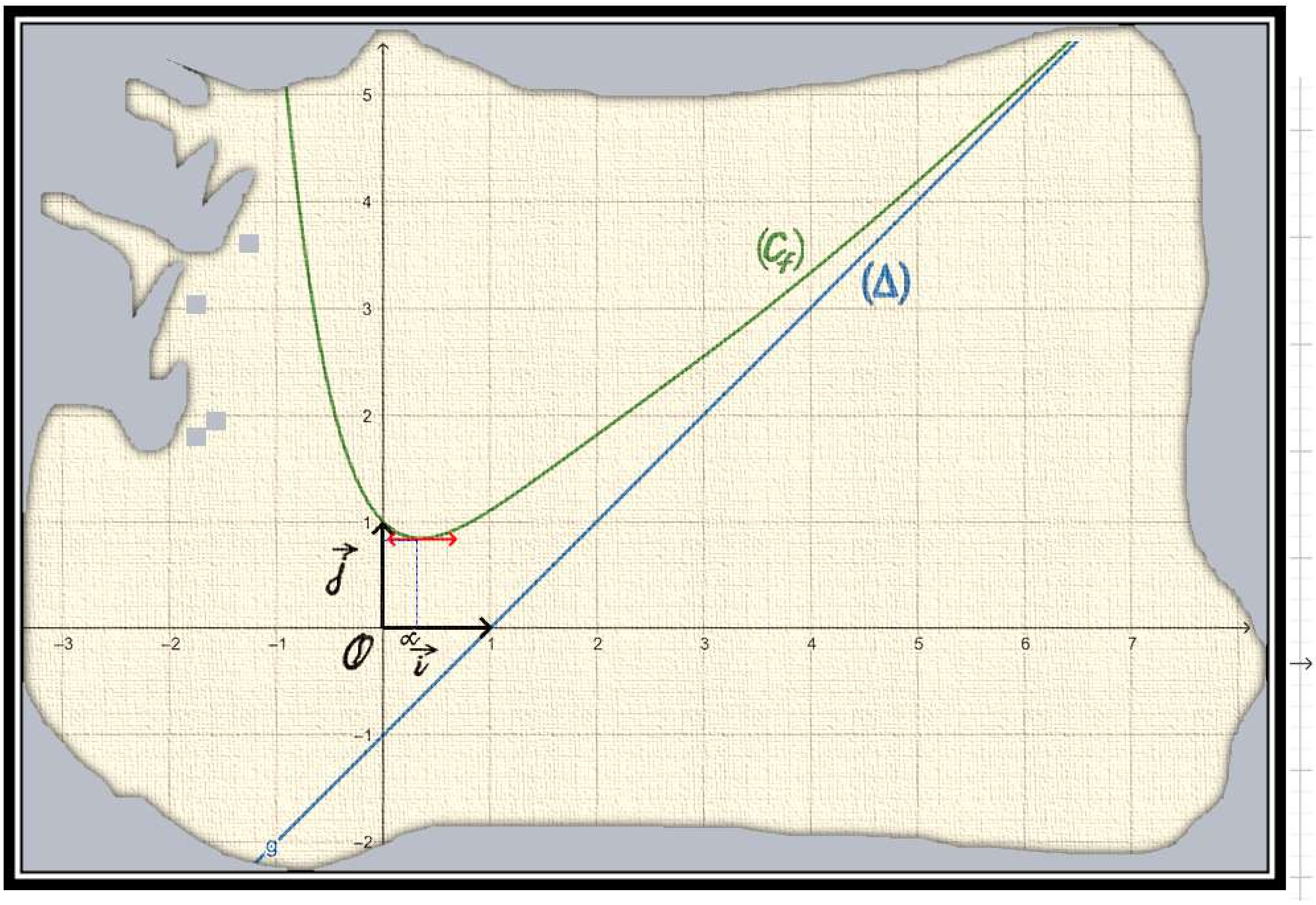
D'où : $(T): y = -x+1$

7 - Représentation de (Δ) et (C_f)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ
وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Explications

- $(\Delta): y = x-1$
- (Δ) passe par $A(1;0)$ et $B(2;1)$
- Au point $(\alpha ; f(\alpha))$, (C_f) admet une tangente horizontale et ($\alpha \simeq 0,35$ et $f(\alpha) \simeq 0,85$)
- Au voisinage de $-\infty$; (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- Au voisinage de $+\infty$, on a la droite (Δ) est une asymptote oblique à (C_f)
- La courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$ partout.



⑧ – a – Montrons que la fonction $H : x \longmapsto -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Rappel

> Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, il suffit de vérifier que : $\forall x \in I \; ; F'(x) = f(x)$

Pour cela, il suffit de vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; H'(x) = h(x)$

On a H est dérivable sur $\mathbb{R}$

(Comme étant composeé et produit des fonctions dérivables)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{(k\,u)' = k . u' \text{ tel que } k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{(u . v)' = u' . v + u . v'}$

$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) . e^{u(x)}}$

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(-(x+1)e^{-x}\right)' \\
&= -\left[(x+1)' e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'(x+1)\right] \\
&= -\left[e^{-x} + (-x)' e^{-x}(x+1)\right] \\
&= -\left(e^{-x} - (x+1)e^{-x}\right) \\
&= -\left(e^{-x} - x e^{-x} - e^{-x}\right) \\
&= -\left(-x e^{-x}\right) \\
&= x e^{-x} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; H'(x) = h(x)$

Et par suite, la fonction H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Calculons l'intégrale : $\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx$.

$$\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} H'(x)\,dx$$
$$= [H(x)]_{-1}^{0}$$
$$= H(0) - H(-1)$$
$$= -(0+1)e^{-0} - \left(-(-1+1)e^{-(-1)}\right)$$
$$= -1 - 0$$
$$= -1$$

D'où : $\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx = -1$

b) À l'aide de l'intégration par parties, calculons : $I = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x}\,dx$

Rappel

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Il faut juste bien choisir u' et v
Dans notre cas, u' joue le rôle de $x \longmapsto e^{-x}$

$x \longmapsto \frac{1}{a} e^{ax}$ est une primitive de $x \longmapsto e^{ax}$
Dans notre cas, $a = -1$

$$-e^{-x} = \left(e^{-x}\right)'$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$I = [-x^2 e^{-x}]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}(2x)\,dx$$
$$= -[x^2 e^{-x}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx$$
$$= -\left(0^2 e^{-0} - (-1)^2 e^{-(-1)}\right) + 2(-1)$$
$$= -\left(-e^{1}\right) - 2$$
$$= e - 2$$

$\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx = -1$ d'après le résultat de la question précédente

D'où : $I = e - 2$

c) Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x) - y|\,dx \quad (u.a)$$
$$= \int_{-1}^{0} \left|x - 1 + (x^2+2)e^{-x} - (x-1)\right|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} \left|(x^2+2)e^{-x}\right|\,dx$$

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x^2+2)e^{-x} > 0$

Alors : $(\forall x\in[-1;0])$; $|(x^2+2)e^{-x}|=(x^2+2)e^{-x}$

Donc : $\mathcal{A}=\int_{-1}^{0}|(x^2+2)e^{-x}|dx\ (u.a)$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+2)e^{-x}dx\ (u.a)$

$=\int_{-1}^{0}(x^2e^{-x}+2e^{-x})dx$

Linéarité

$=\int_{-1}^{0}x^2e^{-x}dx+2\int_{-1}^{0}e^{-x}dx\ (u.a)$

$=\mathrm{I}+2\int_{-1}^{0}(-e^{-x})'dx\ (u.a)$

$=\left(e-2-2[e^{-x}]_{-1}^{0}\right)\ (u.a)$

$=\left(e-2-2\left(e^{-0}-e^{-(-1)}\right)\right)(u.a)$

$=(e-2-2+2e)\ (u.a)$

$=(3e-4)(u.a)$

$=4(3e-4)\,cm^2$

D'où : $\mathcal{A}=4(3e-4)\,cm^2$

$u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|=2.2=4\,cm^2$

Rappel

L'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y=ax+b$, et les deux droites d'équations $x=c$ et $x=d$ est :

$\mathcal{A}=\int_{c}^{d}|f(x)-y|dx\ (u.a)$ et $c<d$

avec $(u.a)$ désigne l'unité des aires $\left(u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\right)$

- Pour enlever la valeur absolue, il faut savoir le signe de $f(x)-y$ (la position relative de (C_f) et la droite (D).)
- Il faut avoir deux droites verticales d'équations $x=c$ et $x=d$
- L'équation de l'axe des ordonnées est $x=0$