BACCALAUREAT BLANC N°2

Epreuve de Mathématiques

Série C **Durée : 4 h**

Examinateur M. Gildas Mba Obiang

L'usage de la calculatrice scientifique non programmable est autorisé

Exercice 1 : *Géométrie dans l'espace .../ 4 points*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(3;2;-1)$ et $H(1;-1;3)$.

1. Calculer la distance AH.
2. Déterminer une équation du plan P passant par H et orthogonal à la droite (AH) .
3. On donne les points : $B(-6;1;1)$, $C(4;-3;3)$ et $D(-1;-5;-1)$.
   a) Démontrer que les points B , C et D appartiennent au plan P .
   b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BD}}$.
   c) Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   d) Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\dfrac{145}{3}$.
4. a) Calculer l'aire du triangle ABC.
   b) Calculer la distance du point D au plan ABC .

Exercice 2 : *Arithmétiques − congruence − Codage affine ../ 4 points*

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x-26y=1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7;-3)$ est une solution de (E) .
2. Résoudre alors l'équation (E) .
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u;v)$ solutions de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entiers compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x+8$,

- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26 , que l'on appelle y .

x est alors « code » par y .
Ainsi , par exemple , la lettre L est assimilé au nombre 11 ; $11\times 11+8=129\equiv 25[26]$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26 . Au nombre 25 correspond la lettre Z . La lettre L est donc codé par la lettre Z .

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j , on a :
   $$11x\equiv j\,[26] \text{ équivaut à } x\equiv 19j\,[26].$$
   b) En déduire un procédé de décochage .
   c) Décoder W

Exercice 3 : *Convergence d'une suite de nombre complexe ../ 4 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra pour un unité graphique 5 cm. On pose $z_0=2$ et , pour tout entier naturel n , $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n .

1. Calculer z_1 ; z_2 ; z_3 et montrer que z_4 est un réel.
2. Placer A_0 ; A_1 ; A_2 ; A_3 et A_4 sur une même feuille .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=|z_n|$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique et établir pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
4. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon $0,1$?
5. Établir que , pour tout entier naturel n , $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$. En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.
6. Pour tout entier naturel n , on note $\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n$.
   a) Exprimer ℓ_n en fonction de n .
   b) Quelle est la limite de la suite (ℓ_n).

Problème : *Etude d'une fonction définie à partir d'une intégrale../ 8 points*

Partie A : *Etude de la parité de f../* 3,5 points

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ .On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\int_{-x}^{x}\frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

1. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+x^2}$.

   b) Calculer $F(0)$ .En déduire que si f est impaire alors F est nulle.

   Montrer que si f est paire alors ,pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :
   $$F(x)=2\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

2. a) soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$.

Étudier les variations de la fonction g puis tracé sa courbe ζ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) En utilisant la question 1 , montrer que $\displaystyle\int_{-x}^{x} g(t)dt=6x$.

c) Calculer , en cm^2 ,l'aire de la partie du plan délimitée par ζ l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1$.

Partie B : *Étude d'une suite ../ 4,5 points*

Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ par $G(x)=\displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

1. a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $G'(x)$.

   b) Calculer $G(0)$ et en déduire $G\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. On définie la suite (u_n) par :

   $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ et pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt$.

   a) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

   b) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n-1}+u_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

   c) Claculer u_1 ; u_2 et u_3 .

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1+(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$.

   b) En déduire que $v_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$.

   c) Exprimer alors v_n en fonction de u_{n+1} et u_0 puis en déduire (v_n) est convergente et calculer sa limite.

FIN

«Seul le travail paie J-..? »