

**EXERCICE 1**

**5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

**Partie A : Étude de la fonction  $f$**

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction  $f$ .
5. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.  
Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
7. Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  
Donner un encadrement de  $\alpha$ , au centième près.
8. On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 1$ .  
Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

**Partie B : Calcul d'aire**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine  $D_n$  délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$ . On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
2.
  - a. Justifier que l'aire du domaine  $D_n$  est  $I_n$ .
  - b. Calculer la limite de l'aire du domaine  $D_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## EXERCICE 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère de l'espace.

On considère la droite  $D$  qui a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$   
et le plan  $P$  qui a pour équation cartésienne :  $2x - 3y + z - 6 = 0$ .

1. **Affirmation :** La droite  $D'$ , qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est parallèle à la droite } D.$$

2. On admet que les points  $A(-2 ; 3 ; 1)$ ,  $B(1 ; 3 ; -4)$  et  $C(6 ; 3 ; 9)$  ne sont pas alignés.

**Affirmation :** La droite  $D$  est orthogonale au plan défini par les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

3. **Affirmation :** La droite  $D$  est sécante avec la droite  $\Delta$  qui a pour représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

4. **Affirmation :** Le point  $F(-3 ; -3 ; 3)$  est le projeté orthogonal du point  $E(-5 ; 0 ; 2)$  sur le plan  $P$ .

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel  $a$  telle que le plan  $P'$  d'équation  $-3x + y - a^2z + 3 = 0$  soit parallèle à la droite  $D$ .

## EXERCICE 3

5 points

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à  $10^{-4}$  près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

$C$  : « la personne a été contaminée »

$V$  : « la personne a été vaccinée ».

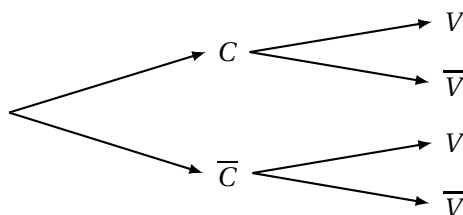
Les évènements contraires des évènements  $C$  et  $V$  sont notés respectivement  $\bar{C}$  et  $\bar{V}$ .

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités  $P(C)$ ,  $P(V)$  et la probabilité conditionnelle  $P_C(V)$ .

2. a. Calculer  $P(C \cap V)$ .

b. En déduire  $P(\bar{C} \cap V)$ .

3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer  $P_V(C)$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
- « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
  - « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »
6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.

La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est  $p = 0,02$ .

- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $X$ ? Justifier et donner ses paramètres.
- Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

#### EXERCICE 4

5 points

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

#### Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Partie B : Étude d'une suite auxiliaire**

Soit  $(w_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer  $w_0$ .
2. Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .
4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Partie C : Étude de la suite  $(u_n)$** 

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $n = 1$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite  $(u_n)$  est solution de l'équation :  $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$ .  
Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .