

Le sujet comporte six pages de 1/6 à 6/6 . Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie .

•••••

**EXERCICE 1** (5 points)

Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, ABCD est un losange de centre O tel que  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ , AOE est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct et I est le point d'intersection de (AD) et (OE).

Soit f la similitude directe qui transforme B en C et D en A.

1) a/ Montrer que  $f(O) = O$ .

b/ Montrer qu'une mesure de l'angle de f est  $\frac{\pi}{2}$  et que son rapport est égal à  $\sqrt{3}$ .

2) On pose  $F = f(A)$ .

a/ Justifier que  $f \circ f$  est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

b/ Montrer que F est le symétrique de D par rapport à B.

On pose  $g = S_{(AF)} \circ f$ .

3) a/ Montrer que g est une similitude indirecte et déterminer son rapport.

On note  $\Omega$  le centre de g.

b/ Déterminer  $g(D)$  et  $g(A)$ .

c/ En déduire que  $\Omega$  est le symétrique de B par rapport à D. Construire alors  $\Omega$ .

4) a/ Montrer que la droite (OI) porte la bissectrice intérieure de l'angle  $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OA})$ .

b/ Vérifier que le triangle  $D\Omega A$  est isocèle en D et déduire que (AI) porte la bissectrice intérieure de l'angle  $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A\Omega})$ .

c/ En déduire que (OI) est l'axe de g.

5) La droite (OI) coupe (AF) en J.

a/ Montrer que  $g(I) = J$ . Déduire  $f(I)$ .

b/ Montrer que les points O, I, A et J appartiennent à un même cercle.



**EXERCICE 2** (4.5 points)

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $2z^2 - (7 + i\sqrt{3})z + 9 + i\sqrt{3} = 0$ .

1) a/ Vérifier que  $(1 + 3i\sqrt{3})^2 = -26 + 6i\sqrt{3}$ .

b/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On a tracé dans la **figure 2** de l'annexe jointe le cercle  $\Gamma$  de centre O et de rayon  $\sqrt{3}$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = -1$ ,  $z_B = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_C = 2 + i\sqrt{3}$ .

2) a/ Justifier que  $B \in \Gamma$ .

b/ Construire les points B et C.

3) On donne les points E et K d'affixes respectives  $z_E = -\frac{1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_K = 4$ .

a/ Montrer que  $\frac{z_E - z_C}{z_A - z_K} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b/ Montrer qu'il existe un unique déplacement  $\varphi$  tel que  $\varphi(K) = C$  et  $\varphi(A) = E$ .

c/ Montrer que  $\varphi$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

4) a/ Montrer que l'expression complexe de  $\varphi$  est :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - i\sqrt{3}$ .

b/ Montrer que B est le centre de  $\varphi$ .

c/ Construire le point E.

5) Soit F le point d'affixe  $z_F = 1$ .

a/ Vérifier que  $\vec{EF} = \frac{3}{5}\vec{EC}$ .

On pose  $F' = \varphi(F)$ .

b/ Montrer que  $F' \in [EC]$  et construire  $F'$ .

c/ Montrer que  $F'E = FA$  et  $FF' = FB$ .

d/ Vérifier que  $\vec{AF} = \frac{2}{5}\vec{AK}$  et en déduire que  $\vec{EF'} = \frac{2}{5}\vec{EC}$ .

e/ Montrer que  $FA + FB + FC = EC$ .



**EXERCICE 3** (4.5 points)

(I) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_1) : 5u - 29v = 16$ .

1) a/ Vérifier que le couple  $(9,1)$  est une solution de  $(E_1)$ .

b/ Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_1)$ .

2) Soit dans  $\mathbb{Z}$  le système (S)  $\begin{cases} x = 2(\text{mod}5) \\ x = 18(\text{mod}29) \end{cases}$

Montrer que  $x$  est solution de (S) si, et seulement si  $x \in \{47 + 145k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

(II)

1) a/ Recopier et compléter le tableau suivant :

Reste modulo 5 de $x$	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de $x^3$					

b/ Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $x^3 = 3(\text{mod}5)$ .

Soit dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(E_2) : x^3 = 3(\text{mod}29)$ .

2) a/ Justifier que  $3^{28} = 1(\text{mod}29)$ .

b/ Montrer que  $3^{19}$  est une solution de  $(E_2)$ .

c/ Vérifier que  $3^6 \equiv 4(\text{mod}29)$  et en déduire que  $3^{19} = 18(\text{mod}29)$ .

d/ Justifier que 18 est un inverse de  $3^9$  modulo 29 .

3) Soit  $x$  une solution de  $(E_2)$ .

a/ Montrer que  $x$  et 29 sont premiers entre eux.

b/ Montrer que  $3^9 x = 1(\text{mod}29)$ .

4) Montrer que  $x$  est solution de  $(E_2)$  si, et seulement si  $x = 18(\text{mod}29)$ .

(III) Soit  $x \in \mathbb{Z}$ .

1) a/ Montrer que  $x^3 - 3 = 0(\text{mod}145)$  équivaut à  $\begin{cases} x^3 = 3(\text{mod}5) \\ x^3 = 3(\text{mod}29) \end{cases}$ .

b/ Montrer alors que  $x^3 = 3(\text{mod}145)$  équivaut à  $\begin{cases} x = 2(\text{mod}5) \\ x = 18(\text{mod}29) \end{cases}$ .

2) Déterminer le plus petit entier  $a > 0$  tel que  $a^3 = 3(\text{mod}145)$ .



**EXERCICE 4** (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, e[$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x} & \text{si } 0 < x < e \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(I) On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat.

2) a/ Montrer que  $f$  est continue à droite en 0 .

b/ Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 1}{x} = +\infty$  et interpréter graphiquement le résultat.

3) a/ Montrer que pour tout  $x \in ]0, e[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$ .

b/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Soit  $I$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$ .

On donne ci-contre le tableau de variation de  $f'$ .

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$e$
$f''(x)$		-	0
$f'$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{e}{4}$	$+\infty$

a/ Justifier que  $I$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$ .

b/ Montrer qu'une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $I$  est  $y = \frac{e}{4}x - \frac{3}{4}$ .

c/ Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $T$ .

Dans la **figure 3** de l'annexe jointe, on a tracé la tangente  $T$  et la droite d'équation  $x = e$ .

5) a/ Construire le point  $I$ .

b/ Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ . (On précisera le point d'intersection de  $\zeta$  et l'axe des abscisses).

(II) Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = \sqrt{e} - 1$  et  $U_n = \int_1^{\sqrt{e}} (f(x))^n dx$ , pour tout  $n \geq 1$ .

1) Montrer que la suite  $U$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a/ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x f'(x) (f(x))^n dx = \frac{\sqrt{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1} U_{n+1}$$

b/ Vérifier que pour tout  $x \in ]0, e[$ ,  $[1 + f(x)]^2 = x f'(x)$ .

c/ En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = \frac{\sqrt{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1} U_{n+1}$ .

d/ On désigne par  $\ell$  la limite de la suite  $U$ . Montrer que  $\ell = 0$ .

