REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : 2024
Série : C-SI
Coef. : 5
Durée: 4heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Mais dans le cas où celle-ci est programmable, elle devra être mise en mode examen.

Exercice 1 : QCM (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) comportant 4 questions. Pour chaque question, **une seule** proposition est exacte. Vous indiquerez sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Barème : réponse correcte, 1point ; mauvaise ou absence de réponse, 0 point.

Question 1 : Probabilité

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A un évènement et B un autre évènement tel que $P(B) \neq 0$. Définissez la probabilité conditionnelle $P(A/B)$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	$P(A/B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$	$P(A/B) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$

Question 2 : Nombres complexes.

Soient θ un nombre réel, z et z' deux nombres complexes tels que :

$z = 1 + cos\theta + isin\theta$ et $z' = 1 - cos\theta + isin\theta$.

Quelle est la bonne information concernant le nombre complexe $z \times z'$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$z \times z'$ est un nombre imaginaire pur	$z \times z'$ est un nombre réel strictement négatif	$z \times z' = 2(1 + cos\theta)$	$z \times z'$ est un nombre réel Strictement positif

Question 3 : Application de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthogonal. On considère l'application f de l'espace qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z + 1) \end{cases}$

Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par l'application f.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(E) est le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et qui passe par le point $A(1; 0; -1)$	(E) est le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et qui passe par le point $A(0; 1; -1)$	(E) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$ et qui passe par le point $A(1; 0; -1)$	(E) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$ et qui passe par le point $A(0; 1; -1)$

Question 4 : Courbes paramétrées.

(C) désigne une courbe paramétrée définie par le système ci-joint :

$$\begin{cases} x(t) = ln(t^3 + t^2 - t + 1) \\ y(t) = e^t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

En combien de points la courbe (C) admet-elle des tangentes verticales ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Aucun point	Un point	Deux points	Trois points

EXERCICE 2 : arithmétique et géométrie dans l'espace **(5 points)**

I. Restitution organisée des connaissances

1. Enoncer l'identité de BEZOUT.

2. Démontrer pour tout entier naturel non nul a, b et c ; si a divise b et a divise c alors pour tout entier relatif u et v, a divise $bu + cv$

II. Résolution de l'équation $7x - 5y = 2$ dans $\mathbb{Z}^2$.

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $7x - 5y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Donner une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

III. Géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormée repère (O ;$\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) on considère les points $A(10 : 10 ;\ 0)$, $B(20 ;\ 0;\ 0)$ et $C\ (20 ;\ 20 ;\ 0)$, soit (C) le cercle de centre B et de rayon AB.

1. Démontrer que la droite (OA) est tangent à (C) puis que le triangle OBC est rectangle.

2. Soit (S) la sphère engendrée par la rotation de (C) autour de l'axe (OX) et (Γ) l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace tels que :$\frac{OM}{ON} = \sqrt{2}$.

   N est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

   Démontrer qu'une équation réduite de (Γ) est : $y^2 + z^2 = x^2$.

Exercice 3 : Applications affines et coniques (5 points)

$ABCD$ est un carré direct, I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DC]$et $[BC]$.

On désigne par f l'application affine du plan définie par : $f(A) = C, f(I) = K$ et $f(D) = J$.

1. On considère le repère orthogonal $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$.
   a) Faire une figure puis donner les couples de coordonnées des points A, C, K, I et J.
   b) Justifier que l'application affine f est bijective.
   c) Démontrer que l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$
2. Soit (C) la conique définie par : $x^2 + 4y^2 - 10x + 8y + 13 = 0$.
   a) Démontrer que : $\forall M(x; y) \in (C)$, $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.
   b) Déterminer la nature de la conique (C).
   c) En déduire les éléments caractéristiques de la conique (C) :directrice (D),foyers F et F', excentricité e et sommets.
3. On désigne par (C') l'image de (C) par l'application affine f.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C').
   b) En déduire La représentation paramétrique de (C').

Exercice 4 : Equation différentielles et fonction définie par une intégrale (6 points)

1. On considère l'équations différentielle (E): $y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-x}}{x^2}$.
   a) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = (-x - 1 + lnx)e^{-x}$.
   Montrer que h est une solution de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
   c) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
   d) En déduire la solution f de (E) telle que : $f'(1) = e^{-1}$ et $f(1) = 0$.
2. Soit F la fonction définie sur $]0; 1]$ par : $F(x) = \int_1^x e^{-t} lnt dt$.
   a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $]0; 1]$.
   b) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 1]$ et pour tout réel t de l'intervalle $[1; x]$:
      - $F(x) = -e^{-x}\ln(x) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$
      - $-e^{-x}\ln(x) \leq \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-1}\ln(x)$

c) En déduire la limite de F en 0. Interpréter si possible les résultats.

d) Etudier le sens de variation de F sur $]0; 1]$, puis dresser son tableau de variations complet.