MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
DU TRANSFERT DES TECHNOLOGIES,
DE L'EDUCATION NATIONALE,
CHARGE DE LA FORMATION CIVIQUE

DIRECTION GENERALE DES EXAMENS ET CONCOURS

REPUBLIQUE GABONAISE
Union-Travail-Justice

BACCALAUREAT
Session : 2021
Série : C-SIA1
Coef : 5
Durée : 4H

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(l'usage de la calculatrice est autorisé)

EXERCICE 1 : Questions à choix multiples (5 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question posée, une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse fait perdre 0,25 point et l'absence de réponse vaut 0 point. Lorsque le total des points est négatif, on ramène la note finale à 0.

1. Soit (W_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $W_n = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^n}$.
   Alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n =$

A	B	C	D
4	6	12	0

2. On veut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 3 : $2^{n-1} < n!$.
   Pour l'étape d'hérédité nous supposons que cette inégalité est vraie pour n fixé $(n \geq 3)$, et nous démontrons que :

A	B	C	D
$2^{n-1} < (n+1)!$	$2^n < (n+1)!$	$2^{n+1} < (n+1)!$	$2^{n-1} < n!$

3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et p avec $p \neq 0$ et $p \neq 1$.

A	B	C	D
Pour tout entier k Compris entre 0 et n : $p(X = k) = p(X = n - k)$	L'espérance mathématique $E(X) = \sqrt{np}$	Il est possible que la variance de X soit nul	$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p(X = k) = 1$

4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 1 + i| = |\bar{z}|$ est :

A	B	C	D
La droite (D) d'équation : $x + y + 1 = 0$	La médiatrice du segment $[OA]$	L'ensemble vide	Le cercle de diamètre $[OA]$

5. Soit $A(3;2;-1)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.$(\Gamma)$ est le plan dont une équation cartésienne est :$x-y+z-1=0$.
Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (Γ) sont :

A	B	C	D
$\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2};3\right)$	$\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};1\right)$	$\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$

EXERCICE 2 : Arithmétique **(4 points)**

Le but de cet exercice est de déterminer la forme du développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie.

1. On considère les nombres $a=49$, $b=17$ et les égalités **(1)** et **(2)** suivantes :

(1) $49=17\times 2+15$ **(2)** $\frac{49}{17}=2+\frac{1}{\frac{17}{15}}$

a) Expliquer simplement pourquoi l'égalité **(1)** implique l'égalité **(2)**.

b) Soit l'égalité suivante : $17=15\times 1+2$
Expliquer simplement pourquoi cette égalité implique les égalités **(3)** et **(4)** suivantes :

(3) $\frac{17}{15}=1+\frac{2}{15}=1+\frac{1}{\frac{15}{2}}$ **(4)** $\frac{49}{17}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{15}{2}}}$

c) Soit l'égalité : $15=2\times 7+1$
Expliquer simplement pourquoi cette égalité implique les égalités **(5)** et **(6)** suivantes :

(5) $\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2}$ **(6)** $\frac{49}{17}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{2}}}$

L'égalité **(6)** est nommée développement de $\frac{49}{17}$ en fraction continue simple finie. Ce développement, noté $[2;1;7;2]$, permet d'écrire plus simplement l'égalité **(6)** :
$\frac{49}{17}=[2;1;7;2]$

2. a) Calculer le nombre rationnel r tel que : $r=[3;2;5;7]$.
b) Calculer le nombre rationnel s dont le développement est $[3;2;5;6;1]$.
c) Le développement d'un nombre rationnel en fraction continue simple finie est-il unique ? Justifier.

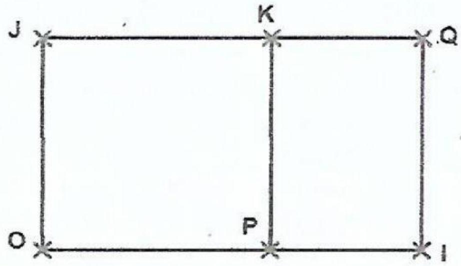
3. a) Ecrire le développement de $\frac{16}{9}$ en fraction continue simple finie.
b) Ecrire développement de $\frac{2021}{2019}$ en fraction continue simple finie.

4. soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. L'application de l'algorithme d'Euclide au couple (a,b) permet d'écrire les égalités suivantes où n est un entier naturel tel que $n\geq 3$:

$$\begin{cases} a=bq_1+r_1 \\ b=r_1q_2+r_2 \\ r_1=r_2q_3+r_3 \quad \text{où } b>r_1>r_2>r_3>r_{n-2}>r_{n-1}>r_n>0 \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n \\ r_{n-1}=r_nq_{n+1} \end{cases}$$

a) Que vaut l'entier naturel r_n ? Justifier.

b) Ecrire le développement de $\frac{a}{b}$ en fraction continue simple finie. On déterminera une égalité analogue à l'égalité **(6)** .



La figure ci-contre contient le carré de sens direct OIKJ, de côté OI=1.
OPQJ est un rectangle. On pose : φ =OP.

<u>EXERCICE 3</u> : Similitude directe plane **(5 points)**

Cet exercice comporte deux parties A et B. Ces parties peuvent être traitées de façon indépendante.
L'objectif de la parie A est de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe plane. La partie B, quant à elle, a pour objectif de prouver l'existence et l'unicité de la similitude considérée dans la partie A

Partie A

On admet qu'il existe une similitude plane directe S qui transforme O en P. P en Q, Q en K et J en I. On note Ω le centre de S.

1. a) De l'égalité de deux rapports, montrer que : $1 = \varphi(\varphi - 1)$
   b) En déduire que : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (est appelé le nombre d'or)
   c) Calculer le rapport de la similitude S et déterminer son angle.
2. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S \circ S$.
   b) Déterminer les images de O et P par $S \circ S$, puis en déduire la position exacte du centre Ω de la similitude S.

Partie B

Dans cette partie, on considère toujours la figure ci-dessus dans laquelle OIKJ est un carré de sens direct, de côté 1. On rappelle que : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =OP.
On rappelle aussi qu'on note i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. a) Justifier que $(O,\ I, J)$ est un repère orthonormé direct du plan.
   b) Justifier que dans ce repère, l'affixe du point P est φ et celle du point Q est $\varphi + i$, puis déterminer celles des points I, J et K.
2. a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe plane S transformant O en P et P en Q.
   b) Déterminer l'écriture complexe de S ;
   c) Calculer les coordonnées du centre Ω de S.

<u>EXERCICE 4</u> : Etude de fonctions - Suite intégrale **(6 points)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^n(-1 + lnx) \ si \ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

(C_n) est la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé(O, I, J).

1. Montrer que la fonction f_n est dérivable au point 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que les courbes (C_n) et (C_{n+1}) ont trois points fixes dont précisera les abscisses.
3. On note f'_n la fonction dérivée de f_n.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $f'_n(x) = x^{n-1}(-n + 1 + nln(x))$;
   b) Dresser le tableau complet de variations de f_n.
4. Construire les courbes (C_2) et (C_3). ($Unité\ graphique$: 2 cm).
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \int_1^e f_n(x)dx.$$

   a) Etudier les variations de la suite (u_n) ;

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie, que pour tout entier naturel non nul n:

$u_n = \frac{1}{(n+1)^2}[n + 2 - e^{n+1}]$.

c) En déduire en cm^2, l'aire comprise entre les courbes (C_1) et (C_2).

d) Etudier la convergence de la suite (u_n) .