

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples. (5 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. *Exemple : Question 1.a. Réponse A et 1.b. Réponse C*
Une bonne réponse rapporte 1pt (0,5pt + 0,5pt), une mauvaise réponse fait perdre 0,25 point, l'absence de réponse ne donne droit à aucun point et n'en fait perdre aucun ; si le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramenée à zéro.

1. On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal de la fonction f définie sur

$$K = [1; +\infty[\text{ par } f(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x+1}$$

- a) Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(C) admet une asymptote oblique	(C) admet une branche parabolique	(C) admet une asymptote verticale	(C) admet une asymptote horizontale

- b) Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
f est strictement décroissante sur K	f est constante K	f n'est pas strictement monotone sur K	f est strictement croissante sur K

2. Soient $A(1; -1; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(1; 2; -1)$ et $D(1; 0; 0)$ quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors :

- a) $|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$ est égal à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

- b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2x - y - 3z - 3 = 0$	$2x + y + 3z - 3 = 0$	$2x - y - 3z + 3 = 0$	Aucune des réponses n'est juste

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . On pose $Z = \frac{-i + \sqrt{3}}{2} \bar{z}$

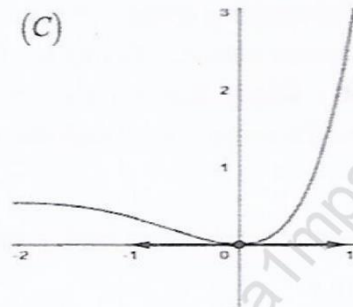
- a) Un argument de Z est alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-\frac{\pi}{6} + \theta$	$-\frac{\pi}{6} - \theta$	$\frac{\pi}{6} - \theta$	$\frac{\pi}{6} + \theta$

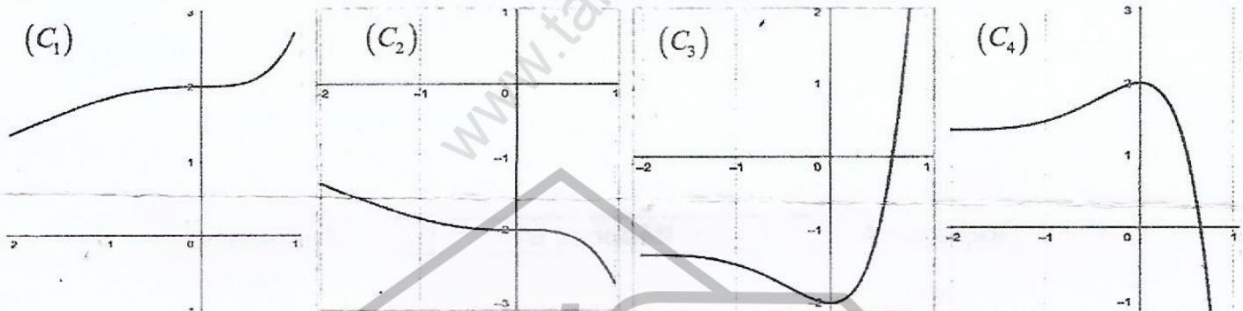
b) Le conjugué de Z est alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\bar{z} = \left(\frac{-i - \sqrt{3}}{2}\right) z$	$\bar{z} = \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right) z$	$\bar{z} = \left(\frac{i + \sqrt{3}}{2}\right) z$	$\bar{z} = \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right) \bar{z}$

4. La courbe ci – dessous est la courbe (C) représentative d'une fonction f dérivable sur I



a) Laquelle des quatre courbes ci – dessous représente une primitive F de la fonction f sur I :



Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
(C_3)	(C_4)	(C_2)	(C_1)

b) Laquelle des affirmations suivantes est correcte

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$F'(0) = 1$	$f'(0) = 0$	$F'(0) = -2$	$f'(0) = 2$

5. On désigne par A et B deux événements d'un univers muni d'une probabilité p .

On sait que $p(A \cup B) = \frac{7}{8}$ et $p(\bar{B}) = \frac{5}{8}$.

a) Si A et B sont indépendants alors la probabilité de l'événement A est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	Aucune des réponses n'est juste

b) Si A et B sont incompatibles alors la probabilité de l'événement A est égale à

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	Aucune des réponses n'est juste

EXERCICE 2 : Arithmétique – Congruences et critères de divisibilité.../3pts

- On considère l'équation (E): $5x + 3y = 16$ où x et y sont des entiers naturels.
 - Justifier que l'équation $5x + 3y = 1$ admet au moins une solution.
 - Déterminer une solution de l'équation $5x + 3y = 1$, en déduire une solution particulière de (E).
 - Résoudre alors dans \mathbb{N}^2 l'équation (E).
- ELLA Paul est un candidat de terminale C, il a passé les épreuves du second tour en mathématiques (coefficient 5) et en philosophie (coefficient 3). Il a obtenu la note de 08/20 dans les deux disciplines au premier tour. Pour être déclaré admis au second tour (avoir 10/20), il lui faut rattraper 16 points. On désigne par $8+x$ sa note à l'oral de mathématiques et $8+y$ celle obtenue à l'oral de philosophie où x et y sont des entiers naturels. A l'aide de la question précédente, déterminer toutes les notes possibles d'ELLA Paul en mathématiques et en philosophie pour qu'il obtienne exactement 10/20 au second tour.

EXERCICE 3 : Similitudes directes du plan.../3pts

On considère dans le plan orienté un triangle rectangle ABC tel que : $AB = 2AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} \in [2\pi]$

On désigne par I le milieu de $[AB]$ et J un point tel que A soit milieu de $[CJ]$

- Faire une figure soignée que l'on complétera au fur et à mesure.
- Justifier qu'il existe une unique similitude directe S du plan qui transforme I en C et A en J.
 - Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S
- Considérons les cercles (C_1) et (C_2) respectivement de diamètre $[IC]$ et $[AJ]$
 - Montrer que le centre Ω de S appartient à $(C_1) \cap (C_2)$
 - Déterminer et construire alors Ω .
- La droite (Δ_1) est la tangente à (C_1) au point C, la droite (Δ_2) est la tangente à (C_2) au point J.
 - Démontrer que $S(C) = K$ où K est le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2)
 - Place le point L, image de B par S, on expliquera la construction.

Exercice 4: Etude d'une suite numérique.../ 5pts

L'objectif de cet exercice est d'étudier une suite (x_n) dont les termes sont définis comme les solutions d'équations $f_n(x)=0$, où f_n est une famille de fonctions définies pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x)=x-\ln x$.

- Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- En utilisant $g(1)$, justifier clairement le signe de $g(x)$ pour x élément de $]1; +\infty[$.
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sqrt{n} \geq \ln \sqrt{n}$.

Partie B :

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]1; +\infty[$ par $f_n(x)=n(x-1)+\ln(x-1)$. On note f'_n la fonction dérivée de la fonction f_n .

- Calculer $f'_n(x)$ puis justifier que f_n est strictement croissante sur $]1; +\infty[$
 - Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en 1.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]1; +\infty[$

2. Justifier que $x_0 = 2$.
3. Soit n un entier naturel.
 - a) Montrer que pour tout x appartenant à $]1; +\infty[$ on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - 1$, puis que : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$
 - b) En déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
 - c) En utilisant le sens de variation de f_{n+1} , montrer que la suite (x_n) est décroissante. En déduire que la suite (x_n) converge.
4. a) En utilisant la question 2-b°) de la partie A, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$.
 - b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 < x_n \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (x_n) .

EXERCICE 5 : Intégrale et suites numériques.../4pts

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.
 - a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; En déduire une conséquence graphique pour la courbe (C) dans le cas de la limite de f en $+\infty$.
 - b) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa fonction dérivée f' .
 - c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C).
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
 - a) A l'aide d'une intégration par partie, établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
 - b) Calculer I_1 et I_2 .
 - c) Donner une interprétation graphique de I_2 . On fera apparaître sur le graphique de la question 1c.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n , on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
 - b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

$f(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$