REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session: **2025**
Séries: **C/SI**
Coéf.: **5**
Durée: **4 h**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé, celle qui est programme devra placée en mode examen. Cependant, les calculatrices ou émulateurs présents dans les smartphones, tablettes ou assimilés ne sont pas autorisés particulières.

EXERCICE 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question ou proposition posée, quatre réponses sont proposées A, B, C et D. Une seule des quatre réponses est correcte. Sans justification, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse, vaut $\mathbf{0,5}$ point une mauvaise réponse fait **perdre 0,25 point** ($-0{,}25$) et une surcharge (rature) ou une absence de réponse vaut $\mathbf{0}$ point.
Si le total des points est négatif alors la note à cet exercice sera **zéro.**

1/ Equation différentielle :

On considère les équations différentielles :

(E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ et **(E') :** $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$

a) Les solutions de l'équation **(E)** sont de la forme : $f(x) =$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(x+B)e^{2x}$, avec $B \in \mathbb{R}$	$Ae^{x} + Be^{2x}$ avec : $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$	$\big(Acos(x) + Bsin(x)\big)e^{2x}$ avec: $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$	$Acos(x) + Bsin(2x)$ Avec :$A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$

b) Une solution de **(E')** telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$f(x) = e^{x} + e^{2x} + x^2$	$f(x) = e^{x} + e^{2x} + x$	$f(x) = e^{x} + e^{2x} + x^3$	$f(x) = e^{-x} + e^{-2x} + x^2$

2/ Intégrale :

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n(x)}{sin^2(x)}dx$

a) Le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Décroissante	Croissante	Constante	Ni croissante, ni décroissante

b) En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, alors I_0 est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
-1	2	1	-2

3/ Application affine :

Soit g l'application affine d'expression analytique :

$$\begin{cases} 13x' = 5x - 12y + 24 \\ 13y' = -12x - 5y + 36 \end{cases}$$

a) sachant que g est une symétrie orthogonale, le rapport k de g est:

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
-1	1	0	2

b) Le vecteur associé à la translation de cette application affine est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\vec{u}(2;-1)$	$\vec{u}(2;3)$	$\vec{u}(3;2)$	$\vec{u}(-2;1)$

4/ Isométrie :

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. Soit r le quart de tour direct de centre O et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a) La nature de $r \circ t$ est une :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$	Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$	Translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) Le centre de $r \circ t$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Le point A	Le point B	Le point C	Le point D

5/ Calculs vectoriels :

Dans le repère orthonormé$(0;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ on considère les points $A\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ où $a; b; c; x; y$ et z sont des nombres réels.

a) Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ à pour coordonnées :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{pmatrix}bz-cy\\cx-az\\ay-bx\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}cy-bz\\cx-az\\ay-bx\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}bz-cy\\cx-az\\bx-ay\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}bz-cy\\az-cx\\ay-bx\end{pmatrix}$

b) La distance du point C à la droite (AB) est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{3}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	0

EXERCICE 2: Arithmétique et Probabilités (5 points)

L'objectif de cet exercice est de faire un sondage sur une élection après n jours de campagne.

Partie A

Soit $(E): 3x - 5y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs.

1) a) Démontrer que 3 et 5 sont premiers entre eux.

   b) Justifier que le couple $(2;1)$ est une solution particulière de (E).

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3x - 5y = 25$.

   On écrira le résultat sous la forme $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 + 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

Dans un lycée de la place trois listes A, B et C sont en campagne pour la présidence de la coopérative. Un sondage a été mené pour connaitre l'intention des électeurs les n premiers jours de la campagne $(n \geq 1)$. Chaque liste utilise chaque jour de campagne des techniques et des voies et moyens divers pour convaincre les électeurs. Il a été constaté qu'au passage du $n^{\text{ième}}$ au $(n+1)^{\text{ième}}$ jours on a:

- Parmi les électeurs favorables à la liste A, le jour suivant 5% changent d'avis pour la liste B et 5% pour la liste C.
- Par contre du côté des électeurs favorables à la liste B, le jour suivant 80% maintiennent leur soutien à la liste B et 15% changent d'avis pour la liste A.
- En fin des électeurs favorable à la liste C, le jour suivant 20% changent d'avis pour la liste A et 10% changent pour la liste B.

On note les évènements suivants :

A_n: *"le candidat est favorable à la liste A le $n^{\text{ième}}$ jour de la campagne"*

B_n: *"Le candidat est favorable à la liste B le $n^{\text{ième}}$ jour de campagne"*

C_n *" Le candidat est favorable à la liste C le $n^{\text{ième}}$ jour de campagne"*

Et $P_n = P(A_n)$; $Q_n = P(B_n)$ *et* $T_n = P(C_n)$ *avec* $Q_n = \frac{1}{5}P_n$

On rappelle que : $P_n + Q_n + T_n = 1$

1) Traduire les données de l'énoncé par un arbre pondéré entre le $n^{\text{ième}}$ et le $(n+1)^{\text{ième}}$ jour de campagne.

2) a)Vérifier que $\forall n \geq 1$, $P(B_n \cap A_{n+1}) = 0{,}15Q_n$ *et* $P(C_n \cap A_{n+1}) = 0{,}2T_n$.

   b) Etablir que $\forall n \geq 1$; $P_{n+1} = 0{,}7P_n - 0{,}05Q_n + 0{,}2$, puis que $P_{n+1} = \frac{69}{100}P_n + \frac{1}{5}$.

   c) Démontrer que $\forall n \geq 1$, $3(10P_n) + 5(5T_n) = 25$

   d) En vous aidant de la **partie A 2)** déterminer P_1 sachant que $10P_1$ correspond à la plus petite valeur de x tel que $k \geq -9$.

3) Soit (P_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} \\ P_{n+1} = \frac{69}{100}P_n + \frac{1}{5} \end{cases}$$

   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul,

$$P_n = -\frac{150}{713} \times \left(\frac{69}{100}\right)^n + \frac{20}{31}.$$

   b) En déduire la limite de P_n.

5) Quel sondage peut-on faire sur la liste gagnante sur une longue durée de campagne? Justifie ta réponse.

Problème : **Etude de fonction et géométrie (10 points)**

L'objectif de ce problème est de comparer l'aire d'un domaine du plan engendré par une fonction et du domaine image engendré par l'image de la fonction, par une transformation du plan.

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm

Partie A

Soit f_n la fonction défini sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f_n(x) = \left(1 - \ln\sqrt{|x-1|}\,\right)^n$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et (C_n) sa courbe représentative dans ce repère .

1°) a) Déterminer les limites de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et en 1 (on prendra en compte la parité de n).

b) Démontrer que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0 \iff x = e^2 + 1$ ou $x = -e^2 + 1$.

2°) Soit f_n' la fonction dérivée de la fonction f_n .

a) Démontrer que pour tout $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = \frac{n}{2(1-x)}.\left(1 - \ln\sqrt{|x-1|}\,\right)^{n-1}$$

(La justification de la dérivabilité n'est pas demandée)

b) Démontrer que si n est pair,

- $\forall\, x \in]-\infty; -e^2+1[\, \cup\,]1; e^2+1[$, $f_n'(x) < 0$.
- $\forall\, x \in]-e^2+1; 1[\, \cup\,]e^2+1; +\infty[$, $f_n'(x) > 0$.

c) Etudier les variations de f_n pour tout entier naturel n puis dresser son tableau de variation complet sur$\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

3°) a) Démontrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie à (C_1).

b) En déduire le tracé de (C_1) ans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$

4°) Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe(C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = 0$ et $x = 1 - e^2$.

Soit $F(x) = \int_0^x f_1(t)dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ la primitive de f_1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ prenant 0 en 0.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\int_0^x \ln|t-1|\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \ln(t-1)^2\,dt$$

b) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que

$$\int_0^x \ln|t-1|\,dt = \frac{1}{2}x\ln(x-1)^2 - \int_0^x \frac{t}{t-1}dt$$

c) En déduire $F(x)$ sachant que : $\frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$.

d) Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ du domaine (E) est $\mathcal{A} = \frac{e^2-3}{2}$.

Partie B

Soit g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui a tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels, tels que :

$$z' = i\overline{z} - 2 + 2i.$$

1°) Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par g.

2°) a)Démontrer que l'expression analytique de g est : $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$.

b) Soit $S_{(D)}$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ l'expression analytique de la première bissectrice .

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et M₁$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ son image par $S_{(D)}$.

Démontrer que : $\overrightarrow{M_1M} = (x - y)\vec{u}$ avec $\vec{u}(1; -1)$.

c) Démontrer que $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{v}}$ avec $\vec{v}(2; -2)$ puis en déduire la nature de g.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 1[$ par : $h(x) = 3 - e^{-2x-2}$ et (C')sa courbe représentative.

1°) Soit $M(x; y)$ un point de la courbe (C_1) et $M''(x''; y'')$ son image par g.

a) Démontrer que si $x < 1$, alors $M'' \in (C')$.
b) En déduire que (C') est l'image de (C_1) par g sur $]-\infty; 1[$.

2°) En vous aidons de la **partie B** déduire de (C_1) le tracé de (C') dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

3) Soit (E') le domaine image de (E) par l'application g.

a) Justifier que le domaine (E') est définie par la courbe (C') et les droites d'équation $x = -2$; $y = 2$ et $y = 3 - e^2$.
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine (E') puis comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.